DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE BAKER-FELDMAN VIA LES FORMES LINÉAIRES EN DEUX LOGARITHMES

*Yuri Bilu** (Bâle) *& Yann Bugeaud* (Strasbourg)

Abstract. We show that the Liouville-Baker-Feldman inequality $|\alpha - y/x| \gg_{\text{eff}} x^{\tau-n}$ easily follows from an estimate for linear forms in *two* logarithms.

À Alan Baker, à l'occasion de son soixantième anniversaire

1. Introduction

L'objet de ce travail est la présentation d'une nouvelle démonstration du résultat suivant, dû à Feldman [10].

Théorème 1.1. *Soit α un nombre algébrique réel de degré $n \geq 3$. Il existe alors deux constantes positives C et τ, que l'on peut expliciter, telles que, pour tout rationnel y/x avec $x > 0$, on a $|\alpha - y/x| > Cx^{\tau-n}$.*

La démonstration originale de Feldman, puis la première amélioration effective de l'inégalité de Liouville $|\alpha - y/x| \gg e^{(\log x)^{1/(n+1+\varepsilon)}} x^{-n}$ (où ε est un réel > 0) due à Baker [2], reposent sur la célèbre théorie de Baker [1] des formes linéaires en $m \geq 3$ logarithmes de nombres algébriques. La nouveauté importante, introduite par Feldman dans [9] (et élaborée par Baker dans ses "Sharpenings" [3]), est l'utilisation de $\binom{x}{k}$ au lieu de x^k dans la construction de la fonction auxiliaire.

Une approche alternative, basée sur le principe de Thue-Siegel raffiné, le lemme de Dyson, et de la géométrie des nombres élémentaire, a été élaborée par Bombieri [5], puis améliorée et étendue au cas non-archimédien par Bombieri et Cohen [6].

Dans ce travail, nous montrons que l'on peut facilement déduire le Théorème 1.1 d'une minoration convenable de formes linéaires en seulement deux logarithmes (voir le Théorème 1.3 ci-dessous), via un lemme géometrique très simple de Bombieri et Cohen [6]. Mentionnons qu'une telle possibilité est évoquée dans [6] et qu'un pas dans cette direction a été effectué dans [7], où sont utilisées des formes linéaires en trois logarithmes.

Notre objectif consiste à présenter une démonstration simple, courte et complète (à une seule exception près) du Théorème 1.1, et, par conséquent, nous ne nous intéressons pas ici à l'aspect quantitatif (voir la Remarque 2.2). Le lecteur est invité à consulter [5, 7, 8] où se trouvent les estimations quantitatives les plus récentes des constantes τ et C du Théorème 1.1, ainsi que de nombreuses références bibliographiques.

Au cours du présent travail, nous adoptons les notations suivantes. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ des nombres complexes algébriques et $\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_n, \log \alpha_{n+1}$ des déterminations quelconques de leurs logarithmes. On se donne $b_1, \ldots, b_n$ des entiers non nuls et on pose

$$D = [\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) : \mathbb{Q}], \qquad \Lambda = b_1 \log \alpha_1 + \cdots + b_n \log \alpha_n + \log \alpha_{n+1}.$$

Soient $A_1, \ldots, A_{n+1}$ des nombres réels vérifiant

$$A_i \geq \max\{D\mathrm{h}(\alpha_i), |\log \alpha_i|, 1\} \quad (i = 1, \ldots, n+1),$$

où $\mathrm{h}(\cdot)$ désigne la hauteur logarithmique absolue. Par des arguments classiques (voir la partie 3), le Théorème 1.1 est une conséquence du résultat suivant.

* Partiellement financé par *Lise-Meitner-Stipendium Nr M00421-MAT* (Autriche).

Théorème 1.2. *Supposons que* $0 < |\Lambda| < e^{-\varepsilon B}$, *où* ε *est un nombre réel positif et* $B = \max\{|b_1|, \ldots, |b_n|\}$. *On a alors* $B \le B_0\, A_{n+1}$, *où* B_0 *est une constante effective ne dépendant que de* $A_1, \ldots, A_n$, D *et* ε.

Jusqu'à présent, le Théorème 1.2 était démontré au moyen de la théorie des formes linéaires en $m \ge 3$ logarithmes ou bien par les méthodes développées par Bombieri [5] et Bombieri & Cohen [6]. Dans ce travail (voir la partie 2), nous le déduisons du Théorème 1.3, qui présente une minoration de formes linéaires en *deux* logarithmes.

Théorème 1.3. *On suppose* $n = 2$ *et* $\Lambda = b_1 \log \alpha_1 + b_2 \log \alpha_2$ *non nul. Posons*

$$b' = \max\left\{3, |b_1|/A_2 + |b_2|/A_1\right\}.$$

On a alors la minoration $|\Lambda| \ge e^{-c_0(D) A_1 A_2 \log^2 b'}$, *où* $c_0(D) > 0$ *est une constante effective.*

Une démonstration complète du Théorème 1.3 quand α_1 et α_2 sont réels se trouve dans Laurent [11] (voir [12] pour le cas complexe et quelques améliorations). L'argumentation utilise d'une manière essentielle l'idée de Feldman, mentionnée dans l'introduction. Les preuves des résultats de [11] et [12] sont longues et techniques, car les auteurs cherchent à minimiser la constante $c_0(D)$. Pour la commodité du lecteur, nous présentons dans la quatrième partie une démonstration relativement courte du Théorème 1.3, en suivant les étapes de [11], mais sans se soucier de $c_0(D)$, dont nous donnons cependant une valeur explicite. Notre démonstration est complète, à ceci près que nous ne rappelons pas la preuve du lemme de zéros, bien qu'elle soit élémentaire et courte (il s'agit essentiellement de la Proposition 1 de [12]). Nous soulignons que la théorie des formes linéaires en $m \ge 3$ logarithmes est certes bien établie (voir [4, 13] pour les contributions les plus récentes), mais elle demeure beaucoup plus délicate que celle des formes linéaires en deux logarithmes.

Remarque. En procédant comme dans [7], nous pouvons obtenir la version p-adique du Théorème 1.1 à partir de minorations de formes linéaires archimédiennes et non-archimédiennes en *deux* logarithmes.

Notation. Pour tout nombre réel x, on note, comme il est d'usage, $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \le x\}$ et $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \ge x\}$.

Remerciements. Nous remercions Paula Cohen, Michel Laurent, David Masser et Michel Waldschmidt pour leurs précieuses remarques.

2. Le Théorème 1.2 découle du Théorème 1.3

Dans cette partie, nous admettons le Théorème 1.3 et montrons comment le Théorème 1.2 s'en déduit. Notre démonstration repose sur un cas (très) particulier du lemme géométrique de Bombieri & Cohen [6, Lemma 6.1]. Dans un souci d'exhaustivité, nous donnons une démonstration complète, en suivant [6] avec cependant certaines simplifications.

Lemme 2.1. *Soient* $b_1, \ldots, b_n$ *des entiers rationnels et soient* $N \ge Q$ *des entiers positifs. Il existe alors un entier positif* r *et des entiers* $p_1, \ldots, p_n$ *tels que* $\lfloor N/Q \rfloor \le r \le N$ *et*

$$|b_i - rp_i| \le rQ^{-1/n} + |b_i|/(2r-1) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Démonstration : Le théorème de Minkowski affirme qu'il existe $(p_0, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}$ tel que $|p_0| \le Q$ et

$$|p_0 b_i/N - p_i| < Q^{-1/n} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{2.1}$$

On a $p_0 \neq 0$ car sinon on obtiendrait $p_1 = \ldots = p_n = 0$ par (2.1), ce qui est exclu. Quitte à changer le signe de p_0, on peut supposer que $1 \le p_0 \le Q$. Soit r l'entier le plus proche de N/p_0. Comme $N \ge Q \ge p_0 \ge 1$, on a $N \ge r \ge \lfloor N/Q \rfloor \ge 1$ et, par conséquent, pour tout $1 \le i \le n$,

$$|b_i - rp_i| = \left| r\left(\frac{p_0 b_i}{N} - p_i\right) + \left(\frac{N}{p_0} - r\right)\frac{b_i}{N/p_0}\right| \le rQ^{-1/n} + \frac{1}{2}\frac{|b_i|}{r - 1/2},$$

comme annoncé. $\square$

Démonstration du Théorème 1.2 à partir du Théorème 1.3 : Soient N et Q des entiers que l'on précisera plus tard et qui vérifient
$$B \geq N \geq Q \geq 1. \tag{2.2}$$
Soient $r, p_1, \ldots, p_n$ les entiers donnés par le Lemme 2.1 appliqué à $b_1, \ldots, b_n$, N et Q. Posons $\alpha = \alpha_1^{p_1} \cdots \alpha_n^{p_n}$ et $\gamma = \alpha_1^{b_1 - rp_1} \cdots \alpha_n^{b_n - rp_n} \alpha_{n+1}$ et définissons les logarithmes par
$$\log \alpha = \sum_{i=1}^{n} p_i \log \alpha_i, \qquad \log \gamma = \sum_{i=1}^{n} (n - rp_i) \log \alpha_i + \log \alpha_{n+1}.$$
Notons que
$$|b_i - rp_i| \leq rQ^{-1/n} + b_i/(2r-1) \leq rQ^{-1/n} + B/r,$$
$$|p_i| \leq (|b_i| + |b_i - rp_i|)/r \leq B/r + B/r^2 Q^{-1/n} \leq 3B/r,$$
puisque $Q^{-1/n} \leq 1 \leq B/r$ par (2.2). Ceci conduit aux estimations suivantes :
$$\max\{Dh(\alpha), |\log \alpha|, 1\} \leq \sum_{i=1}^{n} |p_i|\, A_i \leq \frac{3B}{r} \sum_{i=1}^{n} A_i =: A \tag{2.3}$$
$$\max\{Dh(\gamma), |\log \gamma|, 1\} \leq \sum_{i=1}^{n} |b_i - rp_i| A_i + A_{n+1} \leq \left(rQ^{-1/n} + \frac{B}{r} \right) \sum_{i=1}^{n} A_i + A_{n+1}. \tag{2.4}$$
Nous posons alors $N = Q \left\lceil \max\left\{ B^{1/2} Q^{1/(2n)}, A_{n+1} Q^{1/n} \right\} \right\rceil$ et montrons que l'inégalité
$$B \geq \max\left\{ Q^{2+1/n}, A_{n+1} Q^{1+1/n} \right\} \tag{2.5}$$
entraîne une contradiction pour un choix convenable de $Q = Q(A_1, \ldots, A_n, D, n, \varepsilon)$.

Ainsi, supposons l'inégalité (2.5) vérifiée. Alors la condition (2.2) est réalisée, et on a donc les majorations (2.3) et (2.4). En outre, $r \geq \lfloor N/Q \rfloor = N/Q$ implique $B/r \leq rQ^{-1/n}$ et $A_{n+1} \leq rQ^{-1/n}$, qui, combiné avec (2.4), donne
$$\max\{Dh(\gamma), |\log \gamma|, 1\} \leq 2rQ^{-1/n} \left(1 + A_1 + \cdots + A_n\right) =: G. \tag{2.6}$$
Par hypothèse, $\Lambda = r \log \alpha + \log \gamma$ est non nul. Il suffit alors d'appliquer le Théorème 1.3 pour, via (2.3) et (2.6), obtenir
$$\log |\Lambda| \geq -c_0(D) A G \max\left\{1, \log^2(r/G + 1/A)\right\} \geq -c(D, A_1, \ldots, A_n) B Q^{-1/n} \log^2 Q$$
et $\log |\Lambda| \geq -\varepsilon B$ pour un choix approprié de Q, ne dépendant que de $c(D, A_1, \ldots, A_n)$, n et ε. Ceci achève la démonstration. $\square$

Remarque 2.2. La démonstration presentée ici implique la majoration $B \leq \max\left\{ Q^{2+1/n}, A_{n+1} Q^{1+1/n} \right\}$ avec
$$Q = c'(D)(A_1 + \cdots + A_n)^{2n} \varepsilon^{-n} \log^2 \left((A_1 + \cdots + A_n) \varepsilon^{-1} \right),$$
qui est assez faible. On peut l'améliorer sans difficulté ; par exemple, en introduisant les “poids” λ_i dans le Lemme 2.1 (comme Bombieri et Cohen le font dans [6]), on peut remplacer $A_1 + \cdots + A_n$ par $n(A_1 \cdots A_n)^{1/n}$. D'autres raffinements sont également possibles, mais comme dans ce travail notre objectif se limite à présenter les principales idées sans aborder les complications techniques, nous ne nous soucions pas des constantes optimales.

3. Le Théorème 1.1 découle du Théorème 1.2

Dans cette partie nous déduisons le Théorème 1.1 du Théorème 1.2. Quoique l'argument correspondant soit classique et bien connu, nous l'incluons par souci d'exhaustivité. Nous avons besoin du résultat auxiliaire suivant.

Proposition 3.1. *Soient $\mathbb{K}$ un corps de nombres et r le rang de son groupe des unités. Soit $\eta_1, \ldots, \eta_r$ un système fondamental d'unités de $\mathbb{K}$. Alors, pour tout entier algébrique $\beta \in \mathbb{K}$, il existe $b_1, \ldots, b_r \in \mathbb{Z}$ tels que, en posant $\mu = \beta\eta_1^{-b_1} \cdots \eta_r^{-b_r}$ et $B = \max\{|b_1|, \ldots, |b_r|\}$, on a*

$$\mathrm{h}(\mu) \leq [\mathbb{K}:\mathbb{Q}]^{-1} \log \left|\mathcal{N}_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}\, \beta\right| + O(1) \tag{3.1}$$

$$\mathrm{h}(\beta) \ll \mathrm{h}(\mu) + B, \qquad B \ll \mathrm{h}(\beta) + 1. \tag{3.2}$$

En outre, les constantes implicites dépendent de manière effective de $\mathbb{K}$ et de $\eta_1, \ldots, \eta_r$.

Démonstration : Soit $\sigma_1, \ldots, \sigma_{r+1}$ une collection de plongements : $\mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$, formée par tous les plongements réels et par un représentant de chaque paire de plongements complexes. Comme la matrice $[\log|\sigma_i(\eta_j)|]_{1\leq i,j\leq r}$ est non-dégénérée, on peut résoudre les équations linéaires simultanées

$$\sum_{j=1}^{r} x_j \log|\sigma_i(\eta_j)| = \log|\sigma_i(\beta)| \qquad (1 \leq i \leq r).$$

Pour chaque i, on note b_i l'entier le plus proche de x_i ; comme $\mu = \beta\eta_1^{-b_1} \cdots \eta_r^{-b_r}$, on obtient alors

$$\left|\log|\sigma_i(\mu)|\right| \ll 1 \qquad (1 \leq i \leq r),$$

$$e_{r+1} \log|\sigma_{r+1}(\mu)| = \log|\mathcal{N}\beta| - \sum_{i=1}^{r} e_i \log|\sigma_i(\mu)| = \log\left|\mathcal{N}_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}\, \beta\right| + O(1),$$

où e_i est égal à 1 ou 2, selon que σ_i est un plongement réel ou complexe. Ceci implique (3.1) puisque μ est un entier algébrique. Les démonstrations des inégalités (3.2) sont immédiates. □

Démonstration du Théorème 1.1 à partir du Théorème 1.2 : On peut supposer que α est un entier algébrique. Soient $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les conjugués de α sur $\mathbb{Q}$ et soit $\eta_1, \ldots, \eta_r$ un système fondamental d'unités de $\mathbb{Q}(\alpha)$. Dans cette démonstration, toutes les constantes implicites sont effectives, et ne dépendent que de α et des unités η_i.

Soient $x \neq 0$ et y deux entiers, et posons $m = \left|\mathcal{N}_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(x\alpha - y)\right|$. On peut supposer que $\delta := |\alpha - y/x|$ vérifie $\delta \ll x^{-1}$ car sinon le résultat souhaité est immédiat. Par conséquent, nous obtenons $\delta \gg mx^{-n}$ et, pour établir le théorème, il suffit de montrer qu'il existe une constante effective $\tau > 0$ telle que

$$m \gg x^{\tau}. \tag{3.3}$$

Par la Proposition 3.1 appliquée à $\beta = x\alpha - y$ et en remarquant que $\mathrm{h}(\beta) = \log x + O(1)$, nous obtenons des entiers $b_1, \ldots, b_r$, de valeurs absolues majorées par B, tels que $\mu := (x\alpha - y)\eta_1^{-b_1} \cdots \eta_r^{-b_r}$ vérifie $\mathrm{h}(\mu) \ll \log m + 1$ et que l'on ait $B \ll \log x + 1$ et $\log x \ll \mathrm{h}(\mu) + B$. Ainsi, on peut écrire (c'est à cette étape qu'intervient l'hypothèse $n \geq 3$)

$$\frac{\alpha_3 - \alpha}{\alpha_2 - \alpha} \cdot \frac{x\alpha_2 - y}{x\alpha_3 - y} = \theta\xi_1^{b_1} \cdots \xi_r^{b_r}, \tag{3.4}$$

où $\theta, \xi_1, \ldots, \xi_r$ appartiennent à $\mathbb{Q}(\alpha, \alpha_2, \alpha_3)$ et vérifient $\mathrm{h}(\theta) \leq 2\mathrm{h}(\mu) + O(1) \ll \log m + 1$ et $h(\xi_i) \leq 2\mathrm{h}(\eta_i)$, pour tout $1 \leq i \leq r$.

Le membre de gauche de (3.4) est égal à

$$\frac{\alpha_3 - \alpha}{\alpha_3 - y/x} \cdot \frac{\alpha_2 - y/x}{\alpha_2 - \alpha} = 1 + O(\delta) = 1 + O\left(x^{-1}\right),$$

ce qui, en utilisant $B \ll \log x + 1$, implique $\left|\theta\xi_1^{b_1} \cdots \xi_r^{b_r} - 1\right| \leq x^{-1} \ll e^{-cB}$, où $c > 0$ est une constante effective. Du Théorème 1.2 découle la majoration $B \ll \mathrm{h}(\theta) + 1 \ll \log m + 1$. Par conséquent, nous obtenons $\log x \ll \mathrm{h}(\mu) + B \ll \log m + 1$, c'est-à-dire (3.3), et ceci achève la démonstration. □

4. Démonstration du Théorème 1.3

Nous suivons essentiellement [11] et [12], mais, comme nous ne cherchons pas à calculer la constante numérique, nous supprimons ou simplifions de nombreux arguments très fins de [11, 12].

Soient α_1 et α_2 deux nombres algébriques non nuls, appartenant à un corps de nombres $\mathbb{K}$, de degré D. On suppose, et cela n'est pas restrictif, $b_1 > 0$, $b_2 < 0$ et que les modules de α_1 et α_2 sont supérieurs ou égaux à 1. En remplaçant b_2 par $-b_2$, on peut écrire $\Lambda = b_2 \log\alpha_2 - b_1 \log\alpha_1$, où b_1 et b_2 sont alors des entiers positifs.

Soient $K \geq 3$, $L \geq 2$, R_1, R_2, S_1 et S_2 des entiers strictement positifs. Notons $N = KL$, $R = R_1 + R_2 - 1$ et $S = S_1 + S_2 - 1$. Grâce au lemme de zéros de Nesterenko ([12, Lemme 1], dont nous ne reprenons pas la démonstration ici, bien qu'elle soit courte et élémentaire) nous savons que, si les conditions

$$\mathrm{Card}\,\{\alpha_1^r\,\alpha_2^s\,;\,0 \leq r < R_1,\ 0 \leq s < S_1\} \geq L, \tag{4.1}$$

$$\mathrm{Card}\,\{rb_2 + sb_1\,;\,0 \leq r < R_2,\ 0 \leq s < S_2\} > (K-1)L \tag{4.2}$$

sont réalisées, alors la matrice de format $KL \times RS$ dont les coefficients sont les nombres

$$\binom{rb_2 + sb_1}{k}{\alpha_1}^{\ell r}{\alpha_2}^{\ell s},$$

est de rang maximal, égal à $N = KL$. On peut donc en extraire un mineur Δ non nul, d'ordre $N \times N$, qui s'écrit, les colonnes étant convenablement ordonnées,

$$\Delta = \det\left(\binom{r_j b_2 + s_j b_1}{k_i}{\alpha_1}^{\ell_i r_j}{\alpha_2}^{\ell_i s_j}\right)_{1 \leq i,j \leq N}.$$

Nous supposons maintenant que (4.1) et (4.2) sont réalisées et minorons Δ par l'inégalité de Liouville, puis nous le majorons à l'aide du principe du maximum ; enfin, nous montrons que ces deux estimations sont contradictoires si Λ est suffisamment petit.

- Minoration arithmétique de $|\Delta|$.

Pour une valeur absolue v de $\mathbb{K}$, on a la majoration triviale[1]

$$|\Delta|_v \leq C_v \max\{1, |\alpha_1|_v\}^{LRN} \max\{1, |\alpha_2|_v\}^{LSN},$$

où

$$C_v = \begin{cases} N!\,\big((R-1)b_2 + (S-1)b_1\big)^{\sum_{j=1}^N k_j} \left(\prod_{j=1}^N k_j!\right)^{-1}, & \text{si } v \text{ est archimédienne ;} \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

En utilisant de la formule de produit, en observant que $\sum_{i=1}^n k_i = (K-1)N/2$ et en posant

$$b = \Big((R-1)b_2 + (S-1)b_1\Big)\left(\prod_{k=1}^{K-1} k!\right)^{-2/(K^2-K)},$$

on obtient sans difficulté la minoration

$$\log|\Delta| \geq -(D-1)N\log N - \frac{(D-1)KN\log b}{2} - DLN(R\,\mathrm{h}(\alpha_1) + S\,\mathrm{h}(\alpha_2)), \tag{4.3}$$

qui est certes nettement moins précise que le Lemme 6 de [12], mais suffit à notre propos.

[1] On normalise les valeurs absolues de $\mathbb{K}$ de telle sorte que leurs restrictions sur $\mathbb{Q}$ coïncident avec les valeurs absolues usuelles.

En outre, il est important de noter la majoration

$$\begin{aligned} b \leq & (Rb_2+Sb_1)\left(\prod_{k=1}^{K-1} k^{k-K}\right)^{\frac{2}{K^2-K}} \\ \leq & (Rb_2+Sb_1)\exp\left(\frac{\frac{K}{2}\log\frac{K^2}{e}-2(K-1)\log\frac{K-1}{e}}{K-1}\right) \leq 36\frac{Rb_2+Sb_1}{K}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

- Majoration analytique de $|\Delta|$.

Nous procédons comme dans [11] et [12] : nous introduisons la quantité

$$\Lambda' := \Lambda\ \max\left\{e^{|\Lambda| LS/b_2} LS/b_2, e^{|\Lambda| LR/b_1} LR/b_1\right\},$$

et nous nous donnons un réel $\rho > 1$. Notre objectif consiste à démontrer le lemme suivant.

Lemme 4.1. *Si $|\Lambda'| \leq \rho^{-N+1/2}$, alors on a*

$$\log|\Delta| \leq -\frac{N^2\ \log\rho}{2} + N\log N + \frac{KN\log\rho}{2} + \frac{KN\log b}{2} + \rho LRN|\log\alpha_1| + \rho LSN|\log\alpha_2|. \tag{4.5}$$

Démonstration : On suppose (sans perte de généralité) que $b_1|\log\alpha_1| \leq b_2|\log\alpha_2|$. On écrit alors $\log\alpha_2 = \beta\log\alpha_1 + \Lambda/b_2$ avec $\beta = b_1/b_2$. Par multilinéarité du déterminant, on obtient

$$\Delta = \det\left(\frac{b_2^{k_i}}{k_i!}\,(r_j+s_j\beta)^{k_i}\,{\alpha_1}^{\ell_i r_j}{\alpha_2}^{\ell_i s_j}\right),$$

et l'on observe que

$${\alpha_1}^{\ell_i r_j}{\alpha_2}^{\ell_i s_j} = {\alpha_1}^{\ell_i(r_j+s_j\beta)}(1+\Lambda'\,\theta_{i,j}),$$

où les $\theta_{i,j}$ sont des nombres complexes de module ≤ 1. Ainsi, le déterminant Δ s'écrit

$$\Delta = \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,N\}} (\Lambda')^{N-|I|}\Delta_I, \tag{4.6}$$

où

$$\Delta_I = \det\begin{pmatrix} \varphi_i(z_1) & ,\ldots, & \varphi_i(z_N) \\ & & \\ \theta_{i,1}\varphi_i(z_1) & ,\ldots, & \theta_{i,N}\varphi_i(z_N)\end{pmatrix} \begin{array}{l} \}\quad i\in I \\ \\ \}\quad i\notin I\end{array}$$

avec

$$\varphi_i(z) = b_2\,\frac{z^{k_i}}{k_i!}\alpha_1^{\ell_i z}, \quad z_j = r_j+\beta s_j, \quad (1\leq i,j\leq N).$$

Considérons maintenant la fonction entière Φ_I de la variable x définie par

$$\Phi_I(x) = \det\begin{pmatrix} \varphi_i(xz_1) & ,\ldots, & \varphi_i(xz_N) \\ & & \\ \theta_{i,1}\varphi_i(xz_1) & ,\ldots, & \theta_{i,N}\varphi_i(xz_N)\end{pmatrix} \begin{array}{l} \}\quad i\in I \\ \\ \}\quad i\notin I\end{array}$$

de telle sorte que $\Delta_I = \Phi_I(1)$. En développant en série de Taylor les fonctions φ_i pour les indices $i\in I$, on constate que la fonction Φ_I possède au point $x=0$ un zéro de multiplicité $\geq (\nu^2-\nu)/2$, où nous avons posé $\nu = \mathrm{Card}(I)$. Le lemme de Schwarz entraîne alors

$$|\Delta_I| = |\Phi_I(1)| \leq \rho^{-(\nu^2-\nu)/2}\ \max_{|x|=\rho}|\Phi_I(x)|.$$

En utilisant ceci pour tous les sous-ensembles I de $\{1,\dots,N\}$ et en reportant la majoration $|\Lambda'| \le \rho^{-N+1/2}$ dans (4.6), on obtient

$$\begin{aligned}|\Delta| &\le 2^N \max_{0\le\nu\le N}\left(\rho^{-(N-1/2)(N-\nu)-(\nu^2-\nu)/2}\right)\max_I \max_{|x|=\rho}|\Phi_I(x)|\\ &\le 2^N \rho^{-(N^2-N)/2}\max_I\max_{|x|=\rho}|\Phi_I(x)|.\end{aligned}$$

Il reste alors à majorer $|\Phi_I(x)|$. Pour cela, on développe le déterminant $\Phi_I(x)$ et on utilise les majorations $|\theta_{i,j}| \le 1$. Ainsi, pour tout nombre complexe x, on a

$$\begin{aligned}|\Phi_I(x)| &\le N!\prod_{i=1}^N \frac{(b_2|x|(R+\beta S))^{k_i}}{k_i!}\exp\left(\sum_{i=1}^N \ell_i(R+\beta S)|x|\,|\log\alpha_1|\right)\\ &\le N!\,(|x|b)^{(K-1)N/2}\exp\big(|x|LRN|\log\alpha_1| + |x|LSN|\log\alpha_2|\big),\end{aligned}$$

puisque $\beta|\log\alpha_1| \le |\log\alpha_2|$. On obtient alors

$$\log|\Delta| \le -\frac{N^2\log\rho}{2}+\frac{N\log\rho}{2}+N\log N+\frac{(K-1)N\log\rho}{2}+\frac{(K-1)N\log b}{2}+\rho LRN|\log\alpha_1|+\rho LSN|\log\alpha_2|,$$

car, N étant supérieur ou égal à 6, on a $2^N N! \le N^N$. □

- Choix des paramètres.

En multipliant (4.3) et (4.5) par $2/N$, l'hypothèse $|\Lambda'| \le \rho^{-N+1/2}$ est contredite dès que

$$N\log\rho \ge 2D\log N + K\log\rho + DK\log b + 2LR(\rho\,|\log\alpha_1| + D\,\mathrm{h}(\alpha_1)) + 2LS(\rho\,|\log\alpha_2| + D\,\mathrm{h}(\alpha_2)),$$

donc, d'après la définition de A_1 et de A_2, dès que

$$N\log\rho \ge 2D\log N + K\log\rho + DK\log b + 2L(\rho+1)(RA_1+SA_2). \tag{4.7}$$

On procède alors comme dans [11] pour choisir nos paramètres, mais, les constantes optimales ne nous important pas ici, nos estimations restent très larges. Ainsi, on note $B = \max\{\log\rho, D\,(5+\log b')\}$ et on pose

$$K = \lfloor\kappa^2 BA_1A_2\rfloor,\quad L=\lfloor B\rfloor,\quad R_1=\lceil BA_2\rceil,\quad S_1=\lceil BA_1\rceil,\quad R_2=\lceil\kappa BA_2\rceil,\quad S_2=\lceil\kappa BA_1\rceil,$$

où $\kappa \ge 1$ sera precisée ci-dessous.

On observe que l'on a $R_1 \ge L$ et $S_1 \ge L$, donc, si α_1 et α_2 ne sont pas tous deux racines de l'unité (auquel cas la démonstration du théorème est immédiate), la condition (4.1) est réalisée. Si l'on suppose en outre que tous les éléments de l'ensemble $\{rb_2+sb_1;\, 0\le r<R_2,\, 0\le s<S_2\}$ sont distincts, la majoration $R_2S_2 > (K-1)L$ entraîne la condition (4.2). De plus, (4.4) implique $D\log b \le B$ et le membre de droite de (4.7) est donc majoré par $4B^2A_1A_2\kappa(\kappa+\rho)$. Or, le membre de gauche de cette inégalité est trivialement minoré par $0.7B^2A_1A_2\kappa^2\log\rho$. Par conséquent, (4.7) est vérifiée avec $\rho=e^7$ et $\kappa=12\rho$. Ainsi, le Lemme 4.1 implique la minoration $\log|\Lambda'| \ge (1/2-N)\log\rho \ge -10^{10}A_1A_2B^2$, et, compte-tenu de la définition de Λ' et de la majoration (très large) $1+\log L+\log R+\log S \le A_1A_2B^2$, on aboutit à

$$\log|\Lambda| \ge -10^{11}A_1A_2B^2. \tag{4.8}$$

Il reste maintenant à considérer le cas où (4.2) n'est pas réalisée. Supposons donc qu'il existe deux entiers r et s, tels que $|r| \le R-1$, $|s| \le S-1$ et $rb_2+sb_1=0$. On a alors $|\Lambda| = b_1r^{-1}|s\log\alpha_2 + r\log\alpha_1|$, et l'inégalité de Liouville, comme énoncée au début de cette partie, conduit à une minoration en réalité meilleure que (4.8). Ceci achève la démonstration du théorème. □

Références bibliographiques

1. **A. Baker**, Linear forms in the logarithms of algebraic numbers I–IV, *Mathematika* **13** (1966), 204–216; **14** (1967), 102–107 et 220–224; **15** (1968), 204–216.
2. **A. Baker**, Contributions to the theory of Diophantine equations. I. On the representation of integers by binary forms, *Phil. Trans. R. Soc. London Ser.A* **263** (1967–68), 173–191.
3. **A. Baker**, A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms I–III, *Acta Arith.* **21** (1972), 117–129; **24** (1973), 33–36; **27** (1975), 247–252.
4. **A. Baker, G. Wüstholz**, Logarithmic forms and group varieties, *J. Reine Angew. Math.* **442** (1993), 19–62.
5. **E. Bombieri**, Effective Diophantine Approximation on $\mathbb{G}_m$, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **20** (1993), 61–89.
6. **E. Bombieri, P.B. Cohen**, Effective Diophantine Approximation on $\mathbb{G}_m$, II, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **24** (1997), 205–225.
7. **Y. Bugeaud**, Bornes effectives pour les solutions des équations en S-unités et des équations de Thue-Mahler, *J. Number Theory* **71** (1998), 227-244.
8. **Y. Bugeaud, K. Győry**, Bounds for the solutions of Thue-Mahler equations and norm form equations *Acta Arith.* **74** (1996), 273–292.
9. **N.I. Feldman**, Improved estimate for a linear form of the logarithms of algebraic numbers (en russe), *Mat. Sb.* **77** (1968), 256–270. Également: *Math. USSR. Sb.* **6** (1968) 393–406.
10. **N.I. Feldman**, An effective refinement of the exponent in Liouville's theorem (en russe), *Iz. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* **35** (1971), 973–990. Également: *Math. USSR. Izv.* **5** (1971) 985–1002.
11. **M. Laurent**, Linear forms in two logarithms and interpolation determinants, *Acta Arith.* **66** (1994), 181–199.
12. **M. Laurent, M. Mignotte, Y. Nesterenko**, Formes linéaires en deux logarithmes et déterminants d'interpolation, *J. Number Theory* **55** (1995), 285–321.
13. **M. Waldschmidt**, Minorations de combinaisons linéaires de logarithmes de nombres algébriques, *Canadian J. Math.* **45** (1993), 176–224.

Yuri Bilu
Mathematisches Institut
Universität Basel
Rheinsprung 21
4051 BASEL (SWITZERLAND)

e-mail : yuri@math.unibas.ch

Yann Bugeaud
Université Louis Pasteur et CNRS
U.F.R. de Mathématiques
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG (FRANCE)

e-mail : bugeaud@math.u-strasbg.fr