Approximation simultanée par des nombres algébriques

Yann BUGEAUD (Strasbourg)

Abstract. *We study the simultaneous approximation of complex transcendental numbers by algebraic numbers of bounded degree. We show that two numbers which are not simultaneously well approximable are both very well approximable by algebraic numbers of bounded degree.*

1. Introduction

En 1961, E. Wirsing [11] a montré que, pour tout nombre complexe transcendant ξ et tout entier $n \geq 1$, il existe une infinité de nombres entiers H tels que l'équation

$$|\xi - \alpha| \leq H^{-n/4}, \qquad \text{en le nombre algébrique } \alpha, \tag{1}$$

possède une solution de degré au plus égal à n et de hauteur naïve (i.e. le maximum des valeurs absolues des coefficients de son polynôme minimal sur $\mathbf{Z}$) bornée par H. Ces dernières années, de nouveaux raffinements et généralisations de (1) ont fait l'objet de nombreux travaux, notamment ceux de Y. Bugeaud, G. Diaz, M. Laurent, D. Roy, O. Teulié et M. Waldschmidt [1–3, 5–7].

Nous nous proposons dans cette note d'examiner la version simultanée du problème de Wirsing, énoncée de la manière suivante. Peut-on trouver une fonction $\Psi : \mathbf{Z}_{>0} \to \mathbf{Z}_{>0}$ telle que, pour tout couple (ξ_1, ξ_2) de nombres complexes transcendants et tout entier $n \geq 1$, il existe une infinité de nombres entiers H tels que le système

$$\begin{cases} |\xi_1 - \alpha_1| & \leq H^{-\Psi(n)}, \\ |\xi_2 - \alpha_2| & \leq H^{-\Psi(n)}, \end{cases} \qquad \text{en les nombres algébriques } \alpha_1 \text{ et } \alpha_2,$$

possède une solution avec, pour $i = 1, 2$, le degré de α_i au plus égal à n et sa hauteur naïve bornée par H ? Il n'est pas très difficile de voir que, pour presque tout (au sens de la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^2$) couple (ξ_1, ξ_2) de nombres réels, la réponse à la question précédente est oui, avec la fonction $\Psi_\varepsilon : n \mapsto (n+1)/2 - \varepsilon$, où ε est un réel strictement positif. Cependant, un tel résultat n'est pas valable pour *tout* couple (ξ_1, ξ_2), ainsi que

2000 *Mathematics Subject Classification :* 11J04, 11J13.

l'ont montré D. Roy & M. Waldschmidt [8] en construisant des contre-exemples explicites (*cf.* partie 2).

À la réflexion, l'existence de tels contre-exemples n'est guère surprenante. En effet, on ne connaît *a priori* pas la suite des entiers H pour lesquels l'équation (1) possède une solution : pour presque tout ξ, de tels entiers sont "nombreux", alors que, lorsque ξ est très bien approché par des nombres algébriques de degré fixé, l'inégalité de Liouville suggère que cette suite est lacunaire. Au cours du présent travail, nous précisons ces considérations, plutôt vagues, et nous étudions leurs conséquences sur le problème de Wirsing simultané.

Remerciements : L'auteur exprime toute sa gratitude à l'arbitre pour sa lecture très minutieuse.

2. Notations et résultats

Nous utilisons les notations usuelles, à savoir que si $P(X)$ est un polynôme à coefficients entiers s'écrivant

$$P(X) = a_d\, X^d + \ldots + a_1\, X + a_0 = a_d \prod_{i=1}^{d} (X - \alpha_i)$$

avec $a_d > 0$, on note $\mathrm{H}(P)$ sa *hauteur* naïve

$$\mathrm{H}(P) = \max_{0 \leq j \leq d} |a_j|,$$

et $\mathbf{M}(P)$ sa *mesure de Mahler*

$$\mathbf{M}(P) = a_d \prod_{i=1}^{d} \max\{1, |\alpha_i|\}.$$

Ces deux mesures vérifient l'encadrement (*cf.* [5])

$$2^{-d}\, \mathrm{H}(P) \leq \mathbf{M}(P) \leq \mathrm{H}(P)\, \sqrt{d+1}. \tag{2}$$

À l'instar de M. Laurent & D. Roy [6], on note

$$\mu(P) = \log \mathbf{M}(P).$$

Si α est un nombre algébrique de polynôme minimal $P(X)$, la *hauteur* de α et sa *mesure de Mahler* sont définies par, respectivement, $\mathrm{H}(\alpha) = \mathrm{H}(P)$ et $\mathbf{M}(\alpha) = \mathbf{M}(P)$. En outre, on pose $\mu(\alpha) = \mu(P)$ et on désigne par $\deg(\alpha)$ le degré de α et par $\mathrm{h}(\alpha) = \mu(\alpha)/\deg(\alpha)$ sa hauteur logarithmique.

Définition 1. *Soient $n \geq 1$ un entier et ξ un nombre complexe. On note $w_n^*(\xi)$ la borne supérieure des nombres réels w^* pour lesquels il existe une infinité de nombres algébriques α, de degré majoré par n, vérifiant*

$$0 < |\xi - \alpha| \leq \mathrm{H}(\alpha)^{-w^*-1}.$$

Koksma (voir, par exemple, l'ouvrage de T. Schneider [10]) a proposé une classification des nombres transcendants ξ suivant la qualité de leurs approximations algébriques, mesurée à l'aide des $w_n^*(\xi)$. Si la suite $(w_n^*(\xi)/n)_{n\geq 1}$ est bornée, alors ξ est, par définition, un S^*-nombre. Dans le cas contraire, ξ est un T^*-nombre si $w_n^*(\xi)$ est fini pour tout entier $n \geq 1$, et un U^*-nombre sinon. Il est possible de raffiner la classification en introduisant la notion de *type* d'un S^*-nombre.

Définition 2. *Le type $t(\xi)$ d'un S^*-nombre ξ est la quantité*

$$t(\xi) = \sup_{n\geq 1} \frac{w_n^*(\xi)}{n} < +\infty.$$

Si ξ est un T^*-nombre ou un U^*-nombre, son type $t(\xi)$ est, par convention, égal à l'infini.

La définition du type d'un S^*-nombre ξ varie suivant les auteurs, il semble toutefois plus naturel de considérer la limite supérieure et non le supremum de la suite $(w_n^*(\xi)/n)_{n\geq 1}$. Nous avons choisi la définition ci-dessus car, dans les questions qui nous intéressent ici, le supremum apparaît naturellement. Soulignons que presque tout (au sens de la mesure de Lebesgue) nombre réel (*resp.* complexe) est un S^*-nombre de type 1 (*resp.* de type 1/2). En outre, le théorème de Wirsing [11] énoncé au début de la Partie 1 entraîne que le type d'un S^*-nombre est au moins égal à 1/4.

Notre résultat principal relie l'existence de nombreuses approximations d'un nombre complexe transcendant ξ à la suite $(w_n^*(\xi)/n)_{n\geq 1}$. Sa démonstration reprend des idées de [1].

Théorème 1. *Soit ξ un nombre complexe transcendant. Soit $n \geq 8$ un entier. Pour tout réel H suffisamment grand, il existe un nombre algébrique α, de degré au plus égal à n et de hauteur au plus égale à H, vérifiant*

$$\log|\xi - \alpha| \leq -\left(\frac{n}{70} \min_{\substack{1\leq d\leq n \\ w_d^*(\xi)+d+1\geq 3n/14}} \frac{d}{w_d^*(\xi)+d}\right) \log H.$$

Il découle immédiatement du Théorème 1 que tout S^*-nombre ξ possède de nombreuses bonnes approximations algébriques.

Corollaire 1. *Soit ξ un S^*-nombre de type au plus égal à t. Pour tout entier $n \geq 8$ et tout entier H suffisamment grand (en fonction de ξ et de n), il existe un nombre algébrique α, de degré au plus égal à n et de hauteur au plus égale à H, vérifiant*

$$|\xi - \alpha| \leq H^{-n/(70(t+1))}.$$

Le Corollaire 1 apporte une réponse partielle à notre problème d'approximation simultanée, comme l'illustre l'énoncé suivant, qui s'en déduit facilement.

Corollaire 2. *Soient ξ_1 et ξ_2 deux nombres complexes transcendants. Si (au moins) l'un des deux est un S^*-nombre, il existe une constante $c(\xi_1,\xi_2)>0$ et, pour tout entier n assez grand, une infinité d'entiers H pour lesquels le système*

$$\begin{cases} |\xi_1-\alpha_1| & \leq H^{-c(\xi_1,\xi_2)n} \\ |\xi_2-\alpha_2| & \leq H^{-c(\xi_1,\xi_2)n} \end{cases}$$

a une solution en nombres algébriques α_1 et α_2 de degré au plus égal à n et de hauteur au plus égale à H. Toute constante $c(\xi_1,\xi_2)$ inférieure à $\max_{i=1,2}\{1/(70(t(\xi_i)+1))\}$ convient, étant entendu que $t(\xi_i)$ désigne le type de ξ_i.

Remarque : Il est intéressant de souligner que l'ensemble des couples (ξ_1,ξ_2) où ξ_1 et ξ_2 sont des T^*- ou des U^*-nombres est de dimension de Hausdorff nulle.

Le Corollaire 2 affirme que si deux nombres transcendants ne sont pas simultanément bien approchables par des nombres algébriques, alors ils sont tous deux très bien approchables. Nous présentons ci-dessous une version plus précise de cette assertion.

Corollaire 3. *Soient ξ_1 et ξ_2 deux nombres transcendants. Soient $n\geq 8$ un entier et $0<\tau<1$ un réel avec $n^\tau<n/4$. Ou bien il existe une infinité d'entiers H pour lesquels le système*

$$|\xi_i-\alpha_i|<H^{-n^\tau}, \qquad i=1,2,$$

a une solution en nombres algébriques α_1 et α_2 de degré $\leq n$ et de hauteur $\leq H$. Ou bien, il existe des entiers positifs d_1 et d_2, bornés par n, tels que

$$w^*_{d_i}(\xi_i)+d_i+1\geq\frac{3n}{14}, \qquad i=1,2,$$

et

$$w^*_{d_i}(\xi_i)\geq\left(\frac{n^{1-\tau}}{70}-1\right)d_i, \qquad i=1,2.$$

Ce corollaire est motivé par le résultat suivant de D. Roy et M. Waldschmidt ([8], Proposition 10.2). Soit $n\geq 1$ un entier. Pour tout entier $\ell\geq 1$, posons $a_\ell=[(3n)^{\ell/2}]$. Alors, les nombres

$$\xi_1=\sum_{j\geq 0}2^{-a_{1+2j}} \qquad \text{et} \qquad \xi_2=\sum_{j\geq 0}2^{-a_{2+2j}}$$

ne peuvent pas être simultanément bien approchés : pour tout entier H suffisamment grand et tout couple (α_1,α_2) de nombres algébriques de degré au plus n et de hauteur au plus H, on a

$$\max\{|\xi_1-\alpha_1|,|\xi_2-\alpha_2|\}>H^{-3\sqrt{n}}.$$

Cet exemple montre que la conclusion du Corollaire 3 est proche de l'optimalité. En effet, d'après un résultat de Güting [4], on a $w^*_1(\xi_1)=w^*_1(\xi_2)=n$, alors que l'une des alternatives proposées par le Corollaire 1 conduit à la minoration $w^*_1(\xi_i)\geq 3n/14-2$, pour $i=1,2$.

Par ailleurs, une version affaiblie du Corollaire 1 se déduit du Theorem 1.1 de Tishchenko [9], qui affirme que, si la première alternative n'est pas vérifiée, alors la seconde est satisfaite par ξ_1 *ou* ξ_2 (et non par ξ_1 *et* ξ_2).

3. Résultats auxiliaires

Lemme 1. *Soit ξ un nombre complexe. Pour tout entier $n \geq 8$ et pour tout réel $t \geq n$ suffisamment grand en fonction de ξ, il existe un polynôme non nul $P(X)$ appartenant à $\mathbf{Z}[X]$, irréductible, tel que*

$$\deg(P) \leq n, \;\; \mu(P) \leq t \quad \text{et} \quad \log|P(\xi)| \leq -\frac{3}{14}\,(n\,\mu(P) + \deg(P)\,t).$$

Démonstration : Il s'agit du Lemme 3 de [1]. □

Lemme 2. *Soient ξ un nombre complexe, d un entier positif et $P(X)$ un polynôme non nul à coefficients entiers de degré au plus d. On suppose $P(X)$ sans racine multiple et $|P(\xi)| \leq 1$. Alors, si α est une racine de $P(X)$ située à distance minimale de ξ, on a pour tout entier $s > 0$ la majoration*

$$|\xi - \alpha|^{s(s+1)/2} \leq d^{d/2}\,\mathbf{M}(P)^d\,2^{ds}\,|P(\xi)|^s.$$

Démonstration : Il s'agit du Lemme 3 de [3]. □

Lemme 3. *Soit ξ un nombre complexe transcendant et soit $d \geq 1$ un entier. Pour tout $\varepsilon > 0$, il n'existe qu'un nombre fini de polynômes $P(X)$ appartenant à $\mathbf{Z}[X]$, irréductibles de degré d, et tels que*

$$\log|P(\xi)| \leq -(w_d^*(\xi) + d + 1 + \varepsilon)\mu(P).$$

Démonstration : Si tel n'était pas le cas, le Lemme 2 avec $s = 1$ et (2) assureraient l'existence d'une constante $c(d)$ et d'une infinité de nombres algébriques α de degré $\leq d$ vérifiant

$$|\xi - \alpha| \leq c(d)\,\mathrm{H}(\alpha)^{-w_d^*(\xi)-1-\varepsilon},$$

en contradiction avec la définition de $w_d^*(\xi)$. □

4. Démonstrations

Démonstration du Théorème 1 : Soit $t > 0$ un nombre réel suffisamment grand. Soit ε un réel strictement positif choisi tel que $w_d^*(\xi) + d + 1 + \varepsilon < 3n/14$ pour chaque entier d compris entre 1 et n et vérifiant $w_d^*(\xi) + d + 1 < 3n/14$. Le lemme 1 permet d'associer au couple (n, t) un polynôme non nul $P(X)$ irréductible de degré d vérifiant

$$1 \leq d \leq n, \;\; \mu(P) \leq t \quad \text{et} \quad \log|P(\xi)| \leq -\frac{3}{14}\big(n\,\mu(P) + d\,t\big). \qquad (3)$$

On suppose t suffisamment grand, de sorte que, grâce au Lemme 3, on ait

$$\log |P(\xi)| > -(w_d^*(\xi) + d + 1 + \varepsilon)\mu(P). \tag{4}$$

Combinant (3) et (4), on obtient, d'une part,

$$w_d^*(\xi) + d + 1 + \varepsilon > \frac{3n}{14} \tag{5}$$

et, d'autre part,

$$\frac{3t}{14} \cdot \frac{d}{w_d^*(\xi) + d + 1 + \varepsilon - 3n/14} \leq \mu(P) \leq t. \tag{6}$$

En outre, le Lemme 2 montre que, pour tout entier $s \geq 1$, le polynôme $P(X)$ possède une racine α vérifiant

$$\frac{s(s+1)}{2} \log |\xi - \alpha| \leq \frac{d \log d}{2} + d\mu(P) + ds \log 2 - \frac{3s}{14}(n\mu(P) + dt).$$

Si t est suffisamment grand, le choix $s = 5$ implique la majoration

$$\log |\xi - \alpha| < -\frac{1}{14} n\mu(P),$$

et donc, compte-tenu de (2) et de (6),

$$|\xi - \alpha| < \mathrm{H}(\alpha)^{-n/15}. \tag{7}$$

En outre, en posant $H = 2^n e^t$, on déduit de (6) l'encadrement

$$(d+1)^{-1/2} \left(2^{-n} H\right)^{3d/(14(w_d^*(\xi)+d+1+\varepsilon-3n/14))} \leq \mathrm{H}(\alpha) \leq H. \tag{8}$$

Il découle des hypothèses $\varepsilon < 1/2$ et $n \geq 8$ que $1 + \varepsilon - 3n/14$ est strictement négatif, et (8) entraîne alors

$$H^{3d/(14(w_d^*(\xi)+d))} \leq \mathrm{H}(\alpha) \leq H, \tag{9}$$

si H est assez grand. En combinant (7) et (9), on obtient la majoration annocée dans le théorème, grâce à (5) et au choix de ε. □

Démonstration du Corollaire 2 : Quitte à permuter les indices, on peut supposer que ξ_1 est un S^*-nombre de type t. Soit $n \geq 8$ un entier. Par le théorème de Wirsing [11], il existe une suite strictement croissante d'entiers positifs $(H_k)_{k \geq 1}$ et des nombres algébriques $\alpha_{2,k}$ de hauteur H_k et de degré $\leq n$ tels que

$$|\xi_2 - \alpha_{2,k}| \leq H_k^{-n/4}. \tag{10}$$

Le Corollaire 1 assure alors, pour k assez grand, l'existence de nombres algébriques $\alpha_{1,k}$ de hauteur H_k et de degré $\leq n$ tels que

$$|\xi_1 - \alpha_{1,k}| \leq H_k^{-n/(70(t+1))}. \tag{11}$$

Des inégalités (10) et (11) découle le corollaire. □

Démonstration du Corollaire 3 : Par le théorème de Wirsing [11], il existe une suite strictement croissante d'entiers positifs $(H_k)_{k\geq 1}$ et des nombres algébriques α_k de hauteur H_k et de degré $\leq n$ tels que

$$|\xi_1 - \alpha_k| \leq H_k^{-n/4}.$$

Si la première alternative n'est pas réalisée, alors, pour tout k assez grand et pour tout nombre algébrique α de hauteur $\leq H_k$, on a

$$|\xi_2 - \alpha| \geq H_k^{-n^\tau}.$$

Le Théorème 1 entraîne alors que

$$\frac{n}{70} \min_{\substack{1\leq d\leq n \\ w_d^*(\xi_2)+d+1\geq 3n/14}} \frac{d}{w_d^*(\xi_2)+d} \leq n^\tau,$$

d'où

$$\max_{\substack{1\leq d\leq n \\ w_d^*(\xi_2)+d+1\geq 3n/14}} \frac{w_d^*(\xi_2)+d}{d} \geq \frac{n^{1-\tau}}{70}.$$

Pour conclure, il suffit d'intervertir les rôles de ξ_1 et de ξ_2. □

Références bibliographiques

[1] *Y. Bugeaud*, Approximation par des nombres algébriques, J. Number Theory 84 (2000), 15–33.

[2] *Y. Bugeaud et O. Teulié*, Approximation d'un nombre réel par des nombres algébriques de degré donné, Acta Arith. 93 (2000), 77–86.

[3] *G. Diaz*, Une nouvelle propriété d'approximation diophantienne, C. R. Acad. Sci. Paris 324 (1997), 969–972.

[4] *R. Güting*, Zur Berechnung der Mahlerschen Funktionen w_n, J. reine angew. Math. 232 (1968), 122–135.

[5] *M. Laurent and D. Roy*, Criteria of algebraic independence with multiplicities and interpolation determinants, Trans. Amer. Math. Soc. 351 (1999), 1845–1870.

[6] *M. Laurent et D. Roy*, Sur l'approximation algébrique en degré de transcendance un, Annales Instit. Fourier, 49 (1999), 27–55.

[7] *D. Roy et M. Waldschmidt*, Approximation diophantienne et indépendance algébrique de logarithmes, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 30 (1997), 753–796.

[8] *D. Roy et M. Waldschmidt*, Diophantine approximation by conjugate algebraic integers, soumis.

[9] *K. I. Tishchenko*, On simultaneous approximation of two real numbers by roots of the same polynomial, preprint.

[10] *T. Schneider*, Introduction aux nombres transcendants, Paris, Gauthier-Villars, 1959.

[11] *E. Wirsing*, Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades, J. reine angew. Math. 206 (1961), 67–77.

Yann Bugeaud
Université Louis Pasteur
U. F. R. de mathématiques
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG

e-mail : bugeaud@math.u-strasbg.fr