Mesures de transcendance et aspects quantitatifs de la méthode de Thue–Siegel–Roth–Schmidt

Boris Adamczewski (Lyon) & Yann Bugeaud (Strasbourg)

Abstract. *A proof of the transcendence of a real number ξ based on the Thue–Siegel–Roth–Schmidt method involves generally a sequence $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ of algebraic numbers of bounded degree or a sequence $(\mathbf{x}_n)_{n\geq 1}$ of integer r-tuples. In the present paper, we show how such a proof can produce a transcendence measure for ξ, if one is able to quantify the growth of the heights of the algebraic numbers α_n or of the points $\mathbf{x}_n$. Our method rests on the Quantitative Schmidt Subspace Theorem. We further give several applications, including to certain normal numbers and to the extremal numbers introduced by Roy.*

Résumé. *Une démonstration de la transcendance d'un nombre réel ξ fondée sur la méthode de Thue–Siegel–Roth–Schmidt fait généralement intervenir une suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ de nombres algébriques de degrés bornés ou bien une suite $(\mathbf{x}_n)_{n\geq 1}$ de r-uplets d'entiers. Dans cet article, nous montrons comment une telle démonstration peut produire une mesure de transcendance de ξ, pour peu que l'on sache quantifier la croissance des hauteurs des nombres algébriques α_n ou des points $\mathbf{x}_n$. La méthode développée repose sur l'utilisation d'énoncés quantitatifs du théorème du sous-espace de Schmidt. Nous appliquons ensuite cette nouvelle approche à certains nombres normaux, ainsi qu'aux nombres extrémaux de Roy.*

2000 *Mathematics Subject Classification : 11J82*

1. Introduction

Une démonstration de l'irrationalité d'un nombre réel ξ faisant appel à l'approximation diophantienne met généralement en évidence une suite $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$ de nombres rationnels distincts qui converge vers ξ, à savoir telle que

$$0 < |q_n\xi - p_n| < \delta_n, \tag{1.1}$$

où $(\delta_n)_{n\geq 1}$ est une suite de nombres réels positifs tendant vers 0. Lorsque l'on est capable de contrôler à la fois la croissance de la suite $(q_n)_{n\geq 1}$ et la vitesse de convergence de la suite $(\delta_n)_{n\geq 1}$, la démonstration produit en fait une *mesure d'irrationalité* de ξ, dans le sens où elle permet de construire d'une manière non triviale une fonction Ψ prenant des valeurs positives et telle que

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \Psi(q),$$

pour tout nombre rationnel p/q. Cela découle d'une méthode élémentaire fondée sur l'utilisation d'inégalités triangulaires, laquelle, dans le cas particulier où il existe $\delta > 0$ tel que $\delta_n < q_n^{-\delta}$ et où

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} < +\infty, \tag{1.2}$$

entraîne que l'*exposant d'irrationalité* $\mu(\xi)$ de ξ est fini. Rappelons que $\mu(\xi)$ désigne le supremum des nombres réels w tels que l'inégalité

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < q^{-w}$$

possède une infinité de solutions rationnelles p/q. Cette technique permet par exemple de majorer l'exposant d'irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ (voir [21]). Notons cependant que l'approche élémentaire à laquelle nous venons de faire allusion garantit également le contrôle de l'approximation de ξ par des nombres algébriques dès lors que leur degré est strictement inférieur à $1+\delta$.

De façon similaire, une démonstration de la transcendance d'un nombre réel ξ fondée sur la méthode de Thue–Siegel–Roth–Schmidt fait intervenir une suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ de nombres algébriques de degrés bornés ou bien une suite $(\mathbf{x}_n)_{n\geq 1}$ de r-uplets d'entiers. Dans le présent article, nous nous intéressons à une généralisation de la problématique précédente en nous demandant si une telle démonstration produit nécessairement une mesure de transcendance de ξ, pour peu que l'on sache quantifier la croissance des hauteurs des nombres algébriques α_n ou des points $\mathbf{x}_n$.

Le premier (et à notre connaissance le seul) résultat dans cette direction, établi en 1964 par A. Baker [10] et énoncé dans la partie 2, donne une mesure de transcendance explicite de tout nombre réel ξ pour lequel il existe $\delta > 1$ et une suite $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$ de rationnels distincts vérifiant $q_n \geq 1$, (1.2) et (1.1) avec $\delta_n \leq q_n^{-\delta}$. Le point de départ de notre approche est une nouvelle démonstration de ce résultat (présentée dans la partie 3), beaucoup plus simple que la démonstration originale, et qui a l'avantage de se prêter sans trop de difficultés techniques à des généralisations p-adiques et multidimensionnelles. Notre nouvelle méthode repose sur l'utilisation d'énoncés quantitatifs issus de la méthode de Thue–Siegel–Roth–Schmidt, que nous rappelons dans la partie 6. Dans cette direction, les théorèmes 3.1, 4.1 et 4.2, ainsi que le corollaire 4.3, apportent une réponse essentiellement positive à la question posée ci-dessus. Nous présentons également quelques applications de ces résultats généraux dans la partie 5. Nous montrons tout d'abord comment l'extension p-adique du théorème de Baker permet d'obtenir des mesures de transcendance de nombres normaux construits par Champernowne [15], Davenport et Erdős [16], et par Bailey et Crandall [9]. Nous obtenons ensuite, comme conséquence d'une extension multidimensionnelle du théorème de Baker, une mesure de transcendance des nombres extrémaux récemment définis par Roy [33, 34]. Les démonstrations des résultats de la partie 4 figurent dans la partie 8 et utilisent des lemmes auxiliaires rassemblés dans la partie 7. Nous concluons cette article par une courte partie consacrée à d'autres applications de notre méthode générale.

Remerciements. Nous sommes très reconnaissants envers l'arbitre pour sa lecture attentive et ses nombreuses remarques pertinentes. Nous remercions Michel Waldschmidt d'avoir attiré notre attention sur la question traitée dans cet article suite à un exposé du second auteur au Groupe d'Étude sur les Problèmes Diophantiens de l'Institut Mathématique de Jussieu. Le premier auteur remercie également l'ANR pour son soutien à travers le projet DyCoNum–JCJC06 134288.

2. Les théorèmes de Roth et de Baker

Dans cette partie, nous rappelons le théorème de Roth, ainsi que le théorème de Baker qui sert de point de départ à notre étude. Ce résultat de Baker est en quelque sorte le prototype des résultats théoriques que nous énonçons dans la partie 4.

En 1955, Roth [32] établit que, comme presque tous les nombres réels, les nombres réels irrationnels algébriques ont un exposant d'irrationalité égal à 2.

Théorème R. (Roth, 1955). *Soient ξ un nombre réel et ε un nombre réel strictement positif. Supposons qu'il existe une suite infinie $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$ de rationnels ordonnés de sorte que $2 \leq q_1 < q_2 < \ldots$, et tels que, pour tout $n \geq 1$,*

$$0 < \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^{2+\varepsilon}}\cdot$$

Alors, ξ est un nombre transcendant.

En 1964, A. Baker obtint une conclusion plus précise que la simple transcendance de ξ, pourvu que la suite infinie de ses très bonnes approximations rationnelles soit, en un certain sens, dense. Avant d'énoncer son théorème, nous rappelons les classifications des nombres réels définies par Mahler [25] en 1932 et par Koksma en 1939 [22]. Soient $d \geq 1$ un entier et ξ un nombre réel. On note $w_d(\xi)$ le supremum des nombres réels w pour lesquels les inégalités

$$0 < |P(\xi)| \leq H(P)^{-w}$$

sont vérifiées par une infinité de polynômes $P(X)$ à coefficients entiers, de degré majoré par d. Ici, $H(P)$ désigne la hauteur naïve de $P(X)$, c'est-à-dire le maximum des valeurs absolues de ses coefficients. On note $w_d^*(\xi)$ le supremum des nombres réels w^* pour lesquels les inégalités

$$0 < |\xi - \alpha| \leq H(\alpha)^{-w^*-1}$$

sont vérifiées par une infinité de nombres algébriques α de degré majoré par d. Ici, $H(\alpha)$ désigne la hauteur de α, c'est-à-dire la hauteur de son polynôme minimal sur $\mathbf{Z}$.

Posant alors $w(\xi) = \limsup_{d\to+\infty}(w_d(\xi)/d)$, nous disons, suivant Mahler, que ξ est un

$$\begin{gathered}
A\text{-nombre, si } w(\xi) = 0;\\
S\text{-nombre, si } 0 < w(\xi) < \infty;\\
T\text{-nombre, si } w(\xi) = \infty \text{ et } w_d(\xi) < \infty \text{ pour tout entier } d \geq 1;\\
U\text{-nombre, si } w(\xi) = \infty \text{ et } w_d(\xi) = \infty \text{ pour un entier } d \geq 1.
\end{gathered}$$

En utilisant les exposants w_d^* au lieu de w_d, Koksma définit de manière analogue les S^*-, T^*- et U^*-nombres et établit que ces trois classes coïncident avec les S-, T- et U-nombres, respectivement. Cela résulte du Lemme 7.1 ci-après, qui implique également que $w_d(\xi)$ est infini si, et seulement si, $w_d^*(\xi)$ est infini. Une propriété essentielle de la classification de Mahler est que deux nombres transcendants appartenant à des classes différentes sont algébriquement indépendants. Les A-nombres sont exactement les nombres algébriques. Au sens de la mesure de Lebesgue, presque tous les nombres réels sont des S-nombres. Les nombres de Liouville, qui sont par définition les nombres ξ vérifiant $w_1(\xi) = +\infty$ (observons que $w_1(\xi) = \mu(\xi)-1$), sont des exemples de U-nombres, mais la confirmation de l'existence des T-nombres demeura un problème ouvert durant une quarantaine d'années, jusqu'à sa résolution par Schmidt [36, 37]. Davantage de résultats sur les fonctions w_d et w_d^* se trouvent dans la monographie [12]. Notons dès à présent que l'ensemble des U-nombres ξ se subdivise en une infinité dénombrable de sous-classes selon le plus petit entier d pour lequel $w_d(\xi)$ est infini.

Définition 2.1. *Soit $\ell \geq 1$ un entier. Un nombre réel ξ est un U_ℓ-nombre si, et seulement si, $w_\ell^*(\xi)$ est infini et $w_d^*(\xi)$ est fini pour $d = 1, \ldots, \ell-1$.*

L'ensemble des U_1-nombres est exactement l'ensemble des nombres de Liouville.

Obtenir une mesure de transcendance d'un nombre réel ξ consiste à majorer $w_d(\xi)$ (ou $w_d^*(\xi)$, ce qui revient au même en vertu du lemme 7.1). Les énoncés suivant font apparaître $w_d^*(\xi)$ car leurs démonstrations conduisent plus naturellement à une majoration de cet exposant.

Avec les notations ci-dessus, le résultat de Baker s'énonce ainsi.

Théorème B. (A. Baker, 1964). *Soient ξ un nombre réel et ε un nombre réel strictement positif. Supposons qu'il existe une suite infinie $(p_n/q_n)_{n\geq1}$ de rationnels écrits sous forme irréductible, ordonnés de sorte que $2 \leq q_1 < q_2 < \ldots$, et tels que, pour tout $n \geq 1$,*

$$0 < \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^{2+\varepsilon}}\cdot$$

Si en outre la condition

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} < +\infty \tag{2.1}$$

est vérifiée, alors il existe un nombre réel c, ne dépendant que de ξ et de ε, tel que

$$w_d^*(\xi) \le \exp\exp\{cd^2\}, \tag{2.2}$$

pour tout entier $d \ge 1$. En particulier, ξ est ou bien un S-nombre, ou bien un T-nombre.

Ce résultat répond pour l'essentiel de façon positive à la question posée dans la partie 1, dans le cas particulier où la transcendance d'un nombre réel se démontre à l'aide du théorème de Roth. Ainsi, lorsque δ est strictement supérieur à 1 dans l'exemple donné au début de la partie 1, le théorème de Baker permet, pour tout entier d, de contrôler l'approximation de ξ par des nombres algébriques de degré au plus d, alors que l'approche élémentaire fondée sur l'utilisation d'inégalités triangulaires permet seulement de le faire pour les entiers d strictement inférieurs à $1 + \delta$.

Les nombres rationnels p_n/q_n qui apparaissent dans les l'énoncé du théorème B sont supposés écrits sous forme irréductible. Cette hypothèse, superflue dans le cas du théorème R, se révèle ici nécessaire. Précisément, si elle est omise, alors la condition (2.1) entraîne que ξ est un nombre de Liouville, ou un S-nombre, ou un T-nombre. Des explications complémentaires figurent au début de la partie 8.

3. Démonstration simplifiée d'une extension p-adique du théorème de Baker

Nous donnons dans cette partie une démonstration à la fois simple et concise d'une extension p-adique du théorème de Baker, qui illustre bien l'idée de la nouvelle approche présentée dans cet article. Rappelons que la preuve que Baker a donnée de son théorème est plutôt longue (une quinzaine de pages) et technique. Elle reprend pas à pas la démonstration de Roth, en y incorporant une idée nouvelle. Notre démonstration repose sur une application nouvelle de la version quantitative du théorème de Roth obtenue par Evertse et Locher et rappelée dans la partie 6 (théorème EL).

En 1957, Ridout [31] étendit le théorème R en incluant des valuations p-adiques. Dans toute la suite, pour tout nombre premier ℓ et tout nombre rationnel x, on pose $|x|_\ell := \ell^{-u}$, où u est l'exposant de ℓ dans la décomposition de x en produit de facteurs premiers. En outre, on pose $|0|_\ell = 0$. Avec ces notations, le résultat principal de [31] s'énonce comme suit.

Théorème Ri. (Ridout, 1957). *Soient ξ un nombre réel, ε un nombre réel strictement positif et $\mathcal{S}$ un ensemble fini de nombres premiers distincts. Supposons qu'il existe une suite infinie $(p_n/q_n)_{n\ge1}$ de rationnels ordonnés de sorte que $2 \le q_1 < q_2 < \ldots$, et tels que, pour tout $n \ge 1$,*

$$0 < \left(\prod_{\ell\in\mathcal{S}} |p_n|_\ell \cdot |q_n|_\ell\right) \cdot \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^{2+\varepsilon}}.$$

Alors, ξ est un nombre transcendant.

Notre premier résultat est une généralisation commune des théorèmes B et Ri, qui améliore en particulier la mesure de transcendance donnée par le théorème B.

Théorème 3.1. *Soient ξ un nombre réel, ε un nombre réel strictement positif et $\mathcal{S}$ un ensemble fini de nombres premiers distincts. Supposons qu'il existe une suite infinie $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$ de rationnels écrits sous forme irréductible, ordonnés de sorte que $2 \leq q_1 < q_2 < \ldots$, et tels que, pour tout $n \geq 1$,*

$$0 < \left(\prod_{\ell \in \mathcal{S}} |p_n|_\ell \cdot |q_n|_\ell \right) \cdot \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^{2+\varepsilon}}. \tag{3.1}$$

Si en outre la condition

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} < +\infty$$

est vérifiée, alors il existe un nombre réel c, ne dépendant que de ξ, de ε et du cardinal de $\mathcal{S}$, tel que

$$w_d^*(\xi) \leq (2d)^{c \log\log 3d},$$

pour tout entier $d \geq 1$. En particulier, ξ est soit un S-nombre, soit un T-nombre.

Nous allons à présent montrer comment le théorème 3.1 se déduit facilement du théorème EL. Ce dernier donne, pour un nombre algébrique ξ, une majoration du nombre de grandes solutions de l'inégalité (3.1) uniquement en fonction de son degré, de ε et du cardinal de $\mathcal{S}$.

Démonstration du théorème 3.1. Considérons un nombre réel irrationnel ξ satisfaisant aux hypothèses du théorème 3.1. Il existe alors un ensemble fini $\mathcal{S}$ de nombres premiers, des nombres réels ε, c et une infinité de nombres rationnels p_n/q_n écrits sous forme irréductible vérifiant $0 < \varepsilon < 1/5$, $c > 1$,

$$0 < \left(\prod_{\ell \in \mathcal{S}} |p_n|_\ell \cdot |q_n|_\ell \right) \cdot \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2q_n^{2+\varepsilon/2}}$$

et

$$q_n < q_{n+1} \leq q_n^c, \quad (n \geq 1). \tag{3.2}$$

Soient d un entier strictement positif et α un nombre réel algébrique de degré d. Soit j tel que

$$q_{j-1} \leq \sqrt{d+1}\, H(\alpha) < q_j. \tag{3.3}$$

On suppose que $H(\alpha)$ est choisi suffisamment grand de sorte que les inégalités

$$H(\alpha) > 4^{8/\varepsilon}, \quad q_j > 4^c\,(d+1)^c \quad \text{et} \quad j \geq 2 \tag{3.4}$$

soient simultanément satisfaites. Observons que si α est le rationnel p/q, où $q \geq 1$, alors $H(\alpha) \geq q$ et il découle de (3.3) que $q_j > q$; en particulier, $\alpha \neq p_{j+h}/q_{j+h}$ pour tout entier positif h. Définissons le nombre réel χ par

$$|\xi - \alpha| = H(\alpha)^{-\chi}.$$

Nous supposons $\chi > 1$ et majorons χ en fonction de d.

Posons $v = 2 + \varepsilon/2$. Soit T le plus grand nombre entier pour lequel $2q_{j+T}^v < H(\alpha)^\chi$. Pour tout entier $h = 1, \ldots, T$, les inégalités

$$|\xi - \alpha| = H(\alpha)^{-\chi} < \frac{1}{2q_{j+T}^v} \leq \frac{1}{2q_{j+h}^v}$$

entraînent

$$\left|\alpha - \frac{p_{j+h}}{q_{j+h}}\right| \leq \left|\xi - \frac{p_{j+h}}{q_{j+h}}\right| + |\xi - \alpha| \leq \left|\xi - \frac{p_{j+h}}{q_{j+h}}\right| + \frac{1}{2q_{j+h}^v},$$

et donc

$$\begin{aligned}\left(\prod_{\ell \in \mathcal{S}} |p_{j+h}|_\ell \cdot |q_{j+h}|_\ell\right) \cdot \left|\alpha - \frac{p_{j+h}}{q_{j+h}}\right| &\leq \left(\prod_{\ell \in \mathcal{S}} |p_{j+h}|_\ell \cdot |q_{j+h}|_\ell\right) \cdot \left|\xi - \frac{p_{j+h}}{q_{j+h}}\right| + \frac{1}{2q_{j+h}^v} \\ &\leq \frac{1}{q_{j+h}^v}.\end{aligned}$$

Par conséquent, l'inégalité

$$\left(\prod_{\ell \in \mathcal{S}} |p|_\ell \cdot |q|_\ell\right) \cdot \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^v}$$

possède au moins T solutions rationnelles irréductibles p/q avec $q > q_j$, et, d'après (3.3) et (3.4), le théorème EL, appliqué avec $\varepsilon/2$ au lieu de ε, entraîne la majoration

$$T < e^{8s+31} \varepsilon^{-s-5} \log(6d) \cdot \log\bigl(2\varepsilon^{-1} \log(6d)\bigr), \tag{3.5}$$

où s est le cardinal de $\mathcal{S}$.

Cependant, comme $\chi > 1$, notre choix de T et les inégalités (3.2), (3.3) et (3.4) impliquent

$$2q_j^{vc^{T+1}} \geq 2q_{j+T+1}^v \geq H(\alpha)^\chi \geq \bigl((d+1)^{-1/2}\bigr)^\chi \, q_j^{\chi/c} \geq 2q_j^{\chi/(2c)},$$

et donc

$$\chi \leq 2vc^{T+2}. \tag{3.6}$$

Les inégalités (3.5) et (3.6) assurent alors l'existence d'une constante c', ne dépendant que de ξ, de ε et du cardinal de $\mathcal{S}$, telle que

$$w_d^*(\xi) \leq (2d)^{c' \log\log 3d},$$

ce qui termine la démonstration. En particulier, nous avons établi que ξ est ou bien un S-nombre, ou bien un T-nombre. □

Le fait que nous obtenons une meilleure mesure de transcendance que dans le théorème de Baker est une conséquence de résultats récents sur le lemme de Roth qui sont au cœur de la démonstration du théorème EL. Cependant, la clef de notre démonstration est l'existence d'une majoration du nombre de grandes solutions de (3.1) ne dépendant que du degré de ξ, de ε et du cardinal de $\mathcal{S}$. Lorsque $\mathcal{S}$ est réduit à l'ensemble vide, une telle majoration fut pour la première fois soulignée par Mignotte [29], mais elle découle facilement de la démonstration de Davenport et Roth [17]. En particulier, en remplaçant dans la démonstration du théorème 3.1 le théorème EL par un énoncé correspondant implicite dans [17], nettement antérieur à l'article de Baker [10], nous obtenons, tout comme Baker, une mesure de transcendance donnée par (2.2). En utilisant le résultat de Mignotte [29], nous établissons la mesure de transcendance

$$w_d^*(\xi) \leq \exp\exp\{c \log 2d\}, \quad (d \geq 1),$$

où c est un entier positif.

Outre sa simplicité, la démonstration ci-dessus possède un autre avantage sur celle de Baker : elle se généralise sans trop de difficultés techniques à des situations où la transcendance du nombre ξ est établie non pas au moyen du théorème de Ridout, mais à l'aide du théorème du sous-espace de Schmidt, comme l'illustrent les résultats de la partie 4.

La démonstration du théorème 3.1 est également très flexible et permet d'associer une mesure de transcendance à tout nombre dont on sait démontrer la transcendance à l'aide du théorème de Roth (ou de Ridout). Supposons en effet qu'il existe un nombre réel ε et une infinité de nombres rationnels p_n/q_n écrits sous forme irréductible vérifiant $0 < \varepsilon < 1$ et

$$\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{2q_n^{2+\varepsilon}}.$$

Considérons une fonction strictement croissante φ à valeurs entières et telle que

$$q_n < q_{n+1} \leq \varphi(q_n), \quad n \geq 1.$$

Soit $d \geq 1$ un entier et soit α un nombre algébrique réel. Soit Ψ la fonction définie sur $\mathbf{Z}_{\geq 1}$ par

$$\Psi(x) = \frac{1}{\big(\varphi^{\circ T}(x)\big)^3},$$

avec

$$T = \lceil 2 \cdot 10^7 \, \varepsilon^{-3} (\log \varepsilon^{-1})^2 \, (\log 4d) \, (\log\log 4d) \rceil + 2$$

et où $\varphi^{\circ T}$ désigne la T-ième itérée de la fonction φ. En adaptant la démonstration ci-dessus et en utilisant l'estimation (6.3), on obtient sans difficulté que

$$|\xi - \alpha| > \Psi(H(\alpha)),$$

si $H(\alpha)$ est suffisamment grand. Bien sûr, cette mesure de transcendance est d'autant moins fine que φ croît rapidement.

4. Extensions multidimensionnelles du théorème de Baker et applications

Après quelques rappels, nous présentons dans cette partie trois généralisations multidimensionnelles du théorème B.

Le théorème de Roth a été généralisé dans de nombreuses directions. La plupart des résultats connus relèvent du théorème du sous-espace établi en 1972 par W. M. Schmidt [38], ou plus exactement de sa généralisation aux corps de nombres incluant des valeurs absolues p-adiques. Nous rappelons ci-dessous deux énoncés importants démontrés en 1970 par W. M. Schmidt [35], qui sont des cas particuliers du théorème du sous-espace.

Le premier résultat concerne l'approximation rationnelle simultanée des puissances d'un nombre réel. Rappelons que $\|x\|$ désigne la distance du nombre réel x à l'entier le plus proche.

Théorème S1. (W. M. Schmidt, 1970). *Soient $r \geq 1$ un entier et ξ un nombre réel qui n'est pas algébrique de degré inférieur ou égal à r. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite strictement croissante d'entiers $(q_n)_{n\geq 1}$ tels que*

$$\|q_n\xi\| \cdot \|q_n\xi^2\| \cdots \|q_n\xi^r\| < \frac{1}{q_n^{1+\varepsilon}},$$

pour tout entier $n \geq 1$. Alors, le nombre réel ξ est transcendant.

Le second énoncé est une généralisation du théorème de Roth au cas de l'approximation d'un nombre réel par des nombres algébriques de degré borné.

Théorème S2. (W. M. Schmidt, 1970). *Soient ξ un nombre réel, $r \geq 1$ un entier et $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres algébriques distincts de degré au plus r. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$|\xi - \alpha_n| < \frac{1}{H(\alpha_n)^{r+1+\varepsilon}},$$

pour tout entier $n \geq 1$. Alors, le nombre ξ est transcendant.

Le théorème de Roth correspond au cas $r = 1$ des théorèmes S1 et S2.

Nous précisons tout d'abord la conclusion du théorème S1 lorsque la suite d'approximations rationnelles est suffisamment dense.

Théorème 4.1. *Soient $r \geq 1$ un entier et ξ un nombre réel qui n'est pas algébrique de degré inférieur ou égal à r. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite strictement croissante d'entiers $(q_n)_{n\geq 1}$ tels que*

$$\|q_n\xi\| \cdot \|q_n\xi^2\| \cdots \|q_n\xi^r\| < \frac{1}{q_n^{1+\varepsilon}},$$

pour tout entier $n \geq 1$. Supposons de plus que

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log q_{n+1}}{\log q_n} < +\infty. \tag{4.1}$$

Alors, soit ξ est un U_ℓ-nombre pour un certain entier $\ell \leq r$, soit il existe une constante c indépendante de d telle que

$$w_d^*(\xi) \leq \exp\{c(\log 3d)^2(\log\log 3d)\}$$

pour tout entier $d \geq 1$. En particulier, dans le dernier cas, ξ est ou bien un S-nombre, ou bien un T-nombre.

Le résultat suivant affine un autre énoncé classique qui découle du théorème du sous-espace (voir par exemple [39], Chap. VI, Corollary 1E). Rappelons qu'un polynôme à coefficients entiers est dit primitif si ses coefficients ne sont pas tous multiples d'un même nombre premier.

Théorème 4.2. *Soient ξ un nombre réel, $r \geq 1$ un entier et $(P_n)_{n\geq 1}$ une suite de polynômes à coefficients entiers et de degré au plus r. Supposons que ξ n'est pas algébrique de degré inférieur ou égal à r et qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$0 < |P_n(\xi)| < \frac{1}{H(P_n)^{r+\varepsilon}},$$

pour tout entier $n \geq 1$. Supposons de plus que

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log H(P_{n+1})}{\log H(P_n)} < +\infty,$$

et que la hauteur de $P_n(X)$ tende vers l'infini avec n. Alors ξ est ou bien un U_ℓ-nombre pour un certain entier $\ell \leq r$, ou bien un S-nombre, ou bien un T-nombre. En outre, si les polynômes $P_n(X)$, $n \geq 1$, sont primitifs et irréductibles, ou bien s'il existe un nombre réel w tel que

$$|P_n(\xi)| > H(P_n)^{-w}, \quad \text{pour } n \geq 1,$$

alors il existe une constante c indépendante de d telle que

$$w_d^*(\xi) \leq \exp\{c(\log 3d)^r(\log\log 3d)^r\}$$

pour tout entier $d \geq 1$. Dans ce cas, ξ est ou bien un S-nombre, ou bien un T-nombre.

Le corollaire suivant précise le théorème S2 lorsque la suite d'approximations $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est suffisamment dense. Il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème 4.2, lorsque ce dernier est appliqué à la suite des polynômes minimaux des nombres algébriques α_n.

Corollaire 4.3. *Soient ξ un nombre réel, $r \geq 1$ un entier et $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres algébriques distincts de degré au plus égal à r. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$|\xi - \alpha_n| < \frac{1}{H(\alpha_n)^{r+1+\varepsilon}}, \tag{4.2}$$

pour tout entier $n \geq 1$. Supposons de plus que

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log H(\alpha_{n+1})}{\log H(\alpha_n)} < +\infty. \tag{4.3}$$

Alors, il existe une constante c indépendante de d telle que

$$w_d^*(\xi) \leq \exp\{c(\log 3d)^r(\log\log 3d)^r\}$$

pour tout entier $d \geq 1$. En particulier, ξ est soit un S-nombre, soit un T-nombre.

Le corollaire 4.3 généralise le théorème B à l'approximation par des nombres algébriques de degré borné.

5. Applications

Dans cette partie, nous donnons dans un premier temps quelques applications du théorème 3.1 à l'étude de nombres normaux, notamment ceux construits par Champernowne [15], Davenport et Erdős [16] et plus récemment par Bailey et Crandall [9]. Nous utilisons ensuite les résultats de la partie 4 pour obtenir des mesures de transcendance pour les nombres extrémaux introduits par Roy [33, 34].

5.1. Nombres normaux et classification de Mahler

Soit $b \geq 2$ un entier. Un nombre réel ξ est dit normal en base b si, pour tout entier k, chaque bloc de k chiffres apparaît dans le développement en base b de ξ avec une fréquence égale à $1/b^k$. Émile Borel [11] établit en 1909 que presque tout nombre (au sens de la mesure de Lebesgue) est normal en toute base entière ; toutefois, à ce jour, nous ne connaissons aucun exemple naturel de tel nombre. Les nombres Ω de Chaitin, qui sont définis comme « les probabilités d'arrêt des machines de Turing universelles à programmes autodélimités » (voir [14]), sont bien des exemples explicites de nombres normaux en toute base entière, mais leur définition nous semble interdire le qualificatif d'« exemple naturel ». En 1933, Champernowne [15] montra que le nombre

$$\zeta_{10,X} = 0.1234567891011121314\ldots,$$

dont la suite des chiffres décimaux est la concaténation de la suite formée de tous les entiers classés par ordre croissant, est normal en base 10. Quatre années plus tard, Mahler [26] montra que $\zeta_{10,X}$ est transcendant mais n'est pas un nombre de Liouville, puis il généralisa ce résultat de la façon suivante.

Soit $P(X)$ un polynôme non constant tel que $P(n)$ est un entier strictement positif pour tout $n \geq 1$. Soit $b \geq 2$ un entier. Pour tout entier positif x, notons $(x)_b$ la suite des chiffres de x écrit en base b. Ainsi, $(x)_b$ est un mot fini sur l'alphabet $\{0, 1, \ldots, b-1\}$. Considérons le nombre réel

$$\zeta_{b,P(X)} = 0.(P(1))_b(P(2))_b \ldots$$

en base b. Mahler [27] établit que $\zeta_{b,P(X)}$ est transcendant, et n'est pas un nombre de Liouville. En outre, le résultat de Champernowne fut généralisé en 1952 aux nombres réels $\zeta_{b,P(X)}$ par Davenport et Erdős [16]. Ainsi, nous disposons d'une famille de nombres normaux, transcendants, et qui ne sont pas des nombres de Liouville.

Par la suite, Baker [10] raffina le résultat de Mahler [26] en montrant que $\zeta_{10,X}$ n'est pas un U-nombre. Sous certaines hypothèses additionnelles sur b et sur le degré de $P(X)$, la méthode de Baker entraîne que $\zeta_{b,P(X)}$ n'est pas un U-nombre, mais elle ne permet pas de traiter le cas de tous les nombres de cette forme. Le théorème 3.1 entraîne que ces hypothèses additionnelles sont superflues.

Théorème 5.1. *Pour tout entier $b \geq 2$ et tout polynôme $P(X)$ comme ci-dessus, le nombre réel $\zeta_{b,P(X)}$ est normal en base b, et c'est soit un S-nombre, soit un T-nombre.*

Par la suite, Mahler [28] établit la transcendance d'une autre classe de nombres réels, qui inclut les $\zeta_{b,X}$. Le théorème 3.1 entraîne que ces nombres ne sont pas des U-nombres. Il s'applique également aux nombres

$$\xi_{b,c,d} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{c^k b^{d^k}},$$

définis pour tous entiers b, c, d avec $b \geq 2$, $c \geq 2$, $d > \sqrt{c}$ et $\mathrm{pgcd}(b, c) = 1$. Bailey et Crandall [9] ont démontré que $\xi_{b,c,d}$ est normal en base b. Il découle du théorème Ri que $\xi_{b,c,d}$ est transcendant, et le théorème 3.1 implique le résultat plus précis suivant.

Théorème 5.2. *Soient b, c, d des entiers tels que $b \geq 2$, $c \geq 2$, $d > \sqrt{c}$ et $\mathrm{pgcd}(b, c) = 1$. Alors, le nombre réel $\xi_{b,c,d}$ est normal en base b et c'est soit un S-nombre, soit un T-nombre.*

Les démonstrations qui conduisent à la transcendance des nombres figurant dans les théorèmes 5.1 et 5.2 mettent clairement en évidence des suites de nombres rationnels vérifiant les hypothèses du théorème 3.1. Nous ne donnons donc pas le détail des démonstrations de ces deux théorèmes.

5.2. Exposants d'approximation diophantienne, nombres extrémaux de Roy, et classification de Mahler

Suivant les notations de Bugeaud et Laurent [13], pour tout entier $d \geq 1$ et pour tout nombre réel ξ, on désigne par $\hat{w}_d(\xi)$ le supremum des nombres réels w tels que, pour tout réel X suffisamment grand, les inégalités

$$0 < |x_d\xi^d + \ldots + x_1\xi + x_0| \leq X^{-w}, \qquad \max_{0 \leq m \leq d} |x_m| \leq X,$$

ont une solution en entiers $x_0, \dots, x_d$. Le lecteur est invité à consulter [13] pour un survol des résultats connus sur les fonctions $\hat{w}_d$. Mentionnons cependant que $\hat{w}_1(\xi) = 1$ pour tout nombre irrationnel ξ et que $\hat{w}_d(\xi) \geq d$ si ξ n'est pas algébrique de degré au plus égal à d. Roy [33, 34] fut le premier à prouver l'existence de nombres réels ξ vérifiant $\hat{w}_2(\xi) > 2$; toutefois, nous ignorons s'il existe un entier $d \geq 3$ et un nombre réel ξ tels que $\hat{w}_d(\xi) > d$. Le résultat suivant, qui est une conséquence facile du théorème 4.2, contribue à situer un tel nombre ξ dans la classification de Mahler.

Théorème 5.3. *Soient d un entier et ξ un nombre réel tels que $\hat{w}_d(\xi) > d$. Alors, ξ est ou bien un U_ℓ-nombre pour un certain $\ell \leq d$, ou bien un S-nombre, ou bien un T-nombre.*

Au vu de l'article de Laurent [23], il semble difficile d'améliorer la conclusion de ce théorème, et en particulier d'exclure le fait que ξ puisse être un U-nombre.

D'autres exposants d'approximation uniforme sont définis dans [13], à savoir les exposants $\hat{w}_d^*$ et $\hat{\lambda}_d$. Si un nombre réel ξ vérifie $\hat{w}_d^*(\xi) > d$ ou bien $\hat{\lambda}_d(\xi) > 1/d$, alors il vérifie en particulier $\hat{w}_d(\xi) > d$, et le théorème 5.3 s'applique.

En 2003, Roy [33, 34] a démontré que la mesure d'approximation simultanée pour un nombre réel ξ (qui n'est ni rationnel, ni quadratique) et son carré établie par Davenport et Schmidt [18] ne peut être améliorée. Les nombres ξ pour lesquels cette mesure est optimale sont appelés, selon sa terminologie, les nombres extrémaux. Ils vérifient $\hat{w}_2(\xi) = (3+\sqrt{5})/2 > 2$ et forment un ensemble infini dénombrable.

Définition 5.4. *Un nombre réel irrationnel ξ qui n'est pas quadratique est un nombre extrémal s'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $X \geq 1$, les inégalités*

$$0 < x_0 \leq X, \quad |x_0\xi - x_1| \leq cX^{-(\sqrt{5}-1)/2}, \quad |x_0\xi^2 - x_2| \leq cX^{-(\sqrt{5}-1)/2}$$

admettent une solution en entiers x_0, x_1, x_2.

Roy a observé que, comme conséquence du théorème du sous-espace, les nombres extrémaux sont transcendants. Plus précisément, le théorème 5.4.2 de [34] montre qu'à tout nombre extrémal ξ est associée une suite de nombres quadratiques $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ vérifiant (4.2) et (4.3). Ainsi, le corollaire 4.3 s'applique et nous permet d'établir une mesure de transcendance de ξ.

Théorème 5.5. *Pour tout nombre extrémal ξ et tout entier $d \geq 1$, il existe une constante c indépendante de d telle que*

$$w_d(\xi) \leq \exp\{c(\log 3d)^2(\log\log 3d)^2\}.$$

En particulier, ξ est soit un S-nombre, soit un T-nombre.

Ajoutons que Roy [34] a également établi une mesure d'irrationalité fine des nombres extrémaux qui implique que leur exposant d'irrationalité est égal à 2. Plus précisément, étant donné un nombre extrémal ξ, il existe des constantes $c > 0$ et $t \geq 0$, ne dépendant que de ξ, telles que

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^2(1+\log q)^t},$$

pour tout nombre rationnel p/q.

Par la suite, Bugeaud et Laurent [13] ont complété les travaux de Roy, en calculant explicitement certains exposants d'approximation diophantienne associés aux fractions continues sturmiennes caractéristiques, dont nous rappelons la définition ci-dessous.

Soient $(s_k)_{k\geq 1}$ une suite d'entiers ≥ 1 et $\{a,b\}$ un alphabet à deux lettres. On désigne par $\{a,b\}^*$ le monoïde des mots sur $\{a,b\}$ et on définit inductivement une suite de mots $(m_k)_{k\geq 0}$ de $\{a,b\}^*$ par les formules

$$m_0 = b, \quad m_1 = b^{s_1-1}a \quad \text{et} \quad m_{k+1} = m_k^{s_{k+1}} m_{k-1} \qquad (k \geq 1).$$

Cette suite converge (pour la topologie produit des topologies discrètes) dans le complété $\{a,b\}^* \cup \{a,b\}^{\mathbf{N}}$ vers le mot infini

$$m_\varphi := \lim_{k\to\infty} m_k = b^{s_1-1}a\ldots,$$

qui est communément appelé mot sturmien caractéristique d'angle (ou de « pente »)

$$\varphi := [0; s_1, s_2, s_3, \ldots]$$

construit sur l'alphabet $\{a,b\}$.

Le nombre réel $\xi_{(\sqrt{5}-1)/2} = [0; m_{(\sqrt{5}-1)/2}]$, dont les quotients partiels sont 0, puis les lettres du mot infini $m_{(\sqrt{5}-1)/2}$, est un nombre extrémal [33], et donc transcendant. Plus généralement, Allouche, Davison, Queffélec et Zamboni [8] ont démontré que, pour tout nombre irrationnel φ appartenant à l'intervalle $[0,1]$, le nombre ξ_φ est transcendant.

L'étude menée dans la partie 6 de [13] montre que $\hat{w}_2(\xi_\varphi) > 2$ et $w_2(\xi_\varphi) < +\infty$ lorsque la suite $(s_k)_{k\geq 1}$ est bornée, tandis que $w_2(\xi_\varphi)$ est infini lorsque cette suite n'est pas bornée. Le théorème 4.4 implique donc le résultat suivant.

Théorème 5.6. *Avec les notations ci-dessous, si a et b sont des entiers positifs et distincts, alors le nombre ξ_φ est ou bien un S-nombre, ou bien un T-nombre si la suite $(s_k)_{k\geq 1}$ est bornée, et c'est un U_2-nombre dans le cas contraire.*

Dans [5], nous présentons une autre démonstration du théorème 5.6, comme cas particulier d'un résultat général établissant des mesures de transcendance pour certaines familles de fractions continues.

6. Le théorème du sous-espace quantitatif

Le théorème de Roth est ineffectif, dans le sens où, étant donnés $\varepsilon > 0$ et un nombre réel algébrique irrationnel ξ, on ne dispose d'aucune majoration explicite du dénominateur des solutions de l'inégalité

$$0 < \left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}} \cdot \tag{6.1}$$

Néanmoins, il est possible de majorer le nombre de solutions de (6.1), ainsi que le firent Davenport et Roth [17] en 1955. Par la suite, leur résultat fut considérablement amélioré à plusieurs reprises. À ce jour, les meilleures majorations figurent dans les articles d'Evertse [19] et de Locher [24]. Le Theorem 2 de [24] entraîne (6.2), tandis que (6.3) est une conséquence de l'estimation établie par Evertse à la fin du paragraphe 6 de [19].

Théorème EL. *Soient $d \geq 1$ un entier et ξ un nombre algébrique réel de degré d et de hauteur H vérifiant $0 < \xi < 1$. Soient $\mathcal{S}$ un ensemble fini de s nombres premiers distincts et ε un nombre réel vérifiant $0 < \varepsilon \leq 1/5$. L'inégalité*

$$0 < \left(\prod_{\ell \in \mathcal{S}} |p|_\ell \cdot |q|_\ell \right) \cdot \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

possède au plus

$$e^{7s+26} \varepsilon^{-s-5} \log(6d) \cdot \log\bigl(\varepsilon^{-1} \log(6d)\bigr) \tag{6.2}$$

solutions rationnelles p/q (sous forme irréductible) telles que $q \geq \max\{4^{4/\varepsilon}, \sqrt{d+1}\, H\}$. En outre, si $\mathcal{S}$ est vide, alors (6.2) peut être remplacé par

$$2 \cdot 10^7\, \varepsilon^{-3} (\log \varepsilon^{-1})^2\, (\log 4d)\, (\log\log 4d). \tag{6.3}$$

À l'exception du théorème 3.1, les principaux résultats du présent article reposent sur une version quantitative du théorème du sous-espace, le théorème ES ci-dessous, que nous extrayons d'un article d'Evertse et Schlickewei [20]. Avant d'énoncer ce résultat, nous rappelons la définition de la hauteur d'un élément de $\mathbf{Z}^m$ et celle d'une forme linéaire à coefficients algébriques.

Soient $m \geq 2$ un entier et $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ un élément de $\mathbf{Z}^m$. La hauteur du point $\mathbf{x}$ est définie par

$$H(\mathbf{x}) = \max\{|x_1|, \ldots, |x_m|\}.$$

Rappelons que le vecteur $\mathbf{x}$ est primitif si ses coordonnées n'ont pas de diviseur premier en commun.

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ des éléments d'un même corps de nombres $\mathbf{K}$ de degré d. Si v est une place finie de $\mathbf{K}$ au-dessus du nombre premier ℓ, on note $|\cdot|_v$ la valeur absolue qui coïncide avec $|\cdot|_\ell$ sur $\mathbf{Q}$ et on pose $d_v = [\mathbf{K}_v : \mathbf{Q}_\ell]/[\mathbf{K} : \mathbf{Q}]$, où $\mathbf{K}_v$ est le complété de $\mathbf{K}$ à la place v. Si v est une place infinie de $\mathbf{K}$, on pose $d_v = 1/[\mathbf{K} : \mathbf{Q}]$ si v est une place réelle, et $d_v = 2/[\mathbf{K} : \mathbf{Q}]$ sinon.

La hauteur de la forme linéaire $L(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m$, notée $H(L)$, est définie par

$$H(L) = \prod_{v \in M_0(\mathbf{K})} (\max\{|\alpha_1|_v, \ldots, |\alpha_m|_v\})^{d_v} \cdot \prod_{v \in M_\infty(\mathbf{K})} (|\alpha_1|_v^2 + \ldots + |\alpha_m|_v^2)^{d_v/2}, \tag{6.4}$$

où $M_0(\mathbf{K})$ et $M_\infty(\mathbf{K})$ désignent respectivement l'ensemble des places finies et infinies de $\mathbf{K}$.

Le théorème ES est une conséquence du Theorem 3.1 d'Evertse et Schlickewei [20].

Théorème ES. *Soit $m \geq 2$ un entier. Soit $L_1, \ldots, L_m$ un système linéairement indépendant de formes linéaires en m variables et à coefficients algébriques réels et soit d le degré du corps de nombres engendré par leurs coefficients. On suppose en outre que*

$$det(L_1, \ldots, L_m) = \pm 1.$$

Soit H un majorant de la hauteur des formes linéaires $L_1, \ldots, L_m$. Soit ε un nombre réel vérifiant $0 < \varepsilon < 1$. Alors, l'ensemble des vecteurs $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ primitifs appartenant à $\mathbf{Z}^m$ qui sont solutions de l'inégalité

$$\prod_{i=1}^{m} |L_{i,\infty}(\mathbf{x})| < H(\mathbf{x})^{-\varepsilon}$$

et vérifient

$$H(\mathbf{x}) > \max\{m^{4m/\varepsilon}, H\}$$

se trouve dans une union finie d'au plus

$$(6m)^{2m}\, 2^{3(m+10)^2}\, \varepsilon^{-2m-4}\, (\log 4d)\, (\log\log 4d) \tag{6.5}$$

sous-espaces propres de $\mathbf{Q}^m$.

La qualité des mesures de transcendance que nous obtenons dans nos différents théorèmes dépend étroitement de la qualité de la dépendance en d dans (6.2), (6.3) et (6.5). De ce point de vue, le théorème EL est très satisfaisant, dans la mesure où le Theorem 4 de Mueller et Schmidt [30] entraîne qu'il est optimal au facteur $(\log\log 4d)$ près.

Dans la suite, nous aurons besoin de majorer la hauteur de certaines formes linéaires en fonction de la hauteur (naïve) de leurs coefficients. Dans ce but, nous rappelons ici une majoration très grossière, mais qui s'avère amplement suffisante.

Conservons les notations de la définition de hauteur donnée en (6.4). Observons que

$$\begin{aligned} H(L) &\le \prod_{v \in M_0(\mathbf{K})} \prod_{i=1}^{m} (\max\{|\alpha_i|_v, 1\})^{d_v} \cdot \prod_{v \in M_\infty(\mathbf{K})} m^{d_v/2} \prod_{i=1}^{m} (\max\{|\alpha_i|_v, 1\})^{d_v} \\ &\le m^{d/2} \prod_{i=1}^{m} \prod_{v \in M_0(\mathbf{K}) \cup M_\infty(\mathbf{K})} (\max\{|\alpha_i|_v, 1\})^{d_v} \\ &\le m^{d/2} \prod_{i=1}^{m} \exp\{d h(\alpha_i)\}, \end{aligned}$$

où h désigne la hauteur logarithmique de Weyl (voir l'ouvrage de Waldschmidt [41], page 75). Le Lemma 3.11 de cet ouvrage entraîne alors que

$$H(L) \le m^{d/2}\, (d+1)^{m/2} \prod_{i=1}^{m} H(\alpha_i). \tag{6.6}$$

Nous utiliserons également dans la suite la majoration de hauteur suivante. Soient α un nombre algébrique de degré d et $k \ge 2$ un entier. Couplé au fait que $h(\alpha^k) = k h(\alpha)$, le Lemma 3.11 de [41] implique que

$$H(\alpha^k) \le (d+1)^{k/2} 2^d H(\alpha)^k. \tag{6.7}$$

7. Résultats auxiliaires

Le lemme ci-dessous entraîne que les classifications de Mahler et Koksma, définies dans la partie 2, sont équivalentes. L'inégalité de gauche de (7.1) est un résultat de Wirsing [40], tandis que celle de droite est banale ([12], Proposition 3.2).

Lemme 7.1. *Soit $d \geq 1$ un entier. Pour tout nombre réel irrationnel ξ on a*

$$\frac{w_d(\xi)+1}{2} \leq w_d^*(\xi) \leq w_d(\xi). \tag{7.1}$$

En particulier, $w_d(\xi)$ est fini si, et seulement si, $w_d^*(\xi)$ est fini.

La version suivante de l'inégalité de Liouville découle du Corollary A.2 et du Theorem A.1 de [12].

Lemme 7.2. *Soient α et β deux nombres algébriques distincts, de degré m et n, respectivement. Soit $P(X)$ un polynôme de degré n à coefficients entiers tel que $P(\alpha) \neq 0$. Il existe alors une constante $c(m,n)$, ne dépendant que de m et n, telle que*

$$|\alpha - \beta| \geq c(m,n)\, 2^{-m-n}\, H(\alpha)^{-n}\, H(\beta)^{-m},$$

et

$$|P(\alpha)| \geq c(m,n)\, H(\alpha)^{-n}\, H(P)^{-m+1}.$$

Le choix $c(m,n) = (m+1)^{-n-1}\,(n+1)^{-m-1}$ convient.

Le lemme 7.3 montre que si l'on dispose d'une suite « dense » de polynômes de degré au plus r prenant des petites valeurs au point ξ, alors le nombre réel ξ ne peut pas être trop bien approché par des nombres algébriques de degré au plus r.

Lemme 7.3. *Soit $r \geq 1$ un entier. Soient ξ un nombre réel et $(P_n(X))_{n \geq 1}$ une suite de polynômes à coefficients entiers, deux à deux distincts, et de degré au plus r. Supposons qu'il existe un nombre réel $s > 1$ tel que*

$$|P_n(\xi)| < H(P_n)^{-r}, \quad n \geq 1,$$

et

$$H(P_{n-1}) \leq H(P_n) < H(P_{n-1})^s, \quad n \geq 1.$$

Supposons en outre que l'une des conditions suivantes est satisfaite :

(i) les polynômes $P_n(X)$, $n \geq 1$, sont irréductibles et primitifs;
(ii) il existe $w > 0$ tel que $|P_n(\xi)| > H(P_n)^{-w}$ pour tout n.

Alors, $w_r(\xi)$ est fini.

La démonstration du lemme montre qu'il reste vrai sous des hypothèses plus faibles que (*i*) ou (*ii*). Toutefois, sa conclusion est fausse si les polynômes $P_n(X)$ ont de nombreuses racines en commun, comme l'illustre l'exemple suivant. Posons $\xi = \sum_{n\geq 1} 10^{-n!}$ et, pour tout entier $N \geq 15$, considérons le polynôme

$$Q_N(X) = 10^{N!}X - \sum_{n=1}^{N} 10^{N!-n!}.$$

On vérifie facilement que

$$|Q_N(\xi)| \asymp 10^{-N\cdot N!} \quad \text{et} \quad H(Q_N) \asymp 10^{N!},$$

où la notation $A \asymp B$ signifie qu'il existe des constantes numériques absolues c_1 et c_2 strictement positives telles que $c_1 A \leq B \leq c_2 A$. Pour tous entiers $j \geq 0$ et $N \geq 15$, posons $P_{j,N}(X) = (10^j X + 1)Q_N(X)$ et observons que

$$H(P_{j,N}) \asymp 10^{j+N!} \quad \text{et} \quad |P_{j,N}(\xi)| \asymp 10^{j-N\cdot N!} \asymp H(P_{j,N})^{-(N\cdot N!-j)/(j+N!)}.$$

En particulier, pour $j \leq N \cdot N!/5$, on obtient $|P_{j,N}(\xi)| < H(P_{j,N})^{-3}$ et $H(P_{j,N}) \leq 10^{(1+N/5)N!}$. Comme $H(Q_{N+1}) \asymp 10^{(N+1)!}$, on peut facilement extraire une sous-suite de polynômes de la suite $(P_{j,N}(X))_{j\geq 0, N\geq 1}$ vérifiant les hypothèses (à l'exception de (i) ou (ii)) du lemme 7.3 avec $r = 2$ et $s = 6$. Cependant, ξ est un nombre de Liouville.

Démonstration du lemme 7.3. Dans ce qui suit, les constantes sous-entendues dans $\ll$ et $\gg$ ne dépendent que de r. Soit α un nombre algébrique réel de degré au plus égal à r et de hauteur au moins égale à $H(P_1)$. Soit n_α le plus petit entier tel que

$$H(P_{n_\alpha}) \geq 2\,(r+1)^{2(r+1)}\,H(\alpha)^r. \tag{7.2}$$

On a en particulier $n_\alpha \geq 2$ et

$$H(\alpha) \gg H(P_{n_\alpha})^{1/(rs)}. \tag{7.3}$$

Supposons dans un premier temps que $P_{n_\alpha}(\alpha)$ n'est pas nul. Le lemme 7.2 et (7.2) entraînent alors que

$$|P_{n_\alpha}(\alpha)| \geq (r+1)^{-2(r+1)}\,H(\alpha)^{-r}\,H(P_{n_\alpha})^{-r+1} \geq 2H(P_{n_\alpha})^{-r} > 2|P_{n_\alpha}(\xi)|, \tag{7.4}$$

et le théorème des accroissements finis implique

$$|\xi - \alpha| \cdot H(P_{n_\alpha}) \gg |P_{n_\alpha}(\xi) - P_{n_\alpha}(\alpha)| \geq |P_{n_\alpha}(\alpha)|/2,$$

d'où

$$|\xi - \alpha| \gg |P_{n_\alpha}(\alpha)| \cdot H(P_{n_\alpha})^{-1} \gg H(\alpha)^{-r}\,H(P_{n_\alpha})^{-r} \gg H(\alpha)^{-r-r^2 s}, \tag{7.5}$$

par (7.3) et (7.4).

Si $P_{n_\alpha}(\alpha)$ est non nul pour tout nombre algébrique réel α de degré au plus égal à r et de hauteur au moins égale à $H(P_1)$, et tel est le cas si la condition (i) est satisfaite, alors la finitude de $w_r(\xi)$ découle de (7.5) et du lemme 7.1.

Si la condition (ii) est satisfaite mais que la condition (i) ne l'est pas, alors il existe un ou plusieurs nombres algébriques réels α de degré au plus égal à r et de hauteur au moins égale à $H(P_1)$ tels que $P_{n_\alpha}(\alpha) = 0$. Dans ce dernier cas, l'hypothèse (ii) et le théorème des accroissements finis entraînent, pour un tel nombre α, la minoration

$$|\xi - \alpha| \cdot H(P_{n_\alpha}) \gg |P_{n_\alpha}(\xi) - P_{n_\alpha}(\alpha)| = |P_{n_\alpha}(\xi)| \gg H(P_{n_\alpha})^{-w},$$

et donc

$$|\xi - \alpha| \gg H(\alpha)^{-rs(w+1)}, \tag{7.6}$$

par (7.3). Les minorations (7.5) et (7.6) et le lemme 7.1 impliquent alors la finitude de $w_r(\xi)$. Ceci achève la démonstration du lemme. □

Rappelons que la hauteur d'un vecteur de $\mathbf{Z}^n$ est le maximum des valeurs absolues de ces coefficients et que la hauteur d'un hyperplan de $\mathbf{Q}^n$ déquation $y_1x_1 + \ldots + y_nx_n = 0$, où $y_1, \ldots, y_n$ sont des entiers non tous nuls et sans diviseur premier commun, est égale au maximum des valeurs absolues de $y_1, \ldots, y_n$.

Étant donnés des vecteurs $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ de $\mathbf{Z}^n$, on note $rang(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ la dimension du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel engendré par ces vecteurs.

Lemme 7.4. *Soient n et N deux entiers tels que $N > n$, et $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_N$ des vecteurs non nuls de $\mathbf{Z}^n$ tels que*

$$H(\mathbf{p}_1) \leq H(\mathbf{p}_2) \leq \ldots \leq H(\mathbf{p}_N)$$

et

$$rang(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_N) < n.$$

Alors, il existe des entiers j et l avec $j \geq 1$, $j + l - 1 \leq N$ et $l \geq N/n$, et tels que les points $\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_{j+1}, \ldots, \mathbf{p}_{j+l-1}$ appartiennent à un même hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathbf{Q}^n$ vérifiant

$$H(\mathcal{H}) \leq n! H(\mathbf{p}_j)^n.$$

Pour démontrer le lemme 7.4, nous avons besoin du résultat suivant, dont nous omettons la démonstration.

Lemme 7.5. *Soient r et n deux entiers tels que $r < n$. Supposons qu'il existe des vecteurs linéairement indépendants $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_r$ appartenant à $\mathbf{Z}^n$ et tels que $H(\mathbf{p}_1) \leq H(\mathbf{p}_2) \leq \ldots \leq H(\mathbf{p}_r)$. Alors, il existe un hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathbf{Q}^n$ contenant ces points entiers et tel que*

$$H(\mathcal{H}) \leq r!\, H(\mathbf{p}_r)^r.$$

Démonstration du lemme 7.4. Posons $b = \lfloor N/n \rfloor$. La fonction f qui, à un entier $k = 1, \ldots, n$, associe le rang sur $\mathbf{Q}$ de la famille de vecteurs $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_{kb}\}$ est croissante et à valeurs entières, comprises entre 1 et $n - 1$. Il existe donc un entier k tel que $1 \leq k \leq n - 1$ et $f(k) = f(k+1)$, donc tel que

$$rang(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_{kb}) = rang(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_{(k+1)b}) =: r < n.$$

Il existe ainsi des entiers $1 \le i_1 \le \ldots \le i_r \le kb$ tels que les vecteurs $\mathbf{p}_{i_1}, \ldots, \mathbf{p}_{i_r}$ forment une famille génératrice de la famille $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_{(k+1)b}\}$. D'autre part, la suite $(H(\mathbf{p}_{i_j}))_{1 \le j \le r}$ étant par hypothèse croissante, le lemme 7.5 implique que les vecteurs $\mathbf{p}_{i_1}, \mathbf{p}_{i_2}, \ldots, \mathbf{p}_{i_r}$ appartiennent à un même hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathbf{Q}^n$ dont la hauteur est majorée par $r!\, H(\mathbf{p}_{i_r})^r$. Il suffit alors de poser $j = i_r$

et $l = b + 1$ pour obtenir le résultat souhaité. □

8. Démonstrations des théorèmes 4.1 et 4.2

Avant de démontrer les théorèmes 4.1 et 4.2, nous discutons brièvement une remarque qui suit l'énoncé du théorème B. Nous conservons les hypothèses de ce théorème, à ceci près que nous ne supposons plus les rationnels p_n/q_n écrits sous forme irréductible. Pour $n \ge 1$, notons d_n le plus grand diviseur commun à p_n et q_n. Alors,

$$0 < \left| \xi - \frac{p_n/d_n}{q_n/d_n} \right| < \frac{1}{q_n^{2+\varepsilon}} = \frac{1}{d_n^{2+\varepsilon}\,(q_n/d_n)^{2+\varepsilon}},$$

et deux situations distinctes peuvent se produire. Ou bien, pour tout nombre réel w, il existe n tel que $d_n > (q_n/d_n)^w$, et alors ξ est un nombre de Liouville. Ou bien il existe un nombre réel κ tel que $d_n < (q_n/d_n)^\kappa$ pour tout $n \ge 1$. Dans ce cas, il existe une suite $(n_j)_{j \ge 1}$ d'entiers positifs strictement croissante telle que

$$\limsup_{j \to +\infty} \frac{\log(q_{n_{j+1}}/d_{n_{j+1}})}{\log(q_{n_j}/d_{n_j})} < +\infty,$$

et nous sommes ramenés au théorème B.

L'inégalité ci-dessus se justifie de la manière suivante. Quitte au besoin à extraire une sous-suite de la suite $(p_n/q_n)_{n \ge 1}$, on peut supposer que $q_{n+1} \ge q_n^2$ pour tout $n \ge 1$. Soient n et j des entiers strictement positifs tels que $q_{n+j}/d_{n+j} = q_n/d_n$. De l'inégalité $q_{n+j} \ge q_n^{2^j}$, on déduit

$$\frac{q_n}{d_n} = \frac{q_{n+j}}{d_{n+j}} \ge \frac{d_n^{2^j}}{d_{n+j}} \cdot \left(\frac{q_n}{d_n}\right)^{2^j},$$

d'où $d_{n+j} \ge (q_{n+j}/d_{n+j})^{2^j - 1}$ et la majoration $2^j \le \kappa + 1$. Les nombres rationnels p_n/q_n et p_{n+j}/q_{n+j} sont donc différents si j est assez grand.

Notre stratégie est la suivante. Nous généralisons la démonstration du théorème 3.1 afin de contrôler la qualité de l'approximation des nombres réels, vérifiant les hypothèses du théorème 4.1 ou celles du théorème 4.2, par des nombres algébriques de degré au moins $r + 1$.

À cet effet, il est commode de définir de nouveaux exposants d'approximation diophantienne, à savoir les fonctions w_d^{ex}, où l'exposant $^{\text{ex}}$ signifie que l'on se restreint à l'approximation par des nombres algébriques de degré exactement égal à d. Pour alléger la notation, nous omettons le symbole * qui fait habituellement référence à la classification de Koksma.

Démonstration du théorème 4.1. Nous conservons les notations de l'énoncé du théorème 4.1 et supposons que $0 < \xi < 1$. Soit α un nombre algébrique réel de degré $d > r$ de hauteur suffisamment grande. On suppose en outre $\varepsilon < 1/2$ et

$$H(\alpha) > (r+1)^{8(r+1)/\varepsilon}. \tag{8.1}$$

Notons tout d'abord que l'inégalité (4.1) permet, quitte à extraire une sous-suite de la suite $(q_n)_{n\geq 1}$, de supposer qu'il existe un nombre entier C indépendant de d tel que

$$2\log q_n < \log q_{n+1} < C \log q_n, \tag{8.2}$$

pour tout entier $n \geq 1$.

Définissons le nombre réel χ par

$$|\xi - \alpha| = H(\alpha)^{-\chi}.$$

Notons n_0 l'entier déterminé par les inégalités

$$q_{n_0} \leq H(\alpha) < q_{n_0+1}. \tag{8.3}$$

Notons M_0 le plus petit entier pair au moins égal à 2 tel que

$$q_{n_0}^{2^{M_0/2}} > \max\{H(\alpha^k X_0 - X_k), 1 \leq k \leq r\}. \tag{8.4}$$

On suppose que χ excède $\log(1/\|\xi\|)$, ce qui implique d'après (8.1) que $0 < \alpha < 1$. On suppose en outre que

$$\chi > C^{M_0}(2+\varepsilon). \tag{8.5}$$

Cela ne cause aucune perte de généralité puisque, d'après (6.6) et (6.7), il existe une constante c_r, ne dépendant que de r, telle que

$$M_0 < c_r \log d.$$

Soit M le plus grand entier pair tel que

$$q_{n_0}^{\chi} > q_{n_0+M}^{2+\varepsilon},$$

de sorte que

$$\chi \leq C^{M+2}(2+\varepsilon). \tag{8.6}$$

Les inégalités (8.2) et (8.5) assurent que M est au moins égal à M_0.

Nous allons majorer M en fonction de d et ainsi, compte tenu de (8.6), majorer χ en fonction de d.

Pour tous entiers $j = 1, \dots, M$ et $k = 1, \dots, r$, on obtient

$$\begin{aligned}\|q_{n_0+j}\alpha^k\| &\leq \|q_{n_0+j}\xi^k\| + \|q_{n_0+j}(\xi^k - \alpha^k)\| \leq \|q_{n_0+j}\xi^k\| + \frac{k(|\xi|+1)}{q_{n_0+j}^{1+\varepsilon}} \\ &\leq \max\left\{2\|q_{n_0+j}\xi^k\|,\ \frac{4k}{q_{n_0+j}^{1+\varepsilon}}\right\},\end{aligned}$$

d'où, d'après (8.1) et (8.3),

$$\|q_{n_0+j}\alpha\| \cdot \|q_{n_0+j}\alpha^2\| \dots \|q_{n_0+j}\alpha^r\| < \frac{\max\{2^{r+1}, 4r\}}{q_{n_0+j}^{1+\varepsilon}} = \frac{2^{r+1}}{q_{n_0+j}^{1+\varepsilon}} < \frac{1}{q_{n_0+j}^{1+\varepsilon/2}}. \tag{8.7}$$

Étant donné un entier n, il existe des entiers $p_{k,n}$, $1 \leq k \leq r$ vérifiant $\|q_n\alpha^k\| = |q_n\alpha^k - p_{k,n}|$, et donc

$$\left|\alpha^k - \frac{p_{k,n}}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n}, \quad 1 \leq k \leq r. \tag{8.8}$$

Considérons les formes linéaires

$$L_0(X_0, X_1, \dots, X_r) = X_0$$

et

$$L_k(X_0, X_1, \dots, X_r) = \alpha^k X_0 - X_k, \quad \text{pour } k = 1, \dots, r.$$

Pour $n \geq 1$, posons $\mathbf{p}_n := (q_n, p_{1,n}, p_{2,n}, \dots, p_{r,n})$. Le raisonnement tenu au début de cette partie montre qu'ou bien $w_r(\xi) = +\infty$, ou bien, quitte à extraire une sous-suite de la suite $(q_n)_{n\geq 1}$ et à modifier la constante C de (8.2), tous les vecteurs $\mathbf{p}_n$ sont primitifs. Nous nous plaçons désormais sous cette dernière hypothèse.

D'après (8.8) et le fait que $0 < \alpha < 1$, on peut choisir $H(\alpha)$ suffisamment grande pour que

$$H(\mathbf{p}_n) = q_n \tag{8.9}$$

pour $n \geq n_0$. L'inégalité (8.2) implique alors que la suite $(H(\mathbf{p}_n))_{n\geq n_0}$ est strictement croissante. Posons $\mathcal{N}_1 := \{\mathbf{p}_n,\ n_0 + M/2 \leq n \leq n_0 + M\}$ et notons M_1 le cardinal de $\mathcal{N}_1$. Ainsi,

$$M_1 \geq M/2. \tag{8.10}$$

De (8.7) et (8.9) découle l'inégalité

$$\prod_{k=0}^{r} |L_k(\mathbf{p}_n)| < H(\mathbf{p}_n)^{-\varepsilon/2}.$$

Comme M est au moins égal à M_0, nous déduisons de (8.4) que

$$q_{n_0+M/2} > \max\{H(L_k), 0 \leq k \leq r\}.$$

Ainsi, $H(\mathbf{p}_n) > \max\{H(L_k) : 0 \leq k \leq r\}$ pour tout $n \in \mathcal{N}_1$, et nous pouvons donc appliquer le théorème ES avec $m = r+1$. Notons T le majorant du nombre de sous-espaces donné par le théorème ES et posons $t := \lfloor M_1/T \rfloor$. D'après (8.1) et le théorème ES, il existe une constante $c_{r,\varepsilon} > 1$, ne dépendant que de r et ε, et telle que

$$T < c_{r,\varepsilon}(\log 3d)\,(\log\log 3d). \tag{8.11}$$

Le principe des tiroirs assure l'existence d'un sous-espace propre de $\mathbf{Q}^{r+1}$ contenant au moins t points de $\mathcal{N}_1$. Cela signifie qu'il existe un vecteur non nul $\mathbf{y} := (y_0, y_1, \ldots, y_r) \in \mathbf{Z}^{r+1}$ et un ensemble d'entiers $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{N}_1$, de cardinal t, tels que

$$y_0 q_n + y_1 p_{1,n} + \ldots + y_r p_{r,n} = 0, \tag{8.12}$$

pour tout $n \in \mathcal{N}_2$. Notons $i_1 < i_2 < \ldots < i_t$ les éléments de $\mathcal{N}_2$ une fois ordonnés.

Si $t \leq r+1$, on obtient $M < 2(r+2)T$, ce qui termine la démonstration d'après (8.11). Nous supposons donc dans la suite que $t > r+1$. D'après (8.12), le rang de la famille $\{\mathbf{p}_{i_h},\ 1 \leq h \leq t\}$ est strictement inférieur à $r+1$. Comme $t > r+1$, le lemme 7.4 implique l'existence d'entiers $j_1 < \ldots < j_l$ appartenant à $\mathcal{N}_2$ et vérifiant

$$l \geq \frac{t}{r+1} = \frac{\lfloor M_1/T \rfloor}{r+1}, \tag{8.13}$$

et d'un vecteur primitif non nul $\mathbf{y}' := (y'_0, y'_1, \ldots, y'_r) \in \mathbf{Z}^{r+1}$ tel que

$$y'_0 q_n + y'_1 p_{1,n} + \ldots + y'_r p_{r,n} = 0, \tag{8.14}$$

pour tout $n \in \mathcal{N}_3 := \{j_h,\ 1 \leq h \leq l\}$, et vérifiant

$$H(\mathbf{y}') \leq (r+1)!\, H(\mathbf{p}_{j_1})^{r+1} = (r+1)!\, q_{j_1}^{r+1}. \tag{8.15}$$

Considérons à présent le polynôme $P(X) := \sum_{k=0}^{r} y'_k X^k$. D'après (8.1), (8.8), (8.14) et (8.15), il vient pour tout $n \in \mathcal{N}_3$

$$|P(\alpha)| = \left| \sum_{k=1}^{r} y'_k \left(\alpha^k - \frac{p_{k,n}}{q_n} \right) \right| \leq \frac{r(r+1)!\, q_{j_1}^{r+1}}{q_n} < \frac{q_{j_1}^{r+2}}{q_n}.$$

En particulier, comme j_l appartient à $\mathcal{N}_3$, on obtient

$$|P(\alpha)| \leq \frac{q_{j_1}^{r+2}}{q_{j_l}}. \tag{8.16}$$

Par hypothèse, le degré de α est strictement supérieur à r, donc le nombre réel $P(\alpha)$ n'est pas nul, et le lemme 7.2, (8.2), (8.3) et (8.15) impliquent alors que

$$\begin{aligned} |P(\alpha)| \gg H(\alpha)^{-r}\, H(P)^{-d+1} &= H(\alpha)^{-r}\, H(\mathbf{y}')^{-d+1} \\ &\gg H(\alpha)^{-r}\, q_{j_1}^{-(r+1)(d-1)} \gg q_{j_1}^{-d(r+1)}, \end{aligned} \tag{8.17}$$

Il découle alors des inégalités (8.2), (8.16) et (8.17) qu'il existe une constante B indépendante de d et telle que

$$l \leq B \log d.$$

Puis en utilisant (8.10), (8.11) et (8.13), il vient

$$M < c\,(\log 3d)^2\,(\log\log 3d),$$

où $c := 2((r+1)B+1)c_{r,\varepsilon}$ ne dépend pas de d. D'après l'inégalité (8.6), ceci entraîne que

$$w_d^{\mathrm{ex}}(\xi) \leq \exp\{c'(\log 3d)^2(\log\log 3d)\},$$

où c', et c'' ci-dessous, sont des constantes indépendantes de d.

Nous pouvons à présent conclure cette démonstration. Ou bien $w_r^*(\xi)$ est fini, et nous obtenons d'après l'inégalité précédente la mesure de transcendance

$$w_d^*(\xi) \leq \exp\{c''(\log 3d)^2(\log\log 3d)\}, \quad (d \geq 1),$$

ou bien $w_r^*(\xi)$ est infini, et alors il existe un entier ℓ vérifiant $1 \leq \ell \leq r$ tel que ξ est un U_ℓ-nombre. □

Avant d'aborder la démonstration du théorème 4.2, nous établissons une proposition auxiliaire.

Proposition 8.1. *Soient M et r deux entiers strictement positifs, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des nombres algébriques réels linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$. Notons L_0 la forme linéaire définie par $L_0(X_0, X_1, \ldots, X_r) := \sum_{j=0}^{r} \alpha_j X_j$ et soit $d \geq 2$ un majorant de $[\mathbf{Q}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r) : \mathbf{Q}]$. Supposons qu'il existe une suite de vecteurs primitifs $(\mathbf{x}_n)_{1\leq n\leq M}$ appartenant à $\mathbf{Z}^{r+1}$ et des nombres réels $a > 1$ et $\varepsilon > 0$ tels que :*

(i) $H(\mathbf{x}_1) > H(L_0)$ *et* $H(\mathbf{x}_1) > H(\alpha_j)$, $0 \leq j \leq r$,

(ii) $\log H(\mathbf{x}_{n+1}) > a \log H(\mathbf{x}_n), \quad 1 \leq n \leq M-1,$

(iii) $|L_0(\mathbf{x}_n)| < H(\mathbf{x}_n)^{-r-\varepsilon}, \quad 1 \leq n \leq M.$

Alors il existe une constante C ne dépendant que des paramètres r, ε et a telle que

$$M < C(\log 3d)^r\,(\log\log 3d)^r.$$

Démonstration de la proposition 8.1. Nous allons raisonner par récurrence sur l'entier r. Pour $r = 1$, il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème EL.

Soit $r \geq 2$ un entier tel que la conclusion de la proposition 8.1 est vraie pour $k = 1, \ldots, r-1$. Soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des nombres algébriques qui vérifient les hypothèses de la proposition 8.1.

Pour tout entier $n = 1, \ldots, M$, posons $\mathbf{x}_n := (x_{0,n}, x_{1,n}, \ldots, x_{r,n})$. Nous supposons également, ce qui ne cause aucune perte de généralité, que

$$H(\mathbf{x}_1) > 4^d((r+1)!)^2. \tag{8.18}$$

Considérons à présent les formes linéaires

$$L_k(X_0, X_1, \ldots, X_r) := X_k, \quad \text{pour } k = 1, \ldots, r.$$

Posons $\mathcal{N}_1 := \{\mathbf{x}_n,\ 1 \leq n \leq M\}$. D'après (iii), il vient

$$\prod_{k=0}^{r} |L_k(\mathbf{x}_n)| < H(\mathbf{x}_n)^{-\varepsilon}$$

pour tout $n \in \mathcal{N}_1$. De plus, les conditions (i) et (ii) impliquent que $H(\mathbf{x}_n) > H(L_k)$, pour $k = 0, \ldots, r$ et $n \in \mathcal{N}_1$.

Nous pouvons donc appliquer le théorème ES. Notons T le majorant du nombre de sous-espaces donné par ce théorème et posons $m := \lfloor M/T \rfloor$. Il existe une constante $c_{r,\varepsilon}$ ne dépendant que de r et ε et telle que

$$T < c_{r,\varepsilon} (\log 3d)\,(\log\log 3d). \tag{8.19}$$

Le principe des tiroirs assure alors l'existence d'un sous-espace propre de $\mathbf{Q}^{r+1}$ contenant au moins m points de $\mathcal{N}_1$. Cela signifie qu'il existe un vecteur non nul $\mathbf{y} := (y_0, y_1, \ldots, y_r) \in \mathbf{Z}^{r+1}$ et un ensemble d'entiers $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{N}_1$, de cardinal m, tel que

$$y_0 x_{0,n} + y_1 x_{1,n} + \ldots + y_r x_{r,n} = 0, \tag{8.20}$$

pour tout $n \in \mathcal{N}_2$. Notons $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$ les éléments de $\mathcal{N}_2$ une fois ordonnés.

Si $m \leq r + 1$, on obtient $M < (r + 2)T$, ce qui termine la démonstration d'après (8.19). Nous supposons donc dans la suite $m > r + 1$. D'après (8.20), le rang de la famille $\{\mathbf{x}_{i_h},\ 1 \leq h \leq m\}$ est strictement inférieur à $r + 1$. Comme $m > r + 1$, le lemme 7.4 implique l'existence d'un entier s et d'éléments $j_1 < j_2 < \ldots < j_s$ de $\mathcal{N}_2$ tels que

$$s \geq \frac{m}{r+1} = \frac{\lfloor M/T \rfloor}{r+1}, \tag{8.21}$$

et d'un vecteur non nul $\mathbf{z} := (z_0, z_1, \ldots, z_r) \in \mathbf{Z}^{r+1}$ tel que

$$z_0 x_{0,n} + z_1 x_{1,n} + \ldots + z_r x_{r,n} = 0, \tag{8.22}$$

pour tout $n \in \mathcal{N}_3 := \{j_h,\ 1 \leq h \leq s\}$, et vérifiant

$$\max\{|z_k|,\ 0 \leq k \leq r\} \leq (r+1)!\, H(\mathbf{x}_{j_1})^{r+1}.$$

D'après (8.18), il vient

$$\max\{|z_k|,\ 0 \leq k \leq r\} < H(\mathbf{x}_{j_1})^{r+2}. \tag{8.23}$$

Nous supposons dans la suite que

$$s > 2 + 2\frac{\log(4(r+4)rd)}{\log a} + 2\frac{|\log(a-1)|}{\log a}. \tag{8.24}$$

En effet, dans le cas contraire, l'inégalité (8.21) implique $\lfloor M/T \rfloor \leq (r+1)s$ et donc $M < ((r+1)s+1)T$, ce qui termine la démonstration d'après (8.19) et (8.24).

Sans restriction, on peut supposer que z_r n'est pas nul. Pour $j = 0, \ldots, r-1$, posons $\alpha'_j := z_j \alpha_r - z_r \alpha_j$. Introduisons à présent l'ensemble d'entiers $\mathcal{N}_4 \subset \mathcal{N}_3$ défini par $\mathcal{N}_4 := \{j_h,\ \lfloor s/2 \rfloor \leq h \leq s\}$. Notons $k_1 < k_2 < \ldots < k_t$ les éléments de $\mathcal{N}_4$ une fois ordonnés, et observons que

$$t \geq s/2. \tag{8.25}$$

Pour $n \in \mathcal{N}_4$, posons $\mathbf{x}'_n := (x_{0,n}, \ldots, x_{r-1,n}) \in \mathbf{Z}^r$ et choisissons $\mathbf{x}''_n$ un vecteur primitif colinéaire à $\mathbf{x}'_n$. Notons également $L'(X_0, \ldots, X_{r-1}) := \sum_{j=0}^{r-1} \alpha'_j X_j$.

Nous allons montrer que les nombres algébrique $\alpha'_0, \ldots, \alpha'_{r-1}$ vérifient les hypothèses de la proposition avec $\varepsilon' = 1/2$ et $a' = (1+a)/2$ et la suite de vecteurs $\mathbf{x}''_{k_1}, \mathbf{x}''_{k_2}, \ldots \mathbf{x}''_{k_t}$. L'hypothèse de récurrence nous permettra alors de majorer t, puis M, comme souhaité.

Vérifions tout d'abord que la condition (i) est satisfaite. Un rapide calcul montre que

$$H(z_j \alpha_r - z_r \alpha_j) \leq \big(4 \max\{|z_i|,\ 0 \leq i \leq r\}^2 H(\alpha_r) H(\alpha_j)\big)^d,$$

et donc, en utilisant (8.18) et (8.23), on obtient

$$H(\alpha'_j) < 4^d H(\mathbf{x}_{j_1})^{2(r+2)+2d} < H(\mathbf{x}_{j_1})^{2(r+3)d}, \tag{8.26}$$

pour tout entier $j = 0, \ldots, r-1$.

On déduit alors de (6.6) et (8.18) que

$$H(L') < r^{d/2}(d+1)^{r/2} H(\mathbf{x}_{j_1})^{2(r+3)rd} < H(\mathbf{x}_{j_1})^{2(r+4)rd}. \tag{8.27}$$

Soit $n \in \mathcal{N}_4$. Si rien ne garantit que le vecteur $\mathbf{x}'_n$ est primitif, (8.22) et (8.23) entraînent que le plus grand diviseur commun aux coordonnées de $\mathbf{x}'_n$ n'excède pas $H(\mathbf{x}_{j_1})^{r+2}$. Ainsi,

$$H(\mathbf{x}''_n) \geq \frac{H(\mathbf{x}'_n)}{H(\mathbf{x}_{j_1})^{r+2}}. \tag{8.28}$$

Notons également que

$$H(\mathbf{x}_n) < H(\mathbf{x}_{j_1})^{r+3}\, H(\mathbf{x}'_n). \tag{8.29}$$

En effet, comme z_r n'est pas nul, il découle de (8.22), (8.23) et (8.18) que

$$\begin{aligned} |x_{r,n}| &= \left| \frac{z_0 x_{0,n} + \ldots + z_{r-1} x_{r-1,n}}{z_r} \right| \\ &< r H(\mathbf{x}_{j_1})^{r+2} \max\{|x_{0,n}|, \ldots, |x_{r-1,n}|\} \\ &< H(\mathbf{x}_{j_1})^{r+3}\, H(\mathbf{x}'_n). \end{aligned}$$

D'après (8.28) et (8.29), il vient

$$H(\mathbf{x}''_n) \geq \frac{H(\mathbf{x}_n)}{H(\mathbf{x}_{j_1})^{2r+5}}. \tag{8.30}$$

Puisque $k_1 \in \mathcal{N}_4$ et $k_1 \geq j_{\lfloor s/2 \rfloor}$, (8.24) implique que

$$H(\mathbf{x}_{k_1}) \geq H(\mathbf{x}_{j_1})^{4(r+4)rd},$$

et donc, en combinant (8.26), (8.27) et (8.30),

$$H(\mathbf{x}''_{k_1}) > \max\left\{H(L'), H(\alpha'_0), H(\alpha'_1), \ldots, H(\alpha'_{r-1})\right\}, \tag{8.31}$$

ce qui montre que la condition (i) est bien vérifiée.

Montrons à présent que la suite de vecteurs $\mathbf{x}''_{k_1}, \mathbf{x}''_{k_2}, \ldots, \mathbf{x}''_{k_t}$ vérifie la condition (ii) de la proposition avec $a' = (1+a)/2 > 1$. Pour $n = 1, \ldots, t-1$, (8.30) et le fait que $H(\mathbf{x}''_n) \leq H(\mathbf{x}_n)$ impliquent que

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}''_{k_{n+1}}) &\geq \frac{H(\mathbf{x}_{k_{n+1}})}{H(\mathbf{x}_{j_1})^{2r+5}} > \frac{H(\mathbf{x}_{k_n})^a}{H(\mathbf{x}_{j_1})^{2r+5}} \\ &\geq H(\mathbf{x}''_{k_n})^{(1+a)/2} \cdot \frac{H(\mathbf{x}_{k_n})^{(a-1)/2}}{H(\mathbf{x}_{j_1})^{2r+5}} \\ &\geq H(\mathbf{x}''_{k_n})^{(1+a)/2} \cdot \frac{H(\mathbf{x}_{j_{\lfloor s/2 \rfloor}})^{(a-1)/2}}{H(\mathbf{x}_{j_1})^{2r+5}}. \end{aligned}$$

En utilisant (8.24), on obtient ainsi

$$\log H(\mathbf{x}''_{k_{n+1}}) > \frac{1+a}{2} \cdot \log H(\mathbf{x}''_{k_n}), \quad 1 \leq n \leq t-1, \tag{8.32}$$

comme annoncé.

Montrons enfin que la suite de vecteurs $\mathbf{x}''_{k_1}, \mathbf{x}''_{k_2}, \ldots, \mathbf{x}''_{k_t}$ vérifie la condiiton (iii) de la proposition avec $\varepsilon' := 1/2$. Soit $n \in \mathcal{N}_4$. D'après (8.22), on a

$$\left|x_{0,n}\alpha'_0 + \ldots + x_{r-1,n}\alpha'_{r-1}\right| = |z_r| \cdot |x_{0,n}\alpha_0 + \ldots + x_{r,n}\alpha_r|.$$

Ainsi les inégalités (8.23) et le fait que par hypothèse $|L_0(\mathbf{x}_n)| < H(\mathbf{x}_n)^{-r-\varepsilon}$ impliquent que

$$\left|x_{0,n}\alpha'_0 + \ldots + x_{r-1,n}\alpha'_{r-1}\right| < H(\mathbf{x}_{j_1})^{r+2}\, H(\mathbf{x}_n)^{-r-\varepsilon}.$$

Comme $H(\mathbf{x}''_n) \leq H(\mathbf{x}_n)$, il vient

$$\left|x_{0,n}\alpha'_0 + \ldots + x_{r-1,n}\alpha'_{r-1}\right| < \left(H(\mathbf{x}_{j_1})^{r+2}\, H(\mathbf{x}_n)^{-1/2-\varepsilon}\right) H(\mathbf{x}''_n)^{-(r-1)-1/2}. \tag{8.33}$$

Puisque n appartient $\mathcal{N}_4$, on a $n \geq \lfloor s/2 \rfloor$ et donc

$$H(\mathbf{x}_n)^{1/2} > H(\mathbf{x}_{j_1})^{(1/2)a^{\lfloor s/2 \rfloor}}.$$

On déduit alors de (8.24) que

$$H(\mathbf{x}_n)^{1/2} > H(\mathbf{x}_{j_1})^{r+2},$$

ce qui, d'après (8.33), donne

$$\left|x_{0,n}\alpha'_0 + \ldots + x_{r-1,n}\alpha'_{r-1}\right| < H(\mathbf{x}''_n)^{-(r-1)-1/2}.$$

Ainsi, on obtient bien

$$|L'(\mathbf{x}''_{k_n})| < H(\mathbf{x}''_{k_n})^{-(r-1)-1/2}, \quad 1 \le n \le t, \tag{8.34}$$

comme souhaité.

On vérifie de plus aisément que les α'_j, $0 \le j \le r-1$, sont des nombres algébriques réels linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$ et que $[\mathbf{Q}(\alpha'_0, \ldots, \alpha'_{r-1}) : \mathbf{Q}] \le d$.

D'après (8.31), (8.32) et (8.34), les vecteurs $\mathbf{x}''_{k_1}, \mathbf{x}''_{k_2}, \ldots, \mathbf{x}''_{k_t}$ satisfont aux hypothèses de la propostion avec les paramètres $r' := r-1$, $\varepsilon' := 1/2$ et $a' := (1+a)/2$. L'hypothèse de récurrence assure donc l'existence d'une constante A, ne dépendant que des paramètres r et a, telle que

$$t < A(\log 3d)^{r-1} (\log\log 3d)^{r-1}.$$

Les inégalités (8.19), (8.21) et (8.25) donnent alors la majoration souhaitée pour M, à savoir

$$M < C(\log 3d)^r (\log\log 3d)^r,$$

où $C := (2(r+1)A+1)c_{r,\varepsilon}$. Cela termine cette démonstration. □

Nous pouvons à présent démontrer le théorème 4.2.

Démonstration du théorème 4.2. Elle découle de la proposition 8.1 et du lemme 7.3. Nous conservons les notations de l'énoncé du théorème 4.2. Comme précédemment, on peut supposer que $H(P_1)$ excède 3 et qu'il existe un entier C tel que

$$2\log H(P_n) < \log H(P_{n+1}) < C \log H(P_n), \tag{8.35}$$

pour tout entier $n \ge 1$.

Soit α un nombre algébrique réel de degré $d > r$ et de hauteur suffisamment grande pour garantir que

$$H(\alpha) \ge H(P_1) \quad \text{et} \quad H(\alpha)^{\varepsilon/2} > 2r(r+1)(|\xi|+1). \tag{8.36}$$

Définissons le nombre réel χ par

$$|\xi - \alpha| = H(\alpha)^{-\chi}.$$

Notons n_0 l'unique entier tel que

$$H(P_{n_0}) \le H(\alpha) < H(P_{n_0+1}). \tag{8.37}$$

Notons M_0 le plus petit entier pair au moins égal à 2 vérifiant

$$H(P_{n_0})^{2^{M_0/2}} > \max\{H(\alpha), \ldots, H(\alpha^r), H(L)\}, \tag{8.38}$$

où L est la forme linéaire $L(X_0, X_1, \ldots, X_r) := X_0 + \alpha X_1 + \ldots + \alpha^r X_r$.

Les inégalités (6.6), (6.7), (8.35) et (8.37) assurent l'existence d'une constante c_r, ne dépendant que de r, telle que $M_0 < c_r \log d$. Nous pouvons donc supposer sans perte de généralité que χ vérifie

$$\chi > (r + 1 + \varepsilon) C^{M_0}. \tag{8.39}$$

Nous allons majorer χ en fonction de d.

Soit M le plus grand entier pair tel que $H(P_{n_0})^\chi > H(P_{n_0+M})^{r+1+\varepsilon}$. L'hypothèse (8.39) et les inégalités (8.35) impliquent que M est au moins égal à M_0, et donc, par (8.35) et (8.38), il vient

$$H(P_{n_0+M/2}) > \max\{H(\alpha), \ldots, H(\alpha^r), H(L)\}. \tag{8.40}$$

On déduit de (8.36) et (8.37) que

$$\begin{aligned} |P_{n_0+j}(\alpha)| &\leq |P_{n_0+j}(\alpha) - P_{n_0+j}(\xi)| + |P_{n_0+j}(\xi)| \\ &\leq (r+1) r H(P_{n_0+j})(|\xi| + 1)|\alpha - \xi| + |P_{n_0+j}(\xi)| \\ &\leq H(P_{n_0+j})^{-r-\varepsilon/2}, \end{aligned} \tag{8.41}$$

pour $j = 1, \ldots, M$.

Pour $n \geq 1$, notons

$$P_{n_0+n}(X) := x_{0,n_0+n} + x_{1,n_0+n} X + \ldots + x_{r,n_0+n} X^r.$$

Lorsque le degré m du polynôme $P_{n_0+n}(X)$ est strictement inférieur à r, on pose simplement $x_{m+1,n_0+n} = \ldots = x_{r,n_0+n} = 0$, ce qui ne change rien dans la suite. Pour $n \geq 1$, posons

$$\mathbf{x}_n := (x_{0,n_0+M/2+n}, x_{1,n_0+M/2+n}, \ldots, x_{r,n_0+M/2+n}) \in \mathbf{Z}^{r+1}.$$

Le raisonnement tenu au début de cette partie montre qu'ou bien $w_r(\xi) = +\infty$ (et dans ce cas ξ est un U_ℓ-nombre pour un certain entier ℓ vérifiant $1 \leq \ell \leq r$), ou bien, quitte à extraire une sous-suite de la suite $(P_n)_{n\geq 1}$ et à modifier la constante C de (8.35), tous les $\mathbf{x}_n$ sont primitifs. Nous nous plaçons désormais sous cette hypothèse.

Les inégalités (8.35), (8.40) et (8.41) montrent que nous pouvons appliquer la proposition 8.1, laquelle conduit à

$$M/2 < c(\log 3d)^r (\log\log 3d)^r,$$

où la constante c ne dépend que de r et de ε. La majoration souhaitée pour χ découle alors de (8.35) et de la définition de M, qui entraînent que

$$\chi \leq C^{M+2}(r + 1 + \varepsilon).$$

Au vu du lemme 7.3, ceci conduit à la mesure de transcendance annoncée et termine la démonstration du théorème 4.2. $\square$

9. Remarques finales

Récemment, nous avons utilisé une version p-adique du théorème du sous-espace pour démontrer la transcendance de nombres réels dont le développement dans une base entière est assez régulier (voir [7, 2]). En particulier, nous avons démontré que les nombres réels irrationnels dont le développement dans une base entière peut être engendré par un automate fini sont transcendants. La méthode introduite dans cet article est suffisamment souple pour permettre d'établir des mesures de transcendance pour ce type de nombres. Cela fait l'objet de l'article [6].

Une autre utilisation récente du théorème du sous-espace en transcendance concerne les fractions continues (voir par exemple [1, 3, 4]). La méthode du présent article s'applique également dans ce cas. Elle permet d'obtenir des mesures de transcendance pour certaines classes de fractions continues quasi-périodiques ou quasi-symétriques. Ainsi, dans [5], nous donnons des mesures de transcendance pour les fractions continues de Thue–Morse, les fractions continues sturmiennes et les fractions continues de Maillet–Baker. Le théorème 5.6 est un cas particulier de ces résultats.

Références bibliographiques

[1] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, *On the complexity of algebraic numbers II. Continued fractions*, Acta Math. 195 (2005), 1–20.

[2] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, *On the complexity of algebraic numbers I. Expansions in integer bases*, Ann. of Math. 165 (2007), 547–565.

[3] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, *On the Maillet–Baker continued fractions*, J. reine angew. Math. 606 (2007), 105–121.

[4] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, *Palindromic continued fractions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 57 (2007), 1557–1574.

[5] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, *Trancendence measures for continued fractions involving repetitive or symmetric patterns*, J. Eur. Math. Soc., to appear.

[6] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, *Nombres réels de complexité sous-linéaire : mesures d'irrationalité et de transcendance,* manuscrit.

[7] B. Adamczewski, Y. Bugeaud et F. Luca, *Sur la complexité des nombres algébriques*, C. R. Acad. Sci. Paris 339 (2004), 11–14.

[8] J.-P. Allouche, J. L. Davison, M. Queffélec, and L. Q. Zamboni, *Transcendence of Sturmian or morphic continued fractions*, J. Number Theory 91 (2001), 39–66.

[9] D. H. Bailey and R. E. Crandall, *Random Generators and Normal Numbers*, Experimental Math. 11 (2002), 527–546.

[10] A. Baker, *On Mahler's classification of transcendental numbers*, Acta Math. 111 (1964), 97–120.

[11] É. Borel, *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques*, Rend. Circ. Math. Palermo 27 (1909), 247–271.

[12] Y. Bugeaud, Approximation by algebraic numbers, Cambridge Tracts in Mathematics 160, Cambridge, 2004.

[13] Y. Bugeaud and M. Laurent, *Exponents of Diophantine Approximation and Sturmian Continued Fractions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 55 (2005), 773–804.

[14] C. S. Calude, Information and Randomness. An algorithmic perspective, Texts in Theoretical Computer Science, an EATCS series, Springer-Verlag, 2002.

[15] D. G. Champernowne, *The construction of decimals normal in the scale of ten*, J. London Math. Soc. 8 (1933), 254–260.

[16] H. Davenport and P. Erdős, *Note on normal decimals*, Canadian J. Math. 4 (1952), 58–63.

[17] H. Davenport and K. F. Roth, *Rational approximations to algebraic numbers*, Mathematika 2 (1955), 160–167.

[18] H. Davenport and W. M. Schmidt, *Approximation to real numbers by algebraic integers*, Acta Arith. 15 (1968-1969) 393–416.

[19] J.-H. Evertse, *The number of algebraic numbers of given degree approximating a given algebraic number*. In: Analytic number theory (Kyoto, 1996), 53–83, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 247, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[20] J.-H. Evertse and H.P. Schlickewei, *A quantitative version of the Absolute Subspace Theorem*, J. reine angew. Math. 548 (2002), 21–127.

[21] S. Fischler, *Irrationalité de valeurs de zêta (d'après Apéry, Rivoal, ...)*, Séminaire Bourbaki 2002-2003, exposé no. 910, Astérisque 294 (2004), 27–62.

[22] J. F. Koksma, *Über die Mahlersche Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplexer Zahlen durch algebraische Zahlen*, Monats. Math. Phys. 48 (1939), 176–189.

[23] M. Laurent, *Exponents of Diophantine Approximation in Dimension Two*, Canadian J. Math. 61 (2009), 165–189.

[24] H. Locher, *On the number of good approximations of algebraic numbers by algebraic numbers of bounded degree*, Acta Arith. 89 (1999), 97–122.

[25] K. Mahler, *Zur Approximation der Exponentialfunktionen und des Logarithmus. I, II*, J. reine angew. Math. 166 (1932), 118–150.

[26] K. Mahler, *Über die Dezimalbruchentwicklung gewisser Irrationalzahlen*, Mathematica 4B (Zutphen) (1937), 15 pp.

[27] K. Mahler, *Arithmetische Eigenschaften einer Klasse von Dezimalbrüchen*, Proc. Akad. v. Wetensch. 40 (1937), 421–428.

[28] K. Mahler, *On a Class of Transcendental Decimal Fractions*, Comm. Math. Pure Appl. Math. 29 (1976), 717–725.

[29] M. Mignotte, *Une généralisation d'un théorème de Cugiani–Mahler*, Acta Arith. 22 (1972), 57–67.

[30] J. Mueller and W. M. Schmidt, *On the number of good rational approximations to algebraic numbers*, Proc. Amer. Math. Soc. 106 (1989), 859–866.

[31] D. Ridout, *Rational approximations to algebraic numbers*, Mathematika 4 (1957), 125–131.

[32] K. F. Roth, *Rational approximations to algebraic numbers*, Mathematika 2 (1955), 1–20; corrigendum, 168.

[33] D. Roy, *Approximation to real numbers by cubic algebraic integers, II*, Ann. of Math. 158 (2003), 1081–1087.

[34] D. Roy, *Approximation to real numbers by cubic algebraic integers, I*, Proc. London Math. Soc. 88 (2004), 42–62.

[35] W. M. Schmidt, *Simultaneous approximations to algebraic numbers by rationals*, Acta Math. 125 (1970), 189–201.

[36] W. M. Schmidt, *T-numbers do exist*, Symposia Math. IV, Inst. Naz. di Alta Math., Rome 1968, pp. 3–26, Academic Press, 1970.

[37] W. M. Schmidt, *Mahler's T-numbers*, 1969 Number Theory Institute, (Proc. of Symposia in Pure Math., Vol. XX, State Univ. New York, Stony Brook, N. Y., 1969), pp. 275–286, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1971.

[38] W. M. Schmidt, *Norm form equations*, Ann. of Math. 96 (1972), 526–551.

[39] W. M. Schmidt, Diophantine approximation, Lecture Notes in Mathematics 785, Springer, 1980.

[40] E. Wirsing, *Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades*, J. reine angew. Math. 206 (1961), 67–77.

[41] M. Waldschmidt, Diophantine approximation on linear algebraic groups. Transcendence properties of the exponential function in several variables. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 326. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

Boris Adamczewski
CNRS, Université de Lyon, Université Lyon 1
Institut Camille Jordan
Bât. Braconnier, 21 avenue Claude Bernard
69622 VILLEURBANNE Cedex (FRANCE)

Boris.Adamczewski@math.univ-lyon1.fr

Yann Bugeaud
Université de Strasbourg
Mathématiques
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG Cedex (FRANCE)

bugeaud@math.u-strasbg.fr