Dynamique de certaines applications contractantes, linéaires par morceaux, sur $[0,1[$

Yann BUGEAUD

Résumé : On étudie la famille d'applications de $[0,1[$ dans lui-même :
$T_{\gamma,a} : x \mapsto \gamma x + a$ modulo 1, avec $0 < \gamma < 1$, $0 \leq a < 1$. Il est déjà connu que, à γ fixé, pour presque tout a, l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(T^n_{\gamma,a}(x))_{n\geq 1}$ est fini et indépendant de $x \in [0,1[$. On montre que, pour des valeurs "exceptionnelles" de a, $T_{\gamma,a}$ est semi-conjugué continûment à une rotation irrationnelle. Réciproquement, pour tout irrationnel $\alpha \in [0,1]$, il existe un unique $\tau_\gamma(\alpha)$ tel que $T_{\gamma,\tau_\gamma(\alpha)}$ soit semi-conjugué à la rotation R_α. Le résultat principal est la détermination explicite des applications $\gamma \mapsto \tau_\gamma(\alpha)$.

Dynamic of some contracting, piecewise linear functions over $[0,1[$

Abstract : We study the family of functions from $[0,1[$ into itself :
$T_{\gamma,a} : x \mapsto \gamma x + a$ modulo 1, where $0 < \gamma < 1$, $0 \leq a < 1$. For fixed γ we already know that, for almost all a, the set of accumulation points of the sequence $(T^n_{\gamma,a}(x))_{n\geq 1}$ is finite and independent of $x \in [0,1[$. We show that for "exceptional values" of a there exists a continuous conjugacy between $T_{\gamma,a}$ and an irrational rotation. Conversely, for all irrational $\alpha \in [0,1]$, there exists a unique $\tau_\gamma(\alpha)$ such that $T_{\gamma,\tau_\gamma(\alpha)}$ and the rotation R_α are continuously conjugate. The main result is the explicit equations of the functions $\gamma \mapsto \tau_\gamma(\alpha)$.

1 Introduction

Le problème traité trouve sa motivation en théorie du signal. Pour modéliser certaines observations, on construit les suites (s_n) et (x_n) suivantes : $s_n = A \sin 2\pi(nf + f_0)$ avec f irrationnel, A, f_0 réels et $x_{n+1} = \{\gamma x_n + s_n\}$ avec $0 < \gamma \leq 1$, où $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire de x. On souhaiterait déterminer l'existence et la valeur éventuelle de la limite, quand n tend vers l'infini, de la moyenne empirique $m_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ et de la corrélation empirique $c_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k x_{k+1} - m_n^2$. Cette question n'est pas résolue et semble difficile.

Une étape préalable est l'étude de la dynamique associée à la récurrence $x_{n+1} = \{\gamma x_n + s_n\}$, dans le cas $f = 0$. C'est à ce cas particulier que nous nous intéressons ici. Ainsi, on considère les applications $T_{\gamma,a}$ de l'intervalle $[0,1[$ dans lui-même données par $T_{\gamma,a}(x) = \{\gamma x + a\}$ où $a \in [0,1[$ et $\gamma \in [0,1]$.

On notera parfois T au lieu de $T_{\gamma,a}$. Dans la suite, φ désigne l'indicateur d'Euler, E la fonction partie entière et X l'intervalle $[0,1[$.

2 Résultats connus

Les résultats suivants peuvent se déduire d'un article de Feely & Chua [1].

Théorème 1 *Soit $\gamma \in]0,1[$ fixé. Pour tout entier n, il y a exactement $\varphi(n)$ intervalles $I_n^p(\gamma)$, $1 \leq p \leq n$ et $(p,n) = 1$, disjoints, fermés, tels que, si a appartient à $I_n^p(\gamma)$, alors $(T_{\gamma,a}^m(x))_{m\geq 1}$ possède n valeurs d'adhérence distinctes et indépendantes de $x \in X$. La réunion des intervalles $I_n^p(\gamma)$ est de mesure de Lebesgue totale dans $[0,1]$.*

De plus, quand γ tend vers 1, les extrémités de l'intervalle $I_n^p(\gamma)$ tendent vers le rationnel irréductible $\dfrac{p}{n}$.

Idée de la démonstration:

Pour démontrer ce théorème, on étudie la structure des ensembles $T^m(X)$ et en particulier la position de $\theta(a) = \frac{1-a}{\gamma}$, qui est, si $\gamma + a > 1$, la préimage de 0 par $T_{\gamma,a}$. On note que la suite $(T^m(X))_{m\geq 0}$ est strictement décroissante. Soit $n = \inf\{m \mid \theta(a) \notin T^m(X)\} + 1$. Si n est fini, alors, pour tout $m > n$, l'ensemble $T^m(X)$ est composé de n intervalles disjoints et, de plus, $(T^m(x))_{m\geq 1}$ possède exactement n valeurs d'adhérence, indépendantes de $x \in X$. Ainsi, selon les valeurs de n, on détermine des sous-intervalles de $[0, \frac{1}{\gamma}]$, notés $K_n^p(\gamma,a)$, tels que, si $\theta(a) \in K_n^p(\gamma,a)$, alors $(T_{\gamma,a}^m(x))_{m\geq 1}$ possède n valeurs d'adhérence distinctes et indépendantes de $x \in X$. Une récurrence prouve l'existence, pour tout n, d'exactement $\varphi(n)$ intervalles $K_n^p(\gamma,a)$.

Les intervalles $I_n^p(\gamma)$ se déduisent des intervalles $K_n^p(\gamma,a)$ par $\frac{1-a}{\gamma} \in K_n^p(\gamma,a)$ si et seulement si $a \in I_n^p(\gamma)$. Ils sont indépendants de a.

On obtient $K_n^p(\gamma,a) = [T^{n-1}(0) + \gamma^{n-1} - \gamma^{n-2}, T^{n-1}(0)]$. Il convient de noter que $T^{n-1}(0)$ n'a pas la même expression suivant les valeurs de a. Un calcul simple montre que $T^{n-1}(0) = a(1+\gamma+...+\gamma^{n-2}) - Q_n^p(\gamma)$ où Q_n^p est un polynôme de degré $n-3$ à coefficients 0 ou 1, tel que $Q_n^p(1) = p-1$. L'intervalle $I_n^p(\gamma)$ correspondant est alors

$$\left[\frac{1+\gamma Q_n^p(\gamma)}{1+\gamma+...+\gamma^{n-1}}, \frac{1+\gamma Q_n^p(\gamma) - \gamma^n + \gamma^{n-1}}{1+\gamma+...+\gamma^{n-1}}\right].$$

Lemme 1 *Pour tout $\gamma \in]0,1[$, les applications ψ_γ définies sur l'ensemble des intervalles $I_n^p(\gamma)$ par $\psi_\gamma(I_n^p(\gamma)) = \dfrac{p}{n}$ sont bijectives sur leur image $\mathbb{Q} \cap]0,1[$ et conservent l'ordre.*

3 Détermination explicite des intervalles $I_n^p(\gamma)$

Lemme 2 *La fonction $S : \alpha \in X \longrightarrow ((S(\alpha))_k)_{k\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$*

où $(S(\alpha))_k = E(k\alpha) - E((k-1)\alpha)$ *vérifie les propriétés :*

i) $S(\alpha)$ *est périodique si et seulement si* α *est rationnel.*

ii) Si $\frac{p}{q}$ *est irréductible, alors* $S(\frac{p}{q})$ *est* $q-$*périodique et* $(S(\frac{p}{q}))_1 = 0$, $(S(\frac{p}{q}))_q = 1$.

Proposition 1 *Soient* $n \geq 2$ *et* $1 \leq p \leq n$, *tels que* $(p,n) = 1$. *Alors*

$$I_n^p(\gamma) = \left[\frac{P_n^p(\gamma)}{1+\gamma+...+\gamma^{n-1}}, \frac{P_n^p(\gamma)+\gamma^{n-1}-\gamma^n}{1+\gamma+...+\gamma^{n-1}}\right], \text{ où } P_n^p(\gamma) = \sum_{k=0}^{n-1}(S(\frac{p}{n}))_{n-k}\gamma^k.$$

Démonstration:

D'après les remarques qui suivent le théorème 1, on peut affirmer que $P_n^p(\gamma) = 1 + \gamma Q_n^p(\gamma)$ où Q_n^p vérifie $T^{n-1}(0) = a(1+\gamma+...+\gamma^{n-2}) - Q_n^p(\gamma)$. Posons $Q_n^p(\gamma) = \sum_{k=0}^{n-3} a_k\gamma^k$.

Si $1 \leq k \leq n-1$, alors $T^k(0) = a(1+\gamma+...+\gamma^{k-1}) - \sum_{j=0}^{k-1}\gamma^j a_{n-1-k+j}$.

Comme a appartient (ceci est implicite) à l'intervalle $I_n^p(\gamma)$, a tend vers $\frac{p}{n}$ quand γ tend vers 1 et on a donc:

$$T^k(0) \underset{\gamma\to 1, a\to\frac{p}{n}}{\longrightarrow} k\frac{p}{n} - \sum_{j=0}^{k-1} a_{n-k+j-1}.$$

Or, pour $1 \leq k \leq n-1, T_{1,\frac{p}{n}}^k(0) = \{k\frac{p}{n}\} = k\frac{p}{n} - \sum_{j=1}^{k}(S(\frac{p}{n}))_j$. Par continuité (et pour k fixé) : $T^k(0) \underset{\gamma\to 1, a\to\frac{p}{n}}{\longrightarrow} T_{1,\frac{p}{n}}^k(0)$.

Par suite, pour $1 \leq k \leq n-1$, on a $(S(\frac{p}{n}))_k = a_{n-1-k}$. Les coefficients du polynôme Q_n^p, donc ceux du polynôme P_n^p, sont parfaitement déterminés; ils ne dépendent que du rationnel $\frac{p}{n}$. $\square$

4 Etude des ensembles $C_\gamma = X \setminus \bigcup_{n,p} I_n^p(\gamma)$

On fixe $\gamma \in]0,1[$. On étudie maintenant l'approximation des irrationnels par des rationnels de dénominateurs croissants; à l'instar de Veerman [2] et de Khanin & Vul [3], on utilise la notion de suite de Farey, développée dans [4].

Définition 1 *Soient* $b, c \in \mathbb{Q} \cap]0,1[$ *vérifiant* $b < c$ *et* $b = \frac{b_1}{b_2}, c = \frac{c_1}{c_2}$ *irréductibles.*

On suppose de plus que $b_1c_2 - b_2c_1 = 1$. *Alors* $F(b,c) = \frac{b_1+c_1}{b_2+c_2} = a$ *est irréductible.*

On note $b = i(a)$ *et* $c = s(a)$ *de sorte que* $a = F(i(a), s(a))$ *avec* $i(a) < s(a)$.

Remarque: La théorie des suites de Farey assure que le rationnel a détermine le couple (b,c) de manière unique.

Définition 2 *Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathrm{I}^{N}$ telles que :*
i) $a_0 = 0; a_1 = 1; a_2 = \frac{1}{2} = F(0,1)$;
ii) pour tout $n \geq 2$, $a_{n+1} = F(i(a_n), a_n)$ ou $a_{n+1} = F(a_n, s(a_n))$;
iii) $(a_n)_{n\geq 0}$ n'est ni ultimement croissante, ni ultimement décroissante.

Proposition 2 *L'application qui à $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{E}$ associe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ est une bijection de $\mathcal{E}$ sur $R\backslash \mathrm{I} \cap [0,1]$.*

Il résulte du lemme 1 que C_γ, défini par $C_\gamma = X \backslash \bigcup\limits_{n,p} I_n^p(\gamma)$, est non dénombrable et qu'il existe une bijection croissante de C_γ sur $\mathrm{R}\backslash \mathrm{I} \cap [0,1]$.

Voici la détermination explicite de cette bijection.

Théorème 2 *On pose, pour $x \in X$, $(S(x))_0 = 1$.*

Les applications $\tau_\gamma : R\backslash \mathrm{I} \cap [0,1] \longrightarrow C_\gamma$ définies par $\tau_\gamma(\alpha) = (1-\alpha) \sum\limits_{k\geq 0} (S(\alpha))_k \gamma^k$ sont bijectives.

De plus, elles vérifient $\lim\limits_{\gamma\to 1} \tau_\gamma(\alpha) = \alpha$.

Démonstration:

On a besoin de deux lemmes auxiliaires.

Lemme 3 *Soient $\dfrac{p}{q}$ et $\dfrac{p'}{q'}$ tels que $p'q - pq' = 1$.*

Alors, si $1 \leq i \leq q, (S(\dfrac{p+p'}{q+q'}))_i = (S(\dfrac{p}{q}))_i$,

si $1 \leq i \leq q', (S(\dfrac{p+p'}{q+q'}))_{q+i} = (S(\dfrac{p'}{q'}))_i$.

Soient $\alpha \in \mathrm{R}\backslash \mathrm{I} \cap]0,1[$ et $(a_n)_{n\geq 0}$ l'élément de $\mathcal{E}$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$. Notons q_n le dénominateur de a_n.

Lemme 4 *Pour tout $r \geq 0$, il existe un entier positif n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a:*

$$(S(a_n))_{q_n} = (S(a_{n_0}))_{q_{n_0}}, \ \ldots\ , (S(a_n))_{q_n - r} = (S(a_{n_0}))_{q_{n_0} - r} \ .$$

Démonstration:

Soient q'_n et q''_n les dénominateurs respectifs de $i(a_n)$ et de $s(a_n)$.

D'après le lemme 3 on peut affirmer que, pour $j, 1 \leq j \leq q''_n$, on a:

$$(S(a_n))_{q'_n + j} = (S(s(a_n)))_j. \quad (*)$$

Soit $r > 0$, comme $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{E}, (a_n)_{n\geq 0}$ vérifie la propriété $iii)$ de la définition 3 , le dénominateur de $s(a_n)$ tend vers l'infini avec n.

Il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a $q''_n \geq r$. Si n est supérieur ou égal à n_0, alors $s(a_n)$ est $s(a_{n_0})$ ou l'un des $a_i,\ i \geq n_0$. $(**)$

Par $(*)$, pour $0 \leq k < r$, on a $(S(a_{n_0}))_{q_{n_0}-k} = (S(s(a_{n_0})))_{q''_{n_0}-k}$.

De ceci et de $(**)$ on déduit que, pour tout $n \geq n_0$ et pour $0 \leq k < r$, on a : $(S(a_n))_{q_n-k} = (S(a_{n_0}))_{q_{n_0}-k}$. $\square$

D'après la proposition 1, à a_n est associé l'unique intervalle $I_{q_n}^{a_n q_n}(\gamma)$, dont l'extrémité gauche est:

$$\frac{\sum_{k=0}^{q_n-1}(S(a_n))_{q_n-k}\gamma^k}{1+\gamma+\ldots+\gamma^{q_n-1}}.$$

Le lemme 4 assure la convergence ($\gamma < 1$ est fixé) quand n tend vers l'infini de $\displaystyle\sum_{k=0}^{q_n-1}(S(a_n))_{q_n-k}\gamma^k$ vers la série entière $\displaystyle\sum_{k\geq 0}(S(\alpha))_k\gamma^k$.

Soient $c, d \in \mathbb{Q} \cap]0,1[$ tels que $c < \alpha < d$. Soient I_c et I_d les intervalles (du type $I_n^p(\gamma)$) associés à c et à d.

Alors, (lemme 1) pour tout $\gamma' \in]0,1[$, on a $I_c < \tau_{\gamma'}(\alpha) < I_d$.

On fait tendre γ' vers 1 : $c < \lim_{\gamma'\to 1}\tau_{\gamma'}(\alpha) < d$.

Donc $\lim_{\gamma'\to 1}\tau_{\gamma'}(\alpha) = \alpha$. $\square$

Les résultats suivants se déduisent immédiatement du théorème 2.

Corollaire 1 *X s'écrit comme réunion disjointe:*

$$X = \bigcup_{n\geq 1, 1\leq p\leq n, (p,n)=1} I_n^p(\gamma) \cup \bigcup_{\alpha\notin Q}\tau_\gamma(\alpha).$$

Théorème 3 *Les applications $\gamma \longmapsto \tau_\gamma(\alpha)$ sont analytiques en γ.*

Par une méthode classique, on peut préciser la dynamique des applications $T_{\gamma,\tau_\gamma(\alpha)}$.

Théorème 4 *Il existe ϕ, une application continue, surjective et monotone, qui réalise une semi-conjugaison entre $T_{\gamma,\tau_\gamma(\alpha)}$ et la rotation irrationnelle R_α, rendant commutatif le diagramme :*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T_{\gamma,\tau_\gamma(\alpha)}"] \arrow[d, "\phi"'] & X \arrow[d, "\phi"] \\
X \arrow[r, "R_\alpha"] & X
\end{tikzcd}$$

Corollaire 2 *Les applications $T_{\gamma,\tau_\gamma(\alpha)}$ sont sans point périodique.*

Bibliographie:

[1] O. Feely & L. O. Chua, "The Effect of Integrator Leak in $\Sigma - \Delta$ Modulation", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 38, pp. 1293-1305, Novembre 1991.

[2] P.Veerman, "Symbolic dynamics of order-preserving orbits", *Physica D*, vol. 29, pp. 191-201, 1987.

[3] K. M. Khanin & E. B. Vul, "Circle homeomorphisms with weak discontinuities", *Dynamical systems and statistical mechanics*, vol. 3, *Advances in soviet mathematics.*

[4] G. H. Hardy & E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers.* Oxford : Clarendon Press, fifth edition, 1979.

Le 14 juillet 1993.

Yann Bugeaud
E.N.S. Lyon
46, allée d'Italie
69364 LYON CEDEX 07