

Sur les nombres de Fibonacci de la forme $q^k y^p$

Yann BUGEAUD, Maurice MIGNOTTE, Samir SIKSEK

Résumé – Nous étudions l'équation $F_n = q^k y^p$ où q est un nombre premier et k un entier positif. Nous la résolvons pour tous les $q \not\equiv 1 \pmod{4}$ et obtenons des conditions nécessaires lorsque $q \equiv 1 \pmod{4}$. En particulier, nous répondons à une question de P. Ribenboim concernant l'équation $F_n = 2^k y^p$.

On Fibonacci numbers of the form $q^k y^p$

Abstract – We study the equation $F_n = q^k y^p$ where q is a prime number and k a positive integer. We solve it for all $q \not\equiv 1 \pmod{4}$ and get partial results when $q \equiv 1 \pmod{4}$. In particular, we answer P. Ribenboim's question about $F_n = 2^k y^p$.

1. Introduction

Dans un travail précédent [3], nous avons démontré le résultat suivant.

Théorème 1. *Les seuls nombres de Fibonacci qui sont des puissances pures sont $F_n = 0, 1, 1, 8$ et 144 , qui correspondent respectivement à $n = 0, 1, 2, 6$ et 12 . De plus, les seuls nombres de Lucas qui sont des puissances pures sont $L_n = 1$ et 4 , pour lesquels $n = 1$ et 3 .*

La démonstration, qui combine la théorie de Baker et la méthode modulaire, a requis environ une semaine de calculs effectués à l'aide des logiciels `pari` [1] et `magma` [2].

Dans la présente note, nous étudions des conséquences élémentaires de ce résultat : nous résolvons partiellement l'équation $F_n = q^k y^p$, avec $k > 0$, où p et q sont des nombres premiers et $y \geq 1$. Nous commençons par traiter le cas $q = 2$, qui répond à une question de P. Ribenboim, intéressé par ce problème en raison de son algorithme (voir [6]) pour résoudre l'équation $F_n = ay^p$, où a et p sont fixés.

Théorème 2. *Les seules solutions de l'équation*

$$F_n = 2^k y^p, \quad k > 0,$$

avec y impair sont données par $n = 3, 6$ et 12 . De plus les seules solutions de l'équation

$$L_n = 2^k y^p, \quad k > 0,$$

avec y impair sont données par $n = 0, 3$ et 6 .

Pour q impair nous obtenons le résultat partiel suivant.

Théorème 3. *Soit q un nombre premier impair. Considérons l'équation*

$$(1) \quad F_n = q^k y^p, \quad k > 0, \quad p \text{ premier.}$$

Alors

– soit n est pair et alors $n = 0$, $F_n = 0$ ou $n = 4$, $F_n = 3$ ou $n = 12$ et $F_n = 3^2 \times 4^2 = 3^2 \times 2^4$,
– soit n est impair, $q \equiv 1 \pmod{4}$ et le plus petit entier $r > 0$ tel que q divise F_r est impair. Si une telle solution n existe et si $q \neq 5$, alors il existe une solution pour laquelle q ne divise pas n . Pour $q = 5$, la seule solution est $F_5 = 5$. De plus, pour $5 < q < 100$, les seules valeurs pour lesquelles r est impair sont $q = 13, 17, 37, 53, 61, 73, 89$ et 97 .

2. Rappels

Les résultats ci-après sont classiques, et sont rappelés dans [6].

Lemme 1. Les nombres de Fibonacci et Lucas vérifient :

$$F_n = \frac{\omega^n - \tau^n}{\sqrt{5}}, \quad L_n = \omega^n + \tau^n, \quad \text{où } \omega = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \tau = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

De plus, on a

$$(2) \quad F_{2n} = F_n L_n, \quad F_{3n} = F_n (5F_n^2 + 3(-1)^n),$$

$$(3) \quad L_{2n} = L_n^2 + 2(-1)^{n+1}, \quad L_{3n} = L_n (L_n^2 + 3(-1)^{n+1}),$$

$$(4) \quad L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n.$$

Enfin, si $n = rm$ avec $m > 1$ et $r > 1$, alors il existe un entier $Z > 1$ tel que

$$(5) \quad F_n = Z F_m \quad \text{et} \quad \text{pgcd}(Z, F_m) \text{ divise } r.$$

Le lemme suivant est encore plus élémentaire.

Lemme 2. Les résidus de L_n et F_n modulo 4 dépendent seulement de n modulo 6 et sont donnés par la table

$$\begin{array}{l} n \bmod 6 : 0, 1, 2, 3, 4, 5, \\ F_n \bmod 4 : 0, 1, 1, 2, 3, 1, \\ L_n \bmod 4 : 2, 1, 3, 0, 3, 3. \end{array}$$

De plus,

- $3 \mid F_n$ si, et seulement si, $n \equiv 0 \pmod{4}$, et
- $3 \mid L_n$ si, et seulement si, $n \equiv 2, 6 \pmod{8}$.

3. Démonstration du Théorème 2

3.1 *Cas de la suite de Fibonacci.* Supposons d'abord $k = 1$ et montrons qu'on a alors $n = 3$. Supposons qu'il existe $n > 3$ tel que $F_n = 2y^p$ avec y impair et prenons n minimal. Les congruences de la table montrent que $n = 3m$ pour un certain m impair. De (2) nous déduisons $F_m(5F_m^2 - 3) = 2y^p$. Comme m est impair, le Lemme 2 montre que $3 \nmid F_m$. On a donc

$$F_m = y_1^p, \quad 5F_m^2 - 3 = 2y_2^p, \quad \text{ou} \quad F_m = 2y_1^p, \quad 5F_m^2 - 3 = y_2^p,$$

avec y_1 et y_2 impairs. Dans le premier cas, nous savons que $m = 1$ et donc $n = 3$, contradiction. Le second cas contredit la minimalité de n .

Supposons maintenant $k \geq 2$. Le Lemme 2 implique $n \equiv 0 \pmod{6}$. Posons $n = 2m$ avec $m \equiv 0, 3 \pmod{6}$. Alors $F_n = F_m L_m$ et le Lemme 2 montre que $8 \mid F_n$, donc $k \geq 3$.

Par (4), on voit que $\text{pgcd}(F_m, L_m) = 1$ ou 2 . Comme $F_m L_m = F_n = 2^k y^p$, on a

$$(6) \quad F_m = 2y_1^p, \quad L_m = 2^{k-1}y_2^p, \quad \text{ou} \quad F_m = 2^{k-1}y_1^p, \quad L_m = 2y_2^p,$$

avec y_1 et y_2 impairs. Dans le premier cas, $m = 3$, donc $n = 6$, $k = 3$, comme affirmé dans le Théorème.

Supposons désormais $k \geq 3$ et que la seconde factorisation de (6) a lieu. Si $k = 3$ alors $F_m = 2^2 y_1^p$, qui ne possède pas de solutions. Ainsi, la seule solution pour $k = 3$ est $n = 6$. Si $k = 4$, alors on a $F_m = 2^3 y_1^p$, équation qui vient d'être résolue, donc $m = 6$ et $n = 12$, comme affirmé dans le théorème. Il reste à établir qu'il n'y a pas de solutions si $k > 4$; si tel n'est pas le cas, prenons une solution avec k minimal. On a alors $F_m = 2^{k-1} y_1^p$. La minimalité de $k > 4$ entraîne $k - 1 = 4$, donc $m = 12$, $n = 24$. Comme $F_{24} = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 23$ n'est pas de la forme $2^k y^p$, on aboutit à une contradiction.

3.2 Cas de la suite de Lucas. Considérons maintenant l'équation $L_n = 2^k y^p$. Le cas $p = 2$ a été résolu par Cohn [5] et donne les solutions de l'énoncé, on supposera donc $p > 2$.

Montrons d'abord que n est impair. Supposons au contraire que $n = 2m$. La première identité de (3) implique $2^k y^p = L_m^2 + 2(-1)^{m+1}$, donc $k = 1$. Écrivant $x = L_m/2$, il vient

$$y^p + (-1)^{mp} = 2x^2.$$

Pour $p \geq 5$, l'équation $a^p + b^p = 2c^2$ a été résolue par Ivorra: le Théorème 2 de [5] montre que $x = y = (-1)^m = 1$. Mais $L_m = 2$ est impossible pour $m > 0$. Reste le cas $p = 3$ où l'on voit que $(X, Y) = (2y, 4x)$ est un point entier sur l'une des courbes elliptiques $Y^2 = X^3 \pm 8$. On résout ces équations à l'aide de `magma` et on obtient $(X, Y) = (2, \pm 4), (1, \pm 3), (46, \pm 312), (2, 0)$, ce qui donne $L_m = 0, 2, 158$, cas tous impossibles pour $m > 0$.

Donc n est impair. Il reste à montrer que $n = 3$. Fixons $k > 0$ et supposons que n est minimal tel que $L_n = 2^k y^p$ et $n > 3$. De la table du Lemme 2 et du fait que L_n est pair, nous voyons que $n = 3m$ pour un certain m impair. Puis la seconde identité de (3) implique $2^k y^p = L_m(L_m^2 + 3)$. Comme m est impair, la dernière partie du Lemme 2 montre que $3 \nmid L_m$. Ainsi, on a

$$L_m = 2^k y_1^p, \quad L_m^2 + 3 = y_2^p \quad \text{ou} \quad L_m = y_1^p, \quad L_m^2 + 3 = 2^k y_2^p,$$

pour des y_1, y_2 convenables. La première possibilité est éliminée comme suit: la minimalité de n implique $m = 3$ et donc $L_n = L_9 = 4 \times 19$, contradiction. La seconde possibilité n'a pas lieu en vertu du Théorème 1, sauf si $m = 1$, qui donne $n = 3$ comme affirmé.

4. Preuve du Théorème 3

Supposons d'abord n pair dans (1) avec $n > 0$, disons $n = 2m$. On a alors $F_n = F_m L_m$ et

$$F_m = q^k y_1^p \quad \text{et} \quad L_m = y_2^p, \quad \text{ou} \quad F_m = y_1^p \quad \text{et} \quad L_m = q^k y_2^p,$$

ou

$$F_m = 2^{p-l} y_1^p \quad \text{et} \quad L_m = 2^l q^k y_2^p, \quad \text{ou} \quad F_m = 2^{p-l} q^k y_1^p \quad \text{et} \quad L_m = 2^l y_2^p, \quad l \in \{1, 2\},$$

où y_1 et y_2 sont certains entiers positifs. Dans le dernier cas, notant que $l = 2$ ne peut avoir lieu que si $p = 3$ (le pgcd de F_m et L_m est égal à 2 dans ce cas), il suffit de résoudre l'équation $L_m = 4y^3$. Par les Théorèmes 1 et 2, on voit que $n \leq 12$ et le cas n pair est complètement résolu après un coup d'œil rapide à la liste des F_n pour $0 \leq n \leq 12$.

Considérons enfin le cas n impair de (1). L'équation (5) implique $q \equiv 1 \pmod{4}$, du fait que -1 doit être un résidu quadratique modulo q . Puisque r divise n , il est impair.

Supposons maintenant que $F_n = q^k y^p$ et que q divise n , soit $n = qm$. Alors, par (5), $F_m = q^l z^p$. Si $l = 0$, le Théorème 1 implique $m = 1$, donc $n = q$, ce qui impose $q = 5$. Pour $l > 0$ nous aboutissons à une situation similaire à la précédente, mais avec $v_q(m) < v_q(n)$ et si q divise m on peut répéter le même argument. D'où la seconde affirmation. Si $q = 5$ alors $5 \mid n$. La "descente" précédente peut continuer jusqu'à $F_5 = 5$. Comme $F_{25} = 5^2 \cdot 3001$, la seule solution est $F_5 = 5$.

La dernière affirmation est obtenue via un calcul trivial.

Références bibliographiques

- [1] C. Batut, K. Belabas, D. Bernardi, H. Cohen and M. Olivier, *User's guide to PARI-GP*, version 2.1.1. (Voir aussi <http://www.parigp-home.de/>).
- [2] W. Bosma, J. Cannon and C. Playoust, *The Magma Algebra System I: The User Language*, J. Symb. Comp. **24** (1997), 235–265. (Voir aussi <http://www.maths.usyd.edu.au:8000/u/magma/>).
- [3] Y. Bugeaud, M. Mignotte and S. Siksek, *Classical and modular approaches to exponential Diophantine equations, I. Fibonacci and Lucas Perfect Powers*. Soumis.
- [4] J. H. E. Cohn, *Lucas and Fibonacci numbers and some Diophantine equations*, Proc. Glasgow Math. Assoc. **7** (1965), 24–28.
- [5] W. Ivorra, *Sur les équations $x^p + 2^\beta y^p = z^2$ et $x^p + 2^\beta y^p = 2z^2$* , Acta Arith. **108** (2003), 327–338.
- [6] P. Ribenboim, *The terms Cx^h , ($h \geq 3$) in Lucas sequences: an algorithm and applications to diophantine equations*, Acta Arith. **106** (2003), 105–114.

Yann Bugeaud
Université Louis Pasteur
U. F. R. de mathématiques
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex
France
Adresse électronique : bugeaud@math.u-strasbg.fr

Maurice Mignotte
Université Louis Pasteur
U. F. R. de mathématiques
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex
France
Adresse électronique : mignotte@math.u-strasbg.fr
Téléphone : 03 90 24 02 16
Fax : 03 90 24 03 28

Samir Siksek
Department of Mathematics and Statistics
College of Science
Sultan Qaboos University
P.O. Box 36
Al-Khod 123
Oman
Adresse électronique : siksek@squ.edu.om