Bornes effectives pour les solutions des equations en S-unites et des equations de thue-mahler*

Yann Bugeaud

Université Louis Pasteur
U. F. R. de mathématiques
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG (FRANCE)

*

Running head : Bornes effectives ...

Name of the author : Yann Bugeaud.

Mailing address : Université Louis Pasteur
U. F. R. de mathématiques
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG (FRANCE)

e-mail : bugeaud@pari.u-strasbg.fr

Abstract.

Recently, Bombieri and Bombieri & Cohen have developped a new method in effective diophantine approximation, based on a reworked version of the Thue principle, the Dyson Lemma and some geometry of numbers. In the present work, we follow their approach, utilizing however estimates for linear forms in two or three logarithms instead of the Thue principle. This tool allows us to sharpen their results. We apply our main estimates to provide new explicit - and, in a certain sense, improved - upper bounds for the size of the solutions of the S-unit equation and of the Thue-Mahler equation. We also derive a new effective irrationality measure for algebraic numbers and compare our estimates with the recent results of Bugeaud & Győry.

BORNES EFFECTIVES POUR LES SOLUTIONS
DES EQUATIONS EN S-UNITES ET DES EQUATIONS DE THUE-MAHLER

Yann Bugeaud (Strasbourg)

1. Introduction

Si α est un nombre réel irrationnel, on dit que μ est une mesure d'irrationalité effective (*resp.* ineffective) de α s'il existe une constante effective (*resp.* ineffective) $C(\alpha)$ telle que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C(\alpha)}{q^{\mu}}, \text{ pour tout } (p,q) \in \big(\mathbf{Z}, \mathbf{N} \setminus \{0\}\big) \text{ avec } \mathrm{pgcd}(p,q) = 1. \tag{1}$$

Il découle du principe des tiroirs que μ est nécessairement supérieur ou égal à 2. Le premier résultat connu remonte à Liouville [16], qui a montré que tout nombre algébrique α de degré n a une mesure d'irrationalité effective inférieure ou égale à n, avec égalité si α est quadratique.

Successivement, Thue, Siegel, Dyson et Gelfond ont amélioré l'estimation de Liouville, de manière cependant ineffective. Le meilleur résultat actuellement connu est l'œuvre de Roth [17] : pour tout nombre algébrique α et pour tout ε strictement positif, $2+\varepsilon$ est une mesure d'irrationalité ineffective de α.

Actuellement, on connaît trois méthodes différentes qui conduisent à des améliorations effectives de (1). Ainsi, Baker [1], puis Chudnowski [14] et, entre autres, Easton, Bennett, Voutier, ont, à l'aide de techniques hypergéométriques inspirées de travaux de Thue et Siegel, explicité de bonnes mesures d'irrationalité effectives pour certains nombres algébriques de la forme $\sqrt[r]{a}$, avec a et r entiers positifs. L'inconvénient majeur de cette méthode est qu'elle ne s'applique qu'au cas par cas et ne conduit à aucune formule générale, valable pour tout nombre algébrique.

Cependant, un tel résultat a été obtenu par Feld'man [15], comme conséquence de la théorie des formes linéaires de logarithmes développée par Baker [2]. L'exposant n dans (1) est alors remplacé par $n - \tau(\alpha)$, où $\tau(\alpha)$ est néanmoins très petit : les meilleures estimations déduites de cette approche sont dues à Baker & Stewart [3] si α est de degré 3 et à Bugeaud & Győry [12] dans le cas général.

Ces dernières années, Bombieri [5] et Bombieri & Muller [8] ont développé une nouvelle méthode, basée sur le principe de Thue et le lemme de Dyson; celle-ci ne s'applique toutefois qu'à une classe restreinte de nombres algébriques : les nombre de la forme $\sqrt[r]{a/b}$ qui admettent une bonne approximation rationnelle. Par la suite, Bombieri [6] a raffiné ce résultat et en a déduit, sans faire appel à la théorie des formes linéaires de logarithmes, une nouvelle mesure d'irrationalité effective valable pour tout nombre algébrique α, de qualité très légèrement inférieure au résultat de [12]. La version p-adique du travail [6], ainsi que plusieurs améliorations substantielles, ont été obtenues par Bombieri & Cohen [7].

Tout récemment, Bombieri, van der Poorten & Vaaler [9] ont retravaillé cette approche dans le cas des irrationnels cubiques et ont obtenu, sous certaines hypothèses, d'excellentes mesures d'irrationalité effectives, approchant parfois la valeur limite 2.

Dans cette note, nous reprenons l'article [7] en utilisant des minorations de formes linéaires de logarithmes en lieu et place du principe de Thue. Nous obtenons alors un résultat plus fin, duquel nous déduisons des majorations effectives de la taille des solutions des équations en S-unités et des équations de Thue-Mahler, ainsi qu'une nouvelle amélioration effective de (1). Parallèlement, on compare ces estimations avec les résultats de Bugeaud & Győry [11, 12], et on discute l'influence des différents outils utilisés sur la dépendance des bornes en les paramètres usuels.

2. Enoncé des résultats

Tout au long de ce travail, $\mathrm{H}(\alpha)$ (resp. $\mathrm{h}(\alpha)$) désigne la hauteur (resp. la hauteur logarithmique) du nombre algébrique α. Leur définition est rappelée dans la partie 3, où sont également précisés nos choix de normalisation des valeurs absolues. On convient de noter $\log^* x$ pour $\max\{\log x, 1\}$. En outre, les constantes $c_1, \ldots, c_6$ apparaissant dans cette partie sont des constantes numériques effectivement calculables.

La partie 5 est consacrée aux démonstrations des Théorèmes 1 à 4, qui reposent essentiellement sur les deux propositions énoncées et prouvées dans la partie 4. La Proposition 1 reprend un argument de géométrie des nombres dû à Minkowski et complété par Bombieri & Vaaler [10] (il s'agit du Lemma 6.2 de [7]), alors que la Proposition 2 se déduit des récentes minorations de formes linéaires en trois logarithmes archimédiens et en deux logarithmes p-adiques.

Le Théorème 1 ci-dessous traite le cas général d'un sous-groupe de rang fini d'un corps de nombres quelconque. Il raffine légèrement le Theorem 2 de [6] et le Theorem 2 de [7].

Théorème 1. *Soit $\mathbf{K}$ un corps de nombres de degré d et soit v une valeur absolue de $\mathbf{K}$. Soit Γ un sous-groupe de rang fini de $\mathbf{K}^*$ et considérons un système $\xi_1, \ldots, \xi_t$ de générateurs de Γ/tors. Soient $\xi \in \Gamma$, $A \in \mathbf{K}^*$ et $\kappa > 0$ tels que $\kappa \leq 1$ et*

$$0 < |1 - A\xi|_v < \mathrm{H}(A\xi)^{-\kappa} < 1.$$

Si v est une place archimédienne, on pose

$$C_a = 4.10^{19}\, d^4\, \frac{(\log 3d)^7}{\kappa}\, \log^* \frac{d}{\kappa}, \qquad Q_a = (2tC_a)^t \prod_{i=1}^{t} \mathrm{h}(\xi_i),$$

et on a la majoration

$$\mathrm{h}(\xi) \leq 10\, Q_a \max\{\mathrm{h}(A), Q_a\}.$$

Si v est au-dessus du nombre premier p, notons f_v le degré résiduel de l'extension $\mathbf{K}_v/\mathbf{Q}_p$ et posons

$$C_u = 4.10^6\, \frac{d^5}{\kappa} \log^{*2} \frac{d}{\kappa}, \qquad Q_u = (2tC_u)^t\, p^{f_v}\, \log p \prod_{i=1}^{t} \mathrm{h}(\xi_i).$$

On a alors la majoration

$$\mathrm{h}(\xi) \leq 8\, C_u\, Q_u \max\{\mathrm{h}(A), 40\, Q_u\}.$$

Remarques : Dans le cas archimédien, on peut en fait obtenir la majoration légèrement plus fine

$$\mathrm{h}(\xi) \leq c_1\, Q_a \max\left\{\mathrm{h}(A), \frac{Q_a}{\log^{*2} Q_a}\right\},$$

si l'on tient compte de l'observation qui suit la Proposition 1.

La grande valeur de la constante numérique intervenant dans l'expression de C_a s'explique par l'absence de minorations fines de formes linéaires en trois logarithmes. Dans le cas non-archimédien, nous n'avons pas de multiples déterminations du logarithme, et ainsi apparaît simplement une forme en deux logarithmes, pour laquelle nous disposons de minorations précises [13].

Les minorations de formes linéaires de logarithmes obtenues par Waldschmidt [20] dans le cas archimédien et par Bugeaud & Laurent [13] dans le cas p-adique jouent un rôle essentiel dans la démonstration du Théorème 1, car elles contiennent un raffinement qui ne figure ni dans les travaux de Baker & Wüstholz [4], ni dans ceux de Kunrui Yu [21]. Plus précisément, pour la forme linéaire $\Lambda := \log a - r \log x$, Waldschmidt obtient une minoration de $\log |\Lambda|$ en $-c_2\, \mathrm{h}(a)\, \mathrm{h}(x)\, \log\big(r/\mathrm{h}(a)\big)$, là où Baker & Wüstholz se contentent de $-c_3\, \mathrm{h}(a)\, \mathrm{h}(x)\, \log r$. Autrement dit, $\sqrt[r]{a}$ a une mesure d'irrationalité effective majorée par $c_4\, \mathrm{h}(a)\, \log\big(r/\mathrm{h}(a)\big)$, résultat non trivial dès que $r \geq c_5\, \mathrm{h}(a)$: c'est cette condition qui apparaît dans la Proposition 2. Si l'on avait dû se contenter de la condition $r \geq c_6\, \mathrm{h}(a) \log^* \mathrm{h}(a)$, qui découle de [4], la méthode suivie ici n'aurait pas permis de prouver le Théorème 1.

On déduit aisément du Théorème 1 de nouvelles majorations de la taille des solutions des équations en S-unités et des équations de Thue-Mahler. Les définitions du S-régulateur et de la S-norme sont données au début de la partie 3.

Théorème 2. *Soit $\mathbf{K}$ un corps de nombres de degré d. On note r le rang du groupe des unités de $\mathbf{K}$ et $R_{\mathbf{K}}$ son régulateur. Soit S un ensemble fini de places de $\mathbf{K}$ contenant l'ensemble S_∞ des places infinies, et soit s le cardinal de S. On désigne par R_S le S-régulateur de $\mathbf{K}$ et par P le plus grand nombre premier au-dessous des places finies de S, en convenant que $P = 1$ si S est réduit à S_∞. Soient α et β deux éléments non nuls de $\mathbf{K}$, de hauteur majorée par H $(H \geq e)$, et considérons l'équation*

$$\alpha x + \beta y = 1 \qquad \text{en } x, y \quad S\text{−units de } \mathbf{K}. \tag{2}$$

Alors, les solutions x, y de (2) vérifient

$$\begin{aligned} \max\{\mathrm{h}(x), \mathrm{h}(y)\} \leq\, & 10^{23s}\, s^{4s}\, (\log^* s)^{2s}\, d^{3s}\, P^d\, (\log^* P)\, R_S \log H \\ & + 10^{46s}\, s^{8s}\, (\log^* s)^{4s}\, d^{6s}\, P^{2d}\, (\log^* P)^2\, R_S^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Si $S = S_\infty$, alors les solutions x, y de (2) vérifient

$$\begin{aligned} \max\{\mathrm{h}(x), \mathrm{h}(y)\} \leq\, & 10^{20r}\, r^{4r}\, d^{2r}\, (\log 3d)^{8r}\, R_{\mathbf{K}} \log H \\ & + 10^{40r}\, r^{8r}\, d^{4r}\, (\log 3d)^{16r}\, R_{\mathbf{K}}^2. \end{aligned}$$

Remarques : Ce résultat est à comparer au Theorem de [11], où la majoration (3) est remplacée par

$$\max\{\mathrm{h}(x),\mathrm{h}(y)\} \leq 3^{25}\big(81d^2(\log^3 3d)/8\big)^{s+1} s^{5s+10} P^d \times \\ R_S(\log^* R_S)\big(\log^*(PR_S)/\log^* P\big)\log H, \tag{4}$$

estimation de qualité légèrement inférieure à (3) en ce qui concerne la dépendance en le S-régulateur et en s^s, si l'on suppose ces paramètres suffisamment grands par rapport aux autres. Le facteur s^{5s} de (4) est le produit de s^{2s}, dû au système fondamental de S-unités (*cf.* Lemme 1 ci-après), par s^{3s}, terme qui apparaît dans les minorations de formes linéaires en s logarithmes (*cf.* [20]). Ce dernier facteur se trouve remplacé dans (3) par $(s\ \log^* s)^{2s}$, où s^s correspond au t^t figurant dans les expressions de Q_a et de Q_u, et qui est inhérent à la méthode de démonstration, tandis que $(s{\log^*}^2 s)^s$ découle du choix du paramètre κ dans l'application du Théorème 1. Le second terme de (3) est évidemment très décevant : il est la conséquence directe du $4\,\mathrm{h}(\xi)/r$ figurant dans (14).

On rappelle que le S-régulateur de $\mathbf{K}$ est bien contrôlé en fonction de $h_{\mathbf{K}}$, le nombre de classes de $\mathbf{K}$, et des paramètres de S. On a en effet la majoration (*cf.* [11, Lemma 3])

$$R_S \leq R_{\mathbf{K}}\, h_{\mathbf{K}}\,(d\ \log^* P)^t,$$

où t désigne le nombre de places finies de S.

Le Théorème 3 traite le cas d'une équation de Thue-Mahler générale, il contient en particulier le Théorème 4, lequel présente une nouvelle amélioration effective de l'inégalité de Liouville (1). Au préalable, il convient de préciser nos notations, lesquelles, par souci de cohérence, sont les mêmes que celles de [12]. Soient $\mathbf{K}$ un corps de nombres de degré k et $\alpha \notin \mathbf{K}$ un nombre algébrique de hauteur majorée par A $(\geq e)$ et tel que $[\mathbf{K}(\alpha):\mathbf{K}] = n \geq 3$. On pose $\mathbf{M} = \mathbf{K}(\alpha)$, $d = nk$ et on note $R_{\mathbf{M}}$ (*resp.* $h_{\mathbf{M}}$, r), le régulateur (*resp.* le nombre de classes, le rang du groupe des unités) de $\mathbf{M}$. Soit S un ensemble fini de places sur $\mathbf{K}$, de cardinal s, contenant l'ensemble S_∞ des places infinies. Si S est réduit à S_∞, on pose $P = 1$, sinon P est le plus grand nombre premier situé au-dessous d'une place finie de S. Soit T l'ensemble de toutes les extensions à $\mathbf{M}$ des places de S, on note t son cardinal et R_T le T-régulateur de $\mathbf{M}$.

Théorème 3. *Soit β un élément non nul de $\mathbf{K}$ de hauteur majorée par B et de S-norme au plus égale à B^* $(\geq e)$. On considère l'équation*

$$\mathrm{N}_{\mathbf{K}(\alpha)/\mathbf{K}}(x-\alpha y) = \beta \quad \text{en } \ x, y \ \ S\text{−entiers.} \tag{5}$$

Toutes les solutions x, y de (5) vérifient

$$\max\{\mathrm{h}(x),\mathrm{h}(y)\} \leq ((\log B)/n) + 10^{22t}\, N^{5t}\,(t^3/d^2)^t\,(\log^* t)^{2t}\, P^N\,(\log^* P)\, R_T\, \log AB^* \\ + 10^{45t}\, N^{10t}\,(t^3/d^2)^{2t}\,(\log^* t)^{4t}\, P^{2N}\,(\log^* P)^2\, R_T^2 \tag{6}$$

où l'on a posé $N = d(n-1)(n-2)$. Si $S = S_\infty$ et $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$, on a la majoration plus fine

$$\max\{|x|,|y|\} \leq \exp\{10^{22r}\, n^{10r}\, r^{3r}\,(\log n)^{8r}\, R_{\mathbf{M}}\, \log AB \\ + 10^{45r}\, n^{20r}\, r^{6r}\,(\log n)^{16r}\, R_{\mathbf{M}}^2\}. \tag{7}$$

Remarque : Ce résultat est à comparer au Theorem 2 de [12], où la majoration (6) est remplacée par

$$\max\{\mathrm{h}(x), \mathrm{h}(y)\} \leq ((\log B)/n) + 3^{t+25}\, t^{5t+12}\, N^{3t+4d}\, P^N\, R_T\, (\log^* R_T) \times \\ (\log^*(PR_T)/\log^* P)\,(R_{\mathrm{M}} + sh_{\mathrm{M}} + \log(AB^*)). \tag{8}$$

Le terme où figure $\log B^*$ nous intéresse tout particulièrement, car c'est lui qui détermine la qualité de l'amélioration effective de l'inégalité de Liouville. On observe un léger gain concernant la dépendance en le T-régulateur, mais également la présence dans (6) de $\log^* P$, absent de (8). De même que le facteur s^{5s} présent dans (4), le terme t^{5t} de (8) correspond au produit de t^{3t}, dû à l'emploi de formes linéaires en t logarithmes, par t^{2t}, qui résulte de l'utilisation d'un système fondamental de S-unités. Ici, grâce au Lemme 2, on a pu se contenter d'un système indépendant, pour lequel on dispose de meilleures estimations (*cf.* Lemme 1), et on a ainsi gagné un facteur t^t dans le terme où apparaît $\log B^*$. Notons que cette observation s'applique également à la méthode de démonstration suivie dans [12]. Par ailleurs, le facteur $(t \log^* t)^{2t}$ de (6) a exactement la même source que le $(s \log^* s)^{2s}$ de (3).

Grâce à l'inégalité (7) du Théorème 3, on obtient une nouvelle mesure effective d'irrationalité pour tout nombre algébrique α de degré $n \geq 3$.

Théorème 4. *Soit α un nombre algébrique réel de degré $n \geq 3$ et de hauteur majorée par A $(\geq e)$. Soit R le régulateur de $\mathbf{Q}(\alpha)$. Alors, pour tout rationnel y/x avec $x > 0$, on a*

$$\left|\alpha - \frac{y}{x}\right| > \frac{C_{\mathrm{eff}}(\alpha)}{x^{n-\tau}} \tag{9}$$

avec

$$C_{\mathrm{eff}}(\alpha) = A^{-n^2} \exp\{-10^{27n}\, n^{14n}\, R\}$$

et

$$\tau = \left(10^{26n}\, n^{14n}\, R\right)^{-1}.$$

Remarque : On constate que l'on obtient une mesure d'irrationalité effective de α de qualité très semblable au résultat de [12], où l'exposant τ est remplacé par

$$\tau' = \left(3^{n+26}\, n^{15n+20}\, R \log^* R\right)^{-1}.$$

On note le gain d'un facteur $\log^* R$, progrès déjà effectué par Bombieri [6] - qui obtient l'exposant $\tau'' = \left(e^{500n^{12}} R\right)^{-1}$ -, mais, contrairement à [6], il ne se traduit pas par une perte spectaculaire au niveau de la dépendance en le degré de α. Cependant, par rapport à [12], les constantes numériques sont ici nettement plus élevées et la valeur de $C_{\mathrm{eff}}(\alpha)$ est de moins bonne qualité : c'est la conséquence de la présence, dans le membre de droite de (7), du second terme, lequel n'affecte toutefois pas τ, car il est indépendant de B.

3. Notations et lemmes auxiliaires

Soit $\mathbf{K}$ un corps de nombres de degré d et soit $M_{\mathbf{K}}$ l'ensemble des places sur $\mathbf{K}$. A toute place $v \in M_{\mathbf{K}}$ on associe une valeur absolue $|\,.\,|$ de la manière suivante. Si v est infinie et correspond au plongement complexe $\sigma : \mathbf{K} \to \mathbf{C}$, on pose, pour tout $\alpha \in \mathbf{K}$,

$$|\alpha|_v = |\sigma(\alpha)|^{d_v},$$

avec $d_v = 1$ ou 2, selon que $\sigma(\mathbf{K})$ est contenu dans $\mathbf{R}$ ou non. Si v est finie et correspond à l'idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathbf{K}$, on pose $|0|_v = 0$ et, pour tout $\alpha \in \mathbf{K} \setminus \{0\}$,

$$|\alpha|_v = \mathrm{N}(\mathfrak{p})^{-\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\alpha)}.$$

La hauteur $\mathrm{H}(\alpha)$ d'un nombre algébrique $\alpha \in \mathbf{K}$ est définie par

$$\mathrm{H}(\alpha) = \Big(\prod_{v \in M_{\mathbf{K}}} \max\{1, |\alpha|_v\} \Big)^{1/d}$$

et on note $\mathrm{h}(\alpha) := \log \mathrm{H}(\alpha)$ sa hauteur logarithmique. En outre, Voutier (*cf.* [19, Corollary 2] pour $d \geq 2$) a montré que si α est non nul et n'est pas racine de l'unité, sa hauteur logarithmique vérifie

$$\mathrm{h}(\alpha) \geq \frac{8}{9\,(\log 3d)^3}. \tag{10}$$

Soit S un sous-ensemble de $M_{\mathbf{K}}$ à s éléments, contenant toutes les places infinies, et normalisons les valeurs absolues $|\cdot|_v$, $v \in S$, comme ci-dessus. Soit $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{s-1}\}$ un système fondamental de S-unités de $\mathbf{K}$ et soit $\{v_1, \ldots, v_{s-1}\}$ un sous-ensemble de S. Le S-régulateur de $\mathbf{K}$, noté R_S, est la valeur absolue du déterminant de la matrice $\big(\log |\varepsilon_i|_{v_j}\big)_{1 \leq i,j \leq s-1}$: il est strictement positif et ne dépend ni du choix du sous-ensemble de S, ni du système fondamental de S-unités que l'on considère. En particulier, si S est réduit à l'ensemble des places infinies, on a $R_S = R_{\mathbf{K}}$. La S-norme de $\alpha \in \mathbf{K}$, notée $\mathrm{N}_S(\alpha)$, est nulle si $\alpha = 0$ et, sinon, est définie par $\mathrm{N}_S(\alpha) = \prod_{v \in S} |\alpha|_v$. On observe que si $\alpha \neq 0$ est un S-entier, alors sa S-norme est un entier strictement positif.

Afin de démontrer les Théorèmes 2 et 3, on a besoin de disposer de systèmes de S-unités de petite hauteur. Compte-tenu de (10), on pose

$$c_7 = \big((s-1)!\big)^2 / (2^{s-2}\, d^{s-1}), \qquad c_7' = (s-1)!/d^{s-1},$$

$$c_8 = c_7 \big(9d\,(\log 3d)^3/8\big)^{s-2} \quad \text{et} \quad c_8' = c_7' \big(9d\,(\log 3d)^3/8\big)^{s-2}.$$

Lemme 1. *Il existe un système fondamental (resp. indépendant) $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{s-1}\}$ de S-unités de $\mathbf{K}$ vérifiant*

$$\prod_{i=1}^{s-1} \mathrm{h}(\varepsilon_i) \leq c_7\, R_S \qquad (\textit{resp. } c_7'\, R_S) \tag{11}$$

et
$$\mathrm{h}(\varepsilon_i) \le c_8\, R_S \qquad (\textit{resp. } c_8'\, R_S),\ i=1,\dots,s-1. \tag{12}$$

Démonstration : Il s'agit du Lemma 1 de [11], dont la preuve (*cf.* [11, inégalités (13)]) traite parallèlement le cas d'un système indépendant et celui d'un système fondamental. Le lecteur peut également consulter le Lemma 6 de [6]. □

Lemme 2. *Soit* Γ *un sous-groupe de* $\mathbf{K}^*$ *engendré par un système indépendant de* S*-unités satisfaisant aux propriétés du Lemme 1. Pour tout* S*-entier non nul* $\alpha \in \mathbf{K}$ *et tout entier* $n \ge 1$*, il existe une* S*-unité* $\varepsilon \in \Gamma$ *telle que*

$$\mathrm{H}(\varepsilon^n\, \alpha) \le \mathrm{N}_S(\alpha)^{1/2d} \exp\bigl\{n\, s^s\, \log^{3s}(3d)\, R_S\bigr\}.$$

Démonstration : Posons $M = \mathrm{N}_S(\alpha)$ et choisissons un système indépendant de S-unités $\{\eta_1,\dots,\eta_{s-1}\}$ engendrant Γ et vérifiant les conclusions du Lemme 1. On considère le système d'équations linéaires

$$\sum_{j=1}^{s-1} X_j\, \log|\eta_j|_{v_i} = -\log\bigl(M^{-1/s}\, |\alpha|_{v_i}\bigr),\ \ i=1,\dots,s-1,$$

d'inconnues $X_1,\dots,X_{s-1}$. Comme son déterminant est non nul, il admet une unique solution $x_1,\dots,x_{s-1}$ dans $\mathbf{R}$, et l'on peut écrire, pour $1 \le j \le s-1$, $x_j = nb_j + \rho_j$, avec $b_j \in \mathbf{Z}$ et $|\rho_j| \le n/2$. Posons $\varepsilon = \eta_1^{b_1}\dots\eta_{s-1}^{b_{s-1}}$, on a alors

$$\bigl|\log\bigl(M^{-1/s}\, |\alpha\, \varepsilon^n|_{v_i}\bigr)\bigr| \le \frac{n}{2} \sum_{j=1}^{s-1} \bigl|\log|\eta_j|_{v_i}\bigr|,\ \ i=1,\dots,s-1,$$

et donc
$$\mathrm{h}(\alpha\, \varepsilon^n) = \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^{s} \bigl|\log|\alpha\, \varepsilon^n|_{v_i}\bigr| \le \frac{\log M}{2d} + \sum_{j=1}^{s-1} \mathrm{h}(\eta_j).$$

On conclut grâce à l'inégalité (12). □

Remarque : Ce résultat est à rapprocher du Lemma 2 de [11], qui offre d'ailleurs sensiblement la même estimation dans le cas où S est réduit à l'ensemble des places infinies. Cependant, au lieu de prouver, sans plus de précision, l'existence d'une S-unité ε telle que $\varepsilon\,\alpha$ soit de hauteur petite, on montre ici que l'on peut imposer à ε d'appartenir à un sous-groupe engendré par un système indépendant de S-unités. Et, par le Lemme 1, on dispose de meilleures estimations pour les systèmes indépendants que pour les systèmes générateurs. Cette observation intervient au cours de la démonstration du Théorème 3 (*cf.* aussi la remarque à la suite du Théorème 3).

4. Les deux propositions principales

La démonstration du Théorème 1 repose sur deux propositions indépendantes : une minoration de formes linéaires en deux ou trois logarithmes et un résultat issu de la géométrie des nombres. Afin de présenter deux énoncés synthétiques, valables simultanément pour des valuations archimédiennes et ultramétriques, nous introduisons les notations suivantes. Soit $\mathbf{K}$ un corps de nombres de degré d. Si $v = v_{\mathfrak{p}}$ est une valuation sur $\mathbf{K}$, on note p le nombre premier au-dessous de $\mathfrak{p}$, f_v le degré résiduel de l'extension $\mathbf{K}_v/\mathbf{Q}_p$ et e_v son indice de ramification. On pose alors

$$d_v = \frac{d}{f_v \log p}, \qquad D = \max\{1, d_v\}, \qquad V = p^{f_v}$$

et

$$\mathrm{h}'(x) = \max\{\mathrm{h}(x), 1/d_v\} \text{ pour tout } x \in \mathbf{K}.$$

Si v est archimédienne, on pose

$$d_v = \frac{9\,(\log 3d)^3}{8}, \qquad D = d, \qquad V = 1$$

et

$$\mathrm{h}'(x) = \mathrm{h}(x) \text{ pour tout } x \in \mathbf{K}.$$

Ainsi, on a toujours $d_v\,\mathrm{h}'(x) \geq 1$ pour tout $x \in \mathbf{K}$ non nul.

La proposition ci-dessous reprend le Lemma 6.2 de [7].

Proposition 1. *Soit Γ un sous-groupe de rang fini de $\mathbf{K}^*$ et considérons un système $\xi_1, \ldots, \xi_t$ de générateurs de Γ/tors. Soit A un élément non nul de $\mathbf{K}$ et soit v une valeur absolue de $\mathbf{K}$. Avec les notations ci-dessus, soient Q et N des réels positifs vérifiant*

$$Q \geq (t\,d_v)^t \prod_{i=1}^{t} \mathrm{h}'(\xi_i)$$

et

$$N \geq 6V\,d_v\,\mathrm{h}'(A)\,Q.$$

Soit $\xi \in \Gamma$ tel que $A\xi$ ne soit pas une racine de l'unité et supposons qu'il existe $\kappa > 0$ vérifiant

$$0 < |1 - A\xi|_v < \mathrm{H}(A\xi)^{-\kappa}.$$

Alors il existe $a \in A\Gamma$ non racine de l'unité, $\gamma \in \Gamma$ et un entier positif r tels que

$$A\xi = a\,\gamma^r,$$

$$\frac{N}{2\sqrt{2}\,VQ} - 1 \leq r \leq N + 3, \tag{13}$$

$$\mathrm{h}(a) \leq \mathrm{h}(A) + rt\big(Q^{-1} \prod_{i=1}^{t} \mathrm{h}'(\xi_i)\big)^{1/t} + \frac{4\mathrm{h}(\xi)}{r} \tag{14}$$

et

$$|1-a|_v < 1, \ \mathrm{pgcd}(p, r) = 1 \qquad \text{si } v \text{ est ultramtrique.} \tag{15}$$

Démonstration : Dans le cas ultramétrique, il s'agit du Lemma 6.2 de [7], dont la preuve est basée sur un théorème de géométrie des nombres de Bombieri & Vaaler [10] qui améliore un résultat de Minkowski. Dans le cas archimédien - où l'on obtient en fait des constantes numériques légèrement meilleures -, on peut se contenter de faire appel au théorème de Minkowski (*cf.* [18, Chapter *II*, Theorem 2C]). □

Remarque : Un examen attentif des démonstrations des Lemma 6.1 et 6.2 de [7] montre que, dans le cas archimédien, le résultat peut être légèrement raffiné. Il suffit pour cela de choisir pour N un entier positif multiple de $\mathrm{ppcm}\big(1, \ldots, \big[(\log Q)/3\big]\big)$, qui est inférieur à Q, et de traiter séparément les cas - notations de [7] - $1 \leq q \leq \big[(\log Q)/3\big]$ et $\big[(\log Q)/3\big] \leq q \leq Q$. Sous la première hypothèse, N/q est entier et le terme $4\,\mathrm{h}(\xi)/r$ de (14) disparaît donc, tandis que, sous la seconde hypothèse, on peut, dans (13), majorer r non plus par N, mais par $3N/\log Q$.

L'énoncé qui suit remplace la nouvelle version du principe de Thue développée dans [6] et [7]. Il se déduit des récentes minorations de formes linéaires en trois logarithmes archimédiens et en deux logarithmes p-adiques.

Proposition 2. *Soient a, $\gamma \in \mathbf{K}$ non nuls et $r \geq 2$ un entier. On suppose que a n'est pas racine de l'unité. On conserve les notations précédentes et on suppose qu'il existe κ', $0 < \kappa' \leq 1$, tel que*

$$\frac{r}{\mathrm{h}(a)} \geq 10^{19}\, \frac{D^4\,(\log 3D)^7}{\kappa'}\, \log^* \frac{D}{\kappa'} \tag{16}$$

ou

$$\frac{r}{\mathrm{h}'(a)} \geq 10^5\, \frac{D^2\, d_v^2}{\kappa'} \log^{*2} \frac{d_v}{\kappa'}, \tag{17}$$

selon que v est archimédienne ou ultramétrique. Si v est archimédienne, alors, sous l'hypothèse

$$\mathrm{h}(a\gamma^r) \geq \mathrm{h}(a), \tag{18}$$

on a

$$\log|1 - a\gamma^r| \geq \inf\{-1, -\kappa'\,\mathrm{h}(a\gamma^r)\}.$$

Si v correspond à l'idéal premier $\mathfrak{p}$ et si $|1-a|_v < 1$ et $\mathrm{pgcd}(r,p) = 1$, alors, sous l'hypothèse

$$\mathrm{h}(a\gamma^r) \geq \max\Big\{\mathrm{h}(a), \frac{r}{d_v}\Big\}, \tag{19}$$

on a

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(1 - a\gamma^r) < e_v\, \kappa'\, \mathrm{h}(a\gamma^r).$$

Remarque : La condition (17) est moins contraignante que l'hypothèse (H1) de [7], qui s'écrit, avec nos notations,

$$\frac{r}{\mathrm{h}(a)} \geq 3.4\,10^{11}\,\frac{D^{10}}{\kappa'}\left(\log\frac{1}{\kappa'}+1\right)^{7}.$$

Au cours de la preuve de la Proposition 2, nous appliquons la théorie des formes linéaires de logarithmes afin de minorer la quantité $|1-a\gamma^r|_v$. Si la place v est finie, nous avons affaire à une forme en deux logarithmes, alors que si v est archimédienne nous sommes obligés de minorer une forme en trois logarithmes : cela est une conséquence de la 2π-périodicité de l'exponentielle complexe.

Démonstration : Traitons d'abord le cas archimédien. On note log la détermination principale, *i.e.* appartenant à $]-\pi,\pi]$, du logarithme complexe. Si $|1-a\gamma^r|>1/2$, alors $\log|1-a\gamma^r|>-1$ et la proposition est démontrée. On peut donc supposer $|1-a\gamma^r|\leq 1/2$. Il existe alors un entier b_1 de valeur absolue majorée par $r+2$ tel que

$$\Lambda := i\pi b_1 + r\,\log\gamma + \log a$$

vérifie

$$|\Lambda| \leq 2\,|1-a\gamma^r|.$$

On applique le Corollaire 10.1 de [20] avec

$$\alpha_1=-1,\ \ \alpha_2=\gamma,\ \ \alpha_3=a,\ \ b_2=r\quad\text{et}\quad b_3=1.$$

On suppose que γ n'est pas racine de l'unité : si ce n'est pas le cas, la même méthode conduit à une estimation en fait légèrement plus fine. Reprenant les notations de [20], il découle de (10) que l'on peut poser

$$E=e,\ \ f=\frac{1}{e},\ \ \log A_1=\frac{\pi}{D},\ \ \log A_2 = 3\,\log^3(3D)\,\mathrm{h}(\gamma)\quad\text{et}\quad \log A_3 = 3\,\log^3(3D)\,\mathrm{h}(a).$$

Compte-tenu de l'hypothèse (16), on a également

$$Z_0\leq 10\,\log(3D),\ \ M\leq\frac{r}{\mathrm{h}(a)}\quad\text{et}\quad G_0\leq 3\,\log\frac{r}{\mathrm{h}(a)},$$

d'où l'on déduit

$$\log|\Lambda| \geq -3.3\,10^{15}\,D^4\,\log^7(3D)\,\mathrm{h}(a)\,\mathrm{h}(\gamma)\,\log\frac{r}{\mathrm{h}(a)}.$$

D'après (18), on a $r\mathrm{h}(\gamma)\leq \mathrm{h}(a\gamma^r)+\mathrm{h}(a)\leq 2\,\mathrm{h}(a\gamma^r)$ et donc la minoration

$$\log|\Lambda| \geq -6.6\,10^{15}\,D^4\,\log^7(3D)\,\frac{\mathrm{h}(a)}{r}\cdot\log\frac{r}{\mathrm{h}(a)}\cdot\mathrm{h}(a\gamma^r),$$

laquelle, combinée à (16), conduit à

$$\log|1 - a\gamma^r| \geq -\kappa' \, \mathrm{h}(a\gamma^r).$$

Considérons maintenant le cas d'une valuation ultramétrique $v = \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}$. Par hypothèse, $v(a) = 0$, et donc $v(1 - a\gamma^r) = v(\gamma^r - a^{-1})$. De plus, il découle de (15) que $|1 - a^{-1}|_v < 1$ et $|1 - \gamma|_v < 1$, on peut alors appliquer le Corollaire 2 de [13] avec

$$\alpha_1 = \gamma, \quad \alpha_2 = a^{-1}, \quad b_1 = r \quad \text{et} \quad b_2 = 1.$$

Avec les notations de [13], on pose $\log A_1 = \mathrm{h}'(\gamma)$ et $\log A_2 = \mathrm{h}'(a)$, et l'on obtient

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\gamma^r - a^{-1}) \leq 48 \, e_v \, d_v^4 \, \max\left\{ \log\left(\frac{1.5}{d_v} \left(\frac{r}{\mathrm{h}'(a)} + \frac{1}{\mathrm{h}'(\gamma)} \right) \right), \frac{10}{d_v}, 10 \right\}^2 \mathrm{h}'(a) \, \mathrm{h}'(\gamma). \tag{20}$$

L'hypothèse (19) entraîne

$$r\mathrm{h}'(\gamma) = \max\{\mathrm{h}(\gamma^r), r/d_v\} \leq 2\,\mathrm{h}(a\gamma^r).$$

Compte-tenu de (17), on déduit de (20) l'inégalité $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(1 - a\gamma^r) < e_v \, \kappa' \, \mathrm{h}(a\gamma^r)$, en considérant séparément les différentes valeurs possibles du maximum et le cas particulier $d_v < 1$. □

5. Démonstration des théorèmes

- Démonstration du Théorème 1.

Le théorème est trivial si $A\xi$ est racine de l'unité : on exclut donc ce cas dans la suite. On reprend la preuve du Theorem 2 de [7]. Supposons tout d'abord la valuation v archimédienne et notons σ le plongement complexe associé à v. On applique la Proposition 1 aux réels $Q = Q_a$ et

$$N = 2\sqrt{2}\, Q_a \left[1 + (\sqrt{2} + 1) \max\{C_a \mathrm{h}(A), \sqrt{8 C_a \mathrm{h}(\xi)}\}\right]. \tag{21}$$

Il s'ensuit qu'il existe $a \in \mathbf{K}$, $\gamma \in \Gamma$ et un entier $r > 0$ tels que $\sigma(A\xi) = a\gamma^r$ et que les inégalités (13) et (14) soient vérifiées. D'après (13) et (21), on a $r \geq (\sqrt{2} + 1) \max\{C_a \mathrm{h}(A), \sqrt{8 C_a \mathrm{h}(\xi)}\}$, d'où $C_a \, \mathrm{h}(a) \leq r$: la condition (16) est satisfaite avec $\kappa' = \kappa/2$. Par conséquent, si $\mathrm{h}(A\xi) > 2/\kappa$ - dans le cas contraire, le théorème est démontré -, l'hypothèse (18) n'est pas vérifiée, car sinon on obtiendrait, par application de la Proposition 2, l'inégalité $\log|1 - a\gamma^r| \geq -\kappa \, \mathrm{h}(a\gamma^r)/2$, en contradiction avec notre hypothèse

$$-\kappa \, \mathrm{h}(A\xi) > \log|1 - A\xi|_v/2 \geq \log|1 - \sigma(A\xi)|.$$

Par suite, on a

$$\mathrm{h}(A\xi) = \mathrm{h}(a\gamma^r) < \mathrm{h}(a) \leq r/C_a \leq (N + 3)/C_a,$$

et, suivant que $\sqrt{C_a}\,\mathrm{h}(A)$ est supérieur ou non à $\sqrt{8\,\mathrm{h}(\xi)}$, on obtient $\mathrm{h}(\xi) \le 10\,Q\,\mathrm{h}(A)$ ou bien $\mathrm{h}(\xi) \le Q\,\sqrt{\mathrm{h}(\xi)} + \mathrm{h}(A)$. Le Théorème 1 est donc démontré dans le cas d'une place archimédienne.

Si la place v est non-archimédienne, on procède de la même manière, à ceci près que l'on utilise la hauteur modifiée h' et que l'on pose

$$\kappa' = \min\left\{1, \frac{\kappa}{e_v\, f_v\, \log p}\right\}, \qquad C_u' = 10^5\, \frac{D^2\, d_v^2}{\kappa'} \log^{*2} \frac{d_v}{\kappa'}, \qquad Q = (2tC_u')^t \prod_{i=1}^{t} \mathrm{h}'(\xi_i)$$

et

$$N = 2\sqrt{2}\, Q\, p^{f_v} \left[1 + (\sqrt{2}+1) \max\left\{C_u' \mathrm{h}'(A), \sqrt{8 C_u' \mathrm{h}(\xi)}\right\}\right].$$

On applique la Proposition 1 aux réels Q et N. Il s'ensuit que l'on peut écrire $A\xi = a\gamma^r$, de telle sorte que les conditions (13) à (15) soient satisfaites et que l'on ait

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(1 - a\gamma^r) < \kappa\, \mathrm{h}(a\gamma^r)/(f_v \log p).$$

D'après (13), on a $r \ge C_u'\, \mathrm{h}'(a)$ et l'hypothèse (17) est réalisée. Par conséquent, (19) n'est pas vérifiée, car la Proposition 2 conduirait alors à

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(1 - a\gamma^r) > \kappa\, \mathrm{h}(a\gamma^r)/(f_v \log p).$$

Ainsi $\mathrm{h}(A\xi) \le \max\{\mathrm{h}(a), r/d_v\}$ et, après avoir noté la majoration $d_v^t \prod_{i=1}^t \mathrm{h}'(\xi_i) \le (d/\log 2)^t \prod_{i=1}^t \mathrm{h}(\xi_i)$ et effectué quelques calculs, on obtient le résultat annoncé. □

- Démonstration du Théorème 2.

Supposons $\mathrm{h}(\alpha x)$ majorée par $\mathrm{h}(\beta y)$ et notons v une valeur absolue pour laquelle $|\beta y|_v$ est minimale. Comme $\mathrm{h}(\beta y) = \mathrm{h}(1/\beta y)$, il vient

$$\log|1 - \alpha x|_v = \log|\beta y|_v \le -\frac{d}{s-1}\,\mathrm{h}(\beta y) \le -\frac{d}{s-1}\,\mathrm{h}(\alpha x).$$

On choisit un système fondamental $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{s-1}$ de S-unités de $\mathbf{K}$ donné par le Lemme 1, puis on applique le Théorème 1 avec $\kappa = \min\{1, d/(s-1)\}$ à la valeur absolue v et au sous-groupe de $\mathbf{K}^*$ formé des S-unités. Compte-tenu de l'estimation (11), on trouve, après quelques calculs, les majorations annoncées. □

- Démonstration du Théorème 3.

Soit (x_1, y_1) une solution de (5) et notons $\delta_{\mathbf{K}}$ le dénominateur de α. En multipliant (5) par $\delta_{\mathbf{K}}^n$, on obtient

$$\mathrm{N}_{\mathbf{M}/\mathbf{K}}\big(\delta_{\mathbf{K}} x_1 - (\delta_{\mathbf{K}}\alpha) y_1\big) = \delta_{\mathbf{K}}^n\, \beta$$

que l'on réécrit

$$\mathrm{N}_{\mathbf{M}/\mathbf{K}}(x - \alpha' y) = \beta_1,$$

où $\alpha' := \delta_{\mathbf{K}}\alpha$ est un entier algébrique. On considère en fait cette dernière équation, ceci nous amène à remplacer les bornes A, B et B^* par, respectivement, $A_1 := A^{d+1}$, $B_1 := B\,A^{dn}$ et $B_1^* := B^*\,A^{kdn}$.

Soient $\alpha^{(2)}$ et $\alpha^{(3)}$ deux conjugués distincts de $\alpha^{(1)} = \alpha'$. On convient de désigner par $z^{(i)}$, $i = 2, 3$, le conjugué de $z^{(1)} \in \mathbf{K}\big(\alpha^{(1)}\big)$ dans $\mathbf{K}\big(\alpha^{(i)}\big)$. Soit $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{t-1}\}$ un système indépendant de T-unités de $\mathbf{M}$ vérifiant les conclusions du Lemme 1. Comme $\mathrm{N}_S(\beta_1) \le B_1^*$, le Lemme 2 assure l'existence d'un entier algébrique $\gamma^{(1)} \in \mathbf{K}\big(\alpha^{(1)}\big)$ et d'une T-unité $\varepsilon^{(1)}$ appartenant au sous-groupe engendré par les ε_i tels que

$$x - \alpha^{(1)}\,y = \gamma^{(1)}\,\varepsilon^{(1)} \quad \text{et} \quad \mathrm{H}\big(\gamma^{(1)}\big) \le B_1^{*\,1/2d}\,\exp\big\{t^t\,\log^{3t}(3d)\,R_T\big\}. \tag{22}$$

On abrège l'égalité de Siegel

$$1 - \frac{\big(\alpha^{(2)} - \alpha^{(1)}\big)\,\gamma^{(3)}}{\big(\alpha^{(3)} - \alpha^{(1)}\big)\,\gamma^{(2)}} \cdot \frac{\varepsilon^{(3)}}{\varepsilon^{(2)}} = \frac{\big(\alpha^{(3)} - \alpha^{(2)}\big)\,\gamma^{(1)}}{\big(\alpha^{(3)} - \alpha^{(1)}\big)\,\gamma^{(2)}} \cdot \frac{\varepsilon^{(1)}}{\varepsilon^{(2)}}$$

en $1 - a\xi = a'\xi'$, en posant $\xi = \varepsilon^{(3)}/\varepsilon^{(2)}$ et $\xi' = \varepsilon^{(1)}/\varepsilon^{(2)}$.

Soit v une place du corps $\mathbf{K}\big(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}\big)$ pour laquelle $|\xi'|_v$ est minimal et vérifie donc

$$\mathrm{h}(\xi') \le -\frac{s_{12} - 1}{\big[\mathbf{K}(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}) : \mathbf{Q}\big]}\,\log|\xi'|_v \le -\frac{t}{d}\,\log|\xi'|_v,$$

où s_{12} désigne le nombre de places de $\mathbf{K}\big(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}\big)$ situées au-dessus des places de T. Soit w une place de $\mathbf{K}\big(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}\big)$ prolongeant v; comme $|\xi'|_v < 1$, on a

$$|1 - a\xi|_w = |a'|_w\,|\xi'|_w \le |a'|_w\,|\xi'|_v \le \mathrm{H}(a')^N\,\mathrm{H}(\xi')^{-d/t}. \tag{23}$$

Il découle de (23) et de la majoration $\mathrm{H}(a\xi) \le 2\,\mathrm{H}(a')\,\mathrm{H}(\xi')$ que l'inégalité

$$|1 - a\xi|_w \le \mathrm{H}(a\xi)^{-d/2t} \tag{24}$$

est réalisée, à condition de supposer

$$\mathrm{H}(a\xi) \ge \mathrm{H}(a')^{2tN}. \tag{25}$$

D'après (11), on a $\prod_{j=1}^{t-1} \mathrm{h}\big(\varepsilon_j^{(1)}/\varepsilon_j^{(2)}\big) \le (2/d)^{t-1}\,(t-1)!\,R_T$. Compte-tenu de (22) et de l'estimation $\max\{\mathrm{H}(a), \mathrm{H}(a')\} \le 4\,A_1^4\,\mathrm{H}\big(\gamma^{(1)}\big)^2$, le Théorème 1 appliqué à (24) avec $\kappa = d/2t$ dans le corps $\mathbf{K}\big(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}\big)$, de degré majoré par N, entraîne

$$\begin{aligned}\max\{\mathrm{h}(\xi), \mathrm{h}(\xi')\} \le{}& 10^{21t}\,N^{5t-1}\,(t^3/d^2)^t\,(\log^* t)^{2t}\,P^N\,(\log^* P)\,R_T\,\log AB^* \\ &+ 10^{43t}\,N^{10t-2}\,(t^3/d^2)^{2t}\,(\log^* t)^{4t}\,P^{2N}\,(\log^* P)^2\,R_T^2\end{aligned} \tag{26}$$

majoration également valable si (25) n'est pas satisfaite. On déduit alors de (26) et de (22) une majoration de $\mathrm{h}(x/y)$, et l'on conclut en notant que $y^n\,\mathrm{N}_{\mathbf{M}/\mathbf{K}}(x/y - \alpha') = \beta_1$. Si

$S = S_\infty$, le résultat est légèrement meilleur car on n'utilise que la partie archimédienne du Théorème 1. $\square$

- Démonstration du Théorème 4.

On peut sans restriction supposer $0 < \alpha < 1$. Soient $\alpha_1 := \alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les conjugués de α, et posons

$$P(X,Y) := \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i Y) = \mathrm{N}_{\mathbf{Q}(\alpha)/\mathbf{Q}}(X - \alpha Y).$$

Il découle du Théorème 3 que si $0 \leq x \leq y$ sont des nombres entiers premiers entre eux, alors il existe des constantes $C_1 = C_1(\alpha)$ et $C_2 = C_2(\mathbf{Q}(\alpha))$, dont l'expression se déduit de (7), telles que $y \leq e^{C_1} \cdot |P(x,y)|^{C_2}$. On a par conséquent la majoration

$$\left| \alpha - \frac{x}{y} \right| = \frac{1}{y} \cdot \frac{|P(x,y)|}{\prod_{i=2}^{n} (x - \alpha_i y)} \geq (2A^n)^{-n+1}\, e^{-C_1/C_2}\, y^{-n+1/C_2},$$

qui implique l'inégalité (9). On observe que la mesure d'irrationalité effective ainsi obtenue dépend uniquement de l'exposant de B dans l'estimation (7). En outre, elle reste valable pour tout générateur du corps $\mathbf{Q}(\alpha)$. $\square$

Merci à Paula Cohen pour ses précieux encouragements lors de la préparation de ce travail.

Références bibliograhiques

[1] A. Baker, Rational approximation to $\sqrt[3]{2}$ and other algebraic numbers, *Quart. J. Math. Oxford* 15 (1964), 375–383.

[2] A. Baker, Linear forms in the logarithms of algebraic numbers I, II, III, IV, *Mathematika* 13 (1966), 204–216; 14 (1967), 102–107, 220–228; 15 (1968), 204–216.

[3] A. Baker et C. Stewart, On effective approximations to cubic irrationals, *New Advances in Transcendence Theory*, A. Baker ed., Cambridge University Press, 1988, 1–24.

[4] A. Baker et G. Wüstholz, Logarithmic forms and group varieties, *J. Reine Angew. Math.* 442 (1993), 19–62.

[5] E. Bombieri, On the Thue-Siegel-Dyson Theorem, *Acta Math.* 148 (1982) 255–296.

[6] E. Bombieri, Effective Diophantine Approximation on $\mathbf{G}_m$, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* 20 (1993), 61–89.

[7] E. Bombieri et P. B. Cohen, Effective Diophantine Approximation on $\mathbf{G}_m$, *II*, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* 24 (1997), 205–225.

[8] E. Bombieri et J. Mueller, On effective measures of irrationality for $\sqrt[r]{a/b}$ and related numbers, *J. Reine Angew. Math.* 342 (1983), 173–196.

[9] E. Bombieri, A. J. van der Poorten et J. D. Vaaler, Effective Measures of Irrationality for Cubic Extensions of Number Fields, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* 23 (1996), 211–248.

[10] E. Bombieri et J. D. Vaaler, On Siegel's Lemma, *Invent. Math.* 73 (1983), 11–32.

[11] Y. Bugeaud et K. Györy, Bounds for the solutions of unit equations, *Acta Arith.* 74 (1996), 67–80.

[12] Y. Bugeaud et K. Györy, Bounds for the solutions of Thue-Mahler equations and norm form equations, *Acta Arith.* 74 (1996), 273–292.

[13] Y. Bugeaud et M. Laurent, Minoration effective de la distance p-adique entre puissances de nombres algébriques, *J. Number Theory* 61 (1996), 311–342.

[14] G. V. Chudnovsky, On the method of Thue-Siegel, *Ann. of Math.* 117 (1983), 325–382.

[15] N. I. Feldman, An effective refinement of the exponent in Liouville's theorem (en russe), *Izv. Akad. Nauk* 35 (1971), 973–990. Egalement : *Math. USSR Izv.* 5 (1971), 985–1002.

[16] J. Liouville, Remarques relatives à des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques, *C. R. Acad. Sci. Paris* 18 (1844), 883–885 et 910–911.

[17] K. F. Roth, Rational approximations to algebraic numbers, *Mathematika* 2 (1955), 1–20.

[18] W. M. Schmidt, *Diophantine Approximation*, Lect. Notes in Maths 785, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[19] P. Voutier, An effective lower bound for the height of algebraic numbers, *Acta Arith.* 74 (1996), 81–95.

[20] M. Waldschmidt, Minorations de combinaisons linéaires de logarithmes de nombres algébriques, *Canadian J. Math.* 45 (1993), 176–224.

[21] K. Yu, Linear forms in p-adic logarithms III, *Compositio Math.* 91 (1994), 241–276.

Yann Bugeaud
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG (FRANCE)

e-mail : bugeaud@math.u-strasbg.fr