Approximation par des nombres algébriques de degré borné et dimension de Hausdorff

Yann Bugeaud (Strasbourg)

Abstract. We compute the generalized Hausdorff measure of sets of real numbers close to infinitely many algebraic numbers of fixed degree. Thus, we provide an extension to results of Jarník and of Baker & Schmidt.

2000 Mathematics Subject Classification : 11J04, 11K55, 11K60.

1. Introduction

Un résultat classique de Dirichlet affirme que pour tout réel irrationnel ξ il existe une infinité de rationnels p/q vérifiant $|\xi - p/q| < 1/q^2$. De nombreux auteurs ont raffiné ce théorème dans différentes directions, en remplaçant notamment la fonction $q \mapsto 1/q^2$ par d'autres fonctions décroissant plus lentement. Ainsi, Khintchine a obtenu l'énoncé métrique suivant (voir par exemple [5], page 4, ou bien le Chapter 7 de l'ouvrage de Cassels [7]).

Théorème A. *Soit $\Psi : \mathbf{N} \to \mathbf{R}^+$ une fonction décroissante. Alors l'ensemble*

$$\mathcal{K}(\Psi) := \left\{ \xi \in \mathbf{R} : \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{\Psi(q)}{q} \text{ pour une infinité de rationnels } \frac{p}{q} \right\}$$

est de mesure de Lebesgue nulle si la série $\sum_{q=1}^{\infty} \Psi(q)$ converge et de mesure totale sinon.

En particulier, pour $\lambda > 1$, l'ensemble $\mathcal{K}(q \mapsto q^{-\lambda})$ est de mesure nulle. Indépendamment, Jarník [16] et Besicovitch [6] ont calculé sa dimension de Hausdorff.

Théorème B. *Soit $\lambda > 1$. La dimension de Hausdorff de l'ensemble $\mathcal{K}(q \mapsto q^{-\lambda})$ est égale à $2/(1+\lambda)$.*

Le résultat de Jarník est plus complet car il s'applique à une large classe de fonctions Ψ incluant les fonctions puissance et prend en considération la mesure de Hausdorff généralisée (voir la partie 3 pour les définitions de mesure et dimension de Hausdorff).

Une autre généralisation possible du théorème de Dirichlet consiste à étudier l'approximation des réels non plus par des rationnels, mais par des nombres algébriques de degré borné. Dans toute la suite, nous notons $H(\alpha)$ la hauteur naïve du nombre algébrique α, c'est-à-dire le maximum des valeurs absolues des coefficients de son polynôme minimal sur $\mathbf{Z}$. En particulier, si le rationnel p/q est sous forme irréductible, on a $H(p/q) = \max\{|p|, |q|\}$.

Notation. *Soit $n \geq 1$ un entier. On désigne par $\mathbf{A}_n$ (resp. $\tilde{\mathbf{A}}_n$) l'ensemble des nombres réels algébriques de degré égal à n (resp. de degré au plus égal à n).*

Il découle d'un résultat de Sprindžuk [18], confirmant une conjecture de Mahler, que, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour presque tout réel ξ, il n'existe qu'un nombre fini de nombres algébriques $\alpha \in \tilde{\mathbf{A}}_n$ vérifiant

$$|\xi - \alpha| \leq H(\alpha)^{-n-1-\varepsilon}.$$

En particulier, pour $\lambda > 1$, les ensembles

$$\{\xi \in \mathbf{R} : |\xi - \alpha| \leq H(\alpha)^{-(n+1)\lambda} \text{ pour une infinité de } \alpha \in \mathbf{A}_n\}$$

sont de mesure de Lebesgue nulle. Baker & Schmidt [2] sont parvenus à calculer leur dimension de Hausdorff.

Théorème C. *Soit $\lambda > 1$. La dimension de Hausdorff de l'ensemble*

$$\{\xi \in \mathbf{R} : |\xi - \alpha| \leq H(\alpha)^{-(n+1)\lambda} \textit{ pour une infinité de } \alpha \in \tilde{\mathbf{A}}_n\}$$

vaut exactement $1/\lambda$.

Nous pouvons entre autres en déduire qu'il existe des réels ξ approchables par des éléments de $\tilde{\mathbf{A}}_n$ à l'ordre $(n+1)\lambda$ et pas au-delà. Le résultat de Sprindžuk a été amélioré par Baker [1], puis par Bernik [4]. Tout récemment, Beresnevich [3] a prouvé la généralisation suivante du Théorème A.

Théorème D. *Soient $n \geq 1$ et $\Psi : \mathbf{N} \to \mathbf{R}^+$ une fonction décroissante. Alors l'ensemble*

$$\mathcal{K}_n(\Psi) := \big\{\xi \in \mathbf{R} : |\xi - \alpha| < \Psi(H(\alpha)) \textit{ pour une infinité de } \alpha \in \mathbf{A}_n\big\}$$

est de mesure de Lebesgue nulle si la série $\sum_{x=1}^{\infty} x^n \Psi(x)$ converge et de mesure totale sinon.

Il est alors naturel de tenter d'estimer la mesure de Hausdorff de $\mathcal{K}_n(\Psi)$. Cela est connu pour $n = 1$: il s'agit du cas $s = 1$ du résultat général de Jarník ([16], Satz 4) sur l'approximation diophantienne simultanée (*voir* Théorème F ci-après).

Théorème E. *Soit Ψ une fonction positive, décroissante et de limite nulle à l'infini. Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ une fonction croissante telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to 0} f(x)/x = +\infty$. Supposons que la série $\sum_{x=1}^{+\infty} x\Psi(x)$ converge et que les fonctions $x \mapsto x^2 f(2\Psi(x))$ et $x \mapsto x^2\Psi(x)$ sont décroissantes. Alors $\mathcal{H}^f(\mathcal{K}_1(\Psi)) = +\infty$ si la série*

$$\sum_{x=1}^{+\infty} x f(2\Psi(x))$$

diverge, et $\mathcal{H}^f(\mathcal{K}_1(\Psi)) = 0$ dans le cas contraire.

L'objectif principal du présent travail est la généralisation du Théorème E aux ensembles $\mathcal{K}_n(\Psi)$ avec $n \geq 2$. Il s'agit de notre Théorème 1, duquel nous déduisons plusieurs énoncés, également présentés dans la partie 2. Les définitions de mesure et dimension de Hausdorff, ainsi que certaines de leurs propriétés, font l'objet de la partie 3, tandis que la partie 4 est consacrée à la notion de système régulier, introduite par Baker & Schmidt [2]. Les démonstrations de nos résultats figurent dans les parties 5 et 6, la partie 5 étant exclusivement consacrée à la preuve du Théorème 1.

Notation. *Pour tout réel x, on désigne par $|x|$ sa valeur absolue, par $[x]$ sa partie entière et par $\lceil x \rceil$ le plus petit entier qui lui est strictement supérieur. Si J est un sous-intervalle borné de $\mathbf{R}$, on note $|J|$ sa longueur.*

2. Énoncé des résultats

Notre résultat principal est une extension des Théorèmes C et E, qui complète le Théorème D.

Théorème 1. *Soit $n \geq 2$ un entier. Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ une fonction croissante, nulle à l'origine telle que $x \mapsto f(x)/x$ décroît au voisinage de 0 et que $\lim_{x\to 0} f(x)/x = +\infty$. Soit $\Psi : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ une fonction décroissante, telle que la série $\sum_{x=1}^{\infty} x^n \Psi(x)$ converge et que la fonction $x \mapsto x^n f\big(2\Psi(x)\big)$ soit décroissante. Supposons vérifiée la condition technique suivante :*

$$\textit{Pour tout réel } a > 0,\ \liminf_{x\to\infty} \frac{f(\Psi(ax))}{f(\Psi(x))} > 0 \tag{1}$$

et notons

$$\mathcal{K}_n(\Psi) := \big\{\xi \in \mathbf{R} : |\xi - \alpha| < \Psi(H(\alpha)) \ \textit{ pour une infinité de } \alpha \in \mathbf{A}_n\big\}.$$

Alors la mesure de Lebesgue de $\mathcal{K}_n(\Psi)$ est nulle. En outre, $\mathcal{H}^f(\mathcal{K}_n(\Psi)) = +\infty$ si la série

$$\sum_{x=1}^{+\infty} x^n f(\Psi(x))$$

diverge, tandis que $\mathcal{H}^f(\mathcal{K}_n(\Psi)) = 0$ dans le cas contraire.

Le Théorème 1 est à rapprocher du Satz 4 de Jarník [16], reproduit ci-dessous avec des notations différentes.

Théorème F. *Soit $n \geq 1$ un entier. Soit Ψ une fonction positive, décroissante et de limite nulle à l'infini. Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ une fonction croissante telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to 0} f(x)/x^n = +\infty$. Supposons que la série $\sum_{x=1}^{+\infty} x^n \Psi^n(x)$ converge et que les fonctions $x \mapsto x^{n+1} f(2\Psi(x))$ et $x \mapsto x^{n+1}\Psi(x)$ sont décroissantes. On a alors $\mathcal{H}^f(\mathcal{W}_n(\Psi)) = +\infty$ si la série*

$$\sum_{x=1}^{+\infty} x^n f(2\Psi(x))$$

diverge, tandis que $\mathcal{H}^f(\mathcal{W}_n(\Psi)) = 0$ *dans le cas contraire.*

Ici $\mathcal{H}^f$ désigne la f-mesure de Hausdorff d'un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$. De même que dans le Théorème 1, la valeur de $\mathcal{H}^f$ dépend du comportement de la série de terme général $x^n f(\Psi(x))$. On constate ainsi une nouvelle fois un parallèle entre l'approximation rationnelle simultanée et l'approximation par des nombres algébriques de degré borné.

Le Théorème 1 appelle plusieurs autres commentaires.

Comparaison avec les résultats antérieurs. L'assertion sur la mesure de Lebesgue de $\mathcal{K}_n(\Psi)$ est la conclusion du Théorème D. Le Théorème 1 donne des informations métriques précises sur la structure de cet ensemble, qui complètent celles du Théorème C de Baker & Schmidt. En particulier, le Théorème 1 ne se déduit pas du Lemma 1 de [2] combiné au résultat de Beresnevich cité dans la partie 4 (Théorème G). Pour le voir, choisissons par exemple $n = 2$ et la fonction Ψ définie pour $x > 1$ par $\Psi(x) = x^{-3}|\log x|^{-2}$. Soient ε un réel et f_ε la fonction définie pour $x > 0$ par $x \mapsto x|\log x|^{1+\varepsilon}$. Le Théorème 1 affirme que $\mathcal{H}^{f_\varepsilon}(\mathcal{K}_n(\Psi)) = +\infty$ si ε est positif ou nul et $\mathcal{H}^{f_\varepsilon}(\mathcal{K}_n(\Psi)) = 0$ sinon. Il est assez facile de voir qu'en appliquant le Lemma 1 de [2] avec un système régulier donné par le Théorème G ci-après, on obtient simplement que $\mathcal{H}^{f_\varepsilon}(\mathcal{K}_n(\Psi)) = +\infty$ si ε est supérieur à 1. La démonstration du Théorème 1 requiert donc des idées nouvelles.

Valeur de la mesure à l'exposant critique. Le Théorème 1 affirme que la f-mesure d'un ensemble $\mathcal{K}_n(\Psi)$ est soit nulle, soit infinie. Ainsi, un tel ensemble n'est pas un s-ensemble (la définition est rappelée dans la partie 3). Dans le cas particulier où Ψ est une fonction puissance, ce résultat est dû à Dodson [11].

La condition technique (1). Elle s'avère très peu restrictive. Elle n'apparaît pas dans le travail de Jarník [16] ni dans [8], puisque nous contrôlons la répartition des nombres rationnels de même dénominateur. Cependant, nous n'avons pas de résultat aussi précis lorsque l'on considère la répartition des nombres algébriques de même hauteur : le Théorème G ci-après, qui est à la base de notre travail, autorise la hauteur à varier légèrement. Si ce théorème reste vrai avec la constante $c_1(n)$ égale à 1, alors la conclusion du Théorème 1 est vraie même si la condition (1) n'est pas vérifiée.

Contraintes simultanées. Un examen attentif de la démonstration du Théorème 1 montre que, sous certaines conditions, on peut calculer la dimension de Hausdorff généralisée d'ensembles de réels bien approchables par des nombres algébriques de différents degrés. Par exemple, soient $n \geq 1$ et $k \geq 1$ des entiers, et notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des réels ξ pour lesquels les inégalités

$$|\xi - \alpha| < H(\alpha)^{-n-j-1}\big(\log H(\alpha)\big)^{-2}$$

sont, pour chaque $0 \leq j \leq k$, vérifiées par une infinité de nombres algébriques α de degré $n + j$. Si f_ε est la fonction $x \mapsto x|\log x|^{1+\varepsilon}$, on montre que $\mathcal{H}^{f_\varepsilon}(\mathcal{E}) = +\infty$ si $\varepsilon \geq 0$ et $\mathcal{H}^{f_\varepsilon}(\mathcal{E}) = 0$ sinon. Pour le voir, l'idée consiste, lors de la construction de l'ensemble de Cantor expliquée dans la partie 5, à utiliser alternativement les systèmes réguliers de nombres algébriques de degré $n + j$, avec $0 \leq j \leq k$. Cependant, contrairement à la méthode de Baker & Schmidt [2], la nôtre ne nous autorise pas à imposer un nombre infini de telles contraintes : ceci est dû à la dépendance en le degré n dans le Théorème G ci-après. Il semblerait que la notion d'ensemble intersectif, introduite par Falconer (voir [13] et le chapitre 8 de [14]), permette toutefois de résoudre ce problème. Nous étudierons cette méthode dans un travail ultérieur.

Le cas non-archimédien. La démonstration du Théorème 1 repose essentiellement sur le fait que les nombres algébriques de degré fixé forment un système régulier. Beresnevich et Kovalevskaya m'ont annoncé avoir prouvé un tel résultat dans le cadre p-adique. Il devrait donc être possible d'obtenir l'analogue non-archimédien du Théorème 1.

Approximation par des nombres algébriques de degré borné. Il est facile de voir que le Théorème 1 reste vrai si l'on remplace l'ensemble $\mathbf{A}_n$, qui intervient dans la définition de $\mathcal{K}_n(\Psi)$, par l'ensemble $\tilde{\mathbf{A}}_n$.

Notre Théorème 1 est motivé par le problème suivant. Étant données deux fonctions décroissantes positives Ψ_1 et Ψ_2 telles que les séries $\sum_{i=1}^{\infty} x^n \Psi_i(x)$ $(i = 1, 2)$ convergent et vérifient

$$\Psi_1(x) < \Psi_2(x) \quad \text{pour } x \text{ assez grand,}$$

existe-t-il des nombres réels bien approchables par des éléments de $\mathbf{A}_n$ à l'ordre Ψ_2, mais pas à l'ordre Ψ_1 ? En d'autres termes, l'ensemble

$$\mathcal{K}_n(\Psi_2) \setminus \mathcal{K}_n(\Psi_1)$$

est-il vide ou non ?

Cette question est résolue par Jarník ([16], Satz 5) lorsque $n = 1$ et, jusqu'à présent, le seul résultat couvrant le cas $n \geq 2$ est dû à Baker & Schmidt [2], qui résolvent le problème lorsque les Ψ_i sont des fonctions puissances. Il peut s'exprimer à l'aide de la notion d'ordre exact d'approximation qui figure dans [9]. Pour cela, on considère pour $\tau > 1$ l'ensemble

$$\mathcal{K}_n(\tau) := \left\{\xi \in \mathbf{R} : |\xi - \alpha| < (H(\alpha))^{-(n+1)\tau} \text{ pour une infinité de } \alpha \in \mathbf{A}_n\right\},$$

et l'ordre exact du réel ξ est par définition

$$\tau_n(\xi) := \sup\{\tau : \xi \in \mathcal{K}_n(\tau)\}.$$

Baker & Schmidt [2] ont montré que la dimension de Hausdorff de l'ensemble

$$\mathcal{E}_n(\tau) := \{\xi \in \mathbf{R} : \tau_n(\xi) = \tau\},$$

formé des réels d'ordre exact égal à $\tau > 1$ vaut $1/\tau$.

Le Théorème 1 apporte une réponse positive au problème ci-dessus modulo une hypothèse très légèrement restrictive sur les fonctions Ψ_1 et Ψ_2.

Théorème 2. *Soit $n \geq 2$. Soient Ψ_1 et Ψ_2 deux fonctions continues, décroissantes, positives, telles que les séries $\sum_{i=1}^{\infty} x^n \Psi_i(x)$ $(i = 1, 2)$ convergent. On suppose que la fonction*

$$x \mapsto \frac{\Psi_1^{-1} \circ \Psi_2(x)}{x}$$

est croissante et tend vers l'infini avec x. Alors l'ensemble

$$\mathcal{K}_n(\Psi_2) \setminus \mathcal{K}_n(\Psi_1)$$

n'est pas vide.

L'exemple suivant montre que le Théorème 2 possède un vaste champ d'applications. En convenant que, pour tout entier $i \geq 1$, la i-ème itérée de la fonction exponentielle est notée $\exp_i$, on définit sur $\mathbf{R}_{\geq 0}$ la fonction Θ comme l'unique fonction continue, affine sur tout intervalle $[\exp_i 0, \exp_{i+1} 0]$ avec $i \geq 1$, qui vérifie $\Theta(x) = 1$ si $0 \leq x \leq e$ et $\Theta(\exp_i 0) = i$ pour tout entier $i \geq 1$. Soit $\tau > 1$ un réel. Pour $x > 0$, posons

$$\Psi_1(x) = x^{-(n+1)\tau}\, \Theta(x)^{-1}$$

et

$$\Psi_2(x) = x^{-(n+1)\tau}.$$

Les hypothèses du Théorème 2 étant satisfaites, on en déduit que l'ensemble $\mathcal{K}_n(\Psi_2) \setminus \mathcal{K}_n(\Psi_1)$ n'est pas vide. Ce résultat ne se déduit pas des Théorèmes 3 et 4 ci-dessous, puisque Θ croît moins vite que toute itérée de la fonction logarithme.

L'exemple suivant illustre cependant les limites d'application du Théorème 2. Soient $0 < c_1 < c_2$ et $\tau > 1$ des réels. Il est facile de voir que le Théorème 2 ne s'applique pas aux fonctions définies sur $\mathbf{R}_{>0}$

$$\Psi_i : x \longmapsto c_i\, x^{-(n+1)\tau}, \qquad i = 1, 2,$$

car la fonction $x \mapsto (\Psi_1^{-1} \circ \Psi_2(x))/x$ tend vers 1 quand x tend vers l'infini. Il ne permet donc pas de résoudre le problème ouvert suivant.

Question. *Existe-t-il des nombres réels ξ tels qu'une infinité de nombres algébriques α de degré n vérifient $|\xi - \alpha| < c_2 H(\alpha)^{-(n+1)\tau}$, mais que seul un nombre fini d'entre eux vérifie $|\xi - \alpha| < c_1 H(\alpha)^{-(n+1)\tau}$?*

Dans le cas de l'approximation rationnelle, cette question a été résolue par l'affirmative par Jarník [15], à l'aide de la théorie des fractions continues.

À l'instar de Dickinson & Velani, qui ont détaillé dans [9] d'intéressantes conséquences du Theorem 1 de [8], nous pouvons étudier une notion d'ordre exact plus fine que celle définie ci-dessus : l'ordre logarithmique exact. On convient de noter dans toute la suite $\log_i r$ le logarithme itéré

$$\underbrace{\log \circ \ldots \circ \log r}_{i \text{ fois}}.$$

Pour $n \geq 1$ et $t \geq 1$, on se donne des réels $\nu_0 \geq 1, \nu_1, \ldots, \nu_{t-1}$, on pose $\tilde{\nu} := (\nu_0, \ldots, \nu_{t-1})$, et, pour $\tau \neq 0$, on considère l'ensemble $\mathcal{K}_n(\tilde{\nu}, \tau) := \mathcal{K}_n(\nu_0, \ldots, \nu_{t-1}, \tau)$ des réels ξ pour lesquels l'inégalité

$$|\xi - \alpha| < (H(\alpha))^{-(n+1)\nu_0} \big(\log(H(\alpha))\big)^{-\nu_1} \ldots \big(\log_{t-1}(H(\alpha))\big)^{-\nu_{t-1}} \big(\log_t H(\alpha)\big)^{-\tau}$$

est vérifiée par une infinité de nombres algébriques $\alpha \in \mathbf{A}_n$. Le $\tilde{\nu}$-ordre exact du réel ξ est par définition

$$\tau_{n,\tilde{\nu}}(\xi) := \sup\{\tau : \xi \in \mathcal{K}_n(\tilde{\nu}, \tau)\}.$$

On convient de noter $\tilde{\nu} = (0)$ pour $t = 0$. On a alors

$$\mathcal{K}_n((0), \tau) = \mathcal{K}_n(\tau) \quad \text{et} \quad \tau_{n,(0)}(\xi) = \tau_n(\xi).$$

Pour tout $\tilde{\nu} = (\nu_0, \ldots, \nu_{t-1})$ et pour tout réel ν_t, on pose alors $\underline{\nu} = (\nu_0, \ldots, \nu_{t-1}, \nu_t)$ et on considère l'ensemble

$$\mathcal{E}_n(\underline{\nu}) := \mathcal{E}_n(\tilde{\nu}, \nu_t) = \{\xi \in \mathbf{R} : \tau_{n,\tilde{\nu}}(\xi) = \nu_t\},$$

formé des réels dont le $\tilde{\nu}$-ordre d'approximation est égal à ν_t. Lorsque $t = 0$, on a en particulier

$$\mathcal{E}_n((0), \nu_0) = \mathcal{E}_n(\nu_0).$$

Le Théorème 1 nous permet de décrire très précisément la structure métrique des ensembles $\mathcal{E}_n(\underline{\nu})$. Nous allons montrer que leur dimension de Hausdorff est égale à $1/\nu_0$, indépendamment des ν_i, $i \geq 1$. Cependant, ces ensembles ont des mesures différentes. Pour le voir, nous sommes amenés à introduire les fonctions dimension suivantes.

Soient $\underline{\nu} = (\nu_0, \ldots, \nu_t)$ et $\delta \geq 0$. On définit la fonction dimension f_δ par

$$f_\delta(u) := u^{\delta + 1/\nu_0} \quad \text{si } t = 0,$$

et

$$f_\delta(u) := u^{1/\nu_0} \prod_{i=1}^{t-1} \left(\log_i \frac{1}{u}\right)^{-1+\nu_i/\nu_0} \left(\log_t \frac{1}{u}\right)^{-1-\delta+\nu_t/\nu_0} \qquad \text{si } t \geq 1.$$

Avec les notations ci-dessus, les résultats suivants découlent assez facilement du Théorème 1.

Théorème 3. *Soit $n \geq 1$. Soit $\underline{\nu} = (\nu_0, \ldots, \nu_t)$ avec $\nu_0 > 1$. Alors la dimension de Hausdorff de $\mathcal{E}_n(\underline{\nu})$ est égale à $1/\nu_0$ et, plus précisément,*

$$\mathcal{H}^{f_\delta}(\mathcal{E}_n(\underline{\nu})) = \begin{cases} \infty & \text{si } \delta = 0 \\ 0 & \text{si } \delta > 0 \end{cases}.$$

Théorème 4. *Soit $n \geq 1$. Soit $\underline{\nu} = (\nu_0, \ldots, \nu_t)$ avec $\nu_0 = 1$. Si $\nu_i = 1$ pour tout $0 \leq i \leq t$, alors $\mathcal{E}_n(\underline{\nu})$ est un ensemble de mesure de Lebesgue totale, sa dimension de Hausdorff est égale à 1 et*

$$\mathcal{H}^g(\mathcal{E}_n(\underline{\nu})) = 0,$$

pour toute fonction dimension g vérifiant

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} = 0.$$

Dans les autres cas, la mesure de Lebesgue de $\mathcal{E}_n(\underline{\nu})$ est nulle. En outre, s'il existe $1 \leq k \leq t$ tel que

$$\nu_1 = \ldots = \nu_{k-1} = 1 \quad \textit{et } \nu_k > 1,$$

alors

$$\dim(\mathcal{E}_n(\underline{\nu})) = 1$$

et, plus précisément,

$$\mathcal{H}^{f_\delta}(\mathcal{E}_n(\underline{\nu})) = \begin{cases} \infty & \textit{si } \delta = 0 \\ \\ 0 & \textit{si } \delta > 0 \end{cases}.$$

Dans le cas $n = 1$, le Théorème 3 (*resp.* 4) est contenu dans le Theorem 1 (*resp.* 2) de Dickinson & Velani [9]. Le Théorème 4 ne donne aucune information sur la dimension de l'ensemble $\mathcal{E}_n(\underline{\nu})$ lorsqu'il existe un entier $k \geq 1$ pour lequel

$$\nu_0 = \ldots = \nu_{k-1} = 1 \quad \text{et } \nu_k < 1,$$

alors que l'on sait que sa mesure de Lebesgue est nulle. Ainsi, et ce problème semble difficile, on ignore si l'ensemble $\mathcal{E}_1((1, 0.5))$ est vide ou non.

3. Dimension et mesure de Hausdorff

Afin de comparer des ensembles de mesure de Lebesgue nulle, on introduit les notions de *mesure* et de *dimension de Hausdorff*. Nous en rappelons brièvement les définitions et certaines propriétés, le lecteur intéressé par de plus amples informations peut consulter les ouvrages [17], [12], [14] ou [5].

Si U est un sous-ensemble non vide de $\mathbf{R}$, son *diamètre*, noté $\mathrm{diam}(U)$, est par définition

$$\mathrm{diam}(U) = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}.$$

Soit $\delta > 0$, si les sous-ensembles E et U_i de $\mathbf{R}$ vérifient $E \subset \bigcup_i U_i$ et $0 < \mathrm{diam}(U_i) \leq \delta$ pour tout i, alors on dit que $\{U_i\}$ forme un *δ-recouvrement* de E.

Ces notions de base étant maintenant définies, donnons-nous une *fonction dimension* f, c'est-à-dire une fonction définie sur $\mathbf{R}^+$, nulle à l'origine et croissante. Pour $\delta > 0$, on définit

$$h(f, \delta, E) := \inf \sum_j f\big(\mathrm{diam}(U_j)\big),$$

où l'inf porte sur tous les δ-recouvrements $\{U_j\}$ dénombrables de E. Il est clair que $h(f, \delta, E)$ est une fonction décroissante de δ. Ainsi

$$\mathcal{H}^f(E) := \sup_{\delta > 0} h(f, \delta, E)$$

est bien défini dans $[0, +\infty]$: il s'agit de la mesure de E relativement à la fonction f. Si $E_1, E_2, \ldots$ sont des sous-ensembles de $\mathbf{R}$ (en nombre au plus dénombrable) et si l'on note E leur réunion, alors

$$\min_i \mathcal{H}^f(E_i) \leq \mathcal{H}^f(E) \leq \sum_i \mathcal{H}^f(E_i). \tag{2}$$

En général, on choisit pour f une fonction puissance $x \mapsto x^s$, où $s > 0$, et l'on note $\mathcal{H}^s(E)$ au lieu de $\mathcal{H}^f(E)$. La *dimension* de Hausdorff de E est alors l'unique réel $s_0 \geq 0$ tel que

$$\mathcal{H}^s(E) = 0 \qquad \text{si } s > s_0$$

et

$$\mathcal{H}^s(E) = +\infty \qquad \text{si } s < s_0.$$

En d'autres termes,

$$s_0 = \inf\{s : \mathcal{H}^s(E) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(E) = +\infty\},$$

et l'on note

$$\dim(E) = s_0.$$

Si $\mathcal{H}^{s_0}(E)$ est fini et non nul, E est appelé un s_0-ensemble et possède alors d'intéressantes propriétés (voir [11, Chapter 5]). Par ailleurs, on sait que $\mathcal{H}^{\mathrm{Id}} := \mathcal{H}^1$ est la mesure de Lebesgue (sur $\mathbf{R}$).

Ce qui précède revient à discriminer les ensembles de mesure nulle à l'aide de l'échelle de fonctions $x \mapsto x^s$. Cependant, cette échelle n'est pas très fine, et, dans certaines situations (voir par exemple les Théorèmes 3 et 4), on est amené à considérer d'autres fonctions dimensions. Par exemple, si l'on utilise l'échelle $g_t : x \mapsto x|\log x|^t$, on peut également définir le réel $t_0 \geq 0$ comme vérifiant

$$\mathcal{H}^{g_t}(E) = 0 \qquad \text{si } t < t_0$$

et

$$\mathcal{H}^{g_t}(E) = +\infty \qquad \text{si } t > t_0.$$

Si f et g sont deux fonctions dimension, on dit que f correspond à une dimension généralisée plus petite que g et on note $f \prec g$ si

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

L'ordre induit par $\prec$ n'est pas un ordre total car il existe des fonctions dimension f et g vérifiant

$$\liminf_{x \to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \quad \text{et} \quad \limsup_{x \to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty.$$

Lemme 1. *Soient f, g et h des fonctions dimensions vérifiant $f \prec g \prec h$. Si l'ensemble E vérifie $0 < \mathcal{H}^g(E) < +\infty$, alors $\mathcal{H}^h(E) = 0$ et $\mathcal{H}^f(E) = +\infty$. Ainsi, si on a $\mathcal{H}^g(E) = 0$ (resp. $\mathcal{H}^g(E) = +\infty$), alors $\mathcal{H}^h(E) = 0$ (resp. $\mathcal{H}^f(E) = +\infty$).*

Démonstration : Il s'agit du Corollary qui suit le Theorem 40 de Rogers. □

La détermination de la dimension de Hausdorff (ou le calcul de sa f-dimension) d'un ensemble E est dans la plupart des cas un problème difficile. Il est cependant souvent possible de la majorer en appliquant le lemme Cantelli (voir par exemple [5], page 4), le majorant obtenu étant en général (mais pas toujours, voir [10]) la valeur exacte de la dimension.

Différentes méthodes permettant de minorer la dimension de Hausdorff d'un ensemble $E \subset \mathbf{R}$ figurent dans [14]. Parmi celles-ci figure le principe de distribution de masses, utilisé au cours de la démonstration du Théorème 1.

Lemme 2. *Soit m une mesure de probabilité, de support un ensemble borné $E \subset \mathbf{R}$. Supposons qu'il existe $\lambda > 0$ et $\delta > 0$ tels que*

$$m(J) \leq \lambda f(|J|),$$

pour tout intervalle J de longueur $|J| \leq \delta$. On a alors

$$\mathcal{H}^f(E) \geq \frac{1}{\lambda}.$$

Démonstration : Quoique la preuve figure dans [8], nous la retranscrivons ci-dessous. Si $\{U_i\}$ constitue un ρ-recouvrement de E, avec $\rho \leq \delta$, alors, en notant $\tilde{U}_i$ le plus petit intervalle contenant U_i, on a

$$1 = m(E) = m\Big(\bigcup_i U_i\Big) \leq \sum_i m(U_i) \leq \sum_i m(\tilde{U}_i) \leq \lambda \sum_i f\big(\mathrm{diam}(U_i)\big).$$

On en déduit que $h(f, \rho, E) \geq \lambda^{-1}$ pour tout $\rho \leq \delta$. Le résultat suit en faisant tendre δ vers 0. □

4. Systèmes réguliers

Les systèmes réguliers ont été introduits par Baker & Schmidt [2] et constituent un précieux outil pour le calcul de bonnes minorations de la mesure de Hausdorff.

Définition 1. *Un ensemble dénombrable Γ de nombres réels et une fonction $N : \Gamma \mapsto \mathbf{R}^+$ forment un système régulier (Γ, N) si pour tout intervalle borné $J \subset \mathbf{R}$ il existe un réel $K(J) > 0$ et pour tout $K \geq K(J)$ des éléments $\gamma_1, \ldots, \gamma_t \in \Gamma$ tels que*

$$\gamma_j \in J, \;\; N(\gamma_j) \leq K, \;\; |\gamma_j - \gamma_k| \geq K^{-1} \;\; (1 \leq j < k \leq t)$$

et

$$t \geq c_1 |J| K,$$

où $c_1 = c_1(\Gamma, N) > 0$ ne dépend pas de J.

Baker & Schmidt [2] ont montré que, pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\tilde{\mathbf{A}}_n$ des nombres réels algébriques de degré au plus n associé à la fonction

$$N : \alpha \mapsto H(\alpha)^{n+1} (\log H(\alpha))^{-3n(n+1)}$$

forme un système régulier. Leur résultat a tout récemment été considérablement amélioré par Beresnevich [3], qui a obtenu l'énoncé suivant, optimal modulo les constantes numériques.

Théorème G. *Soit $n \geq 1$. Il existe des réels $c_1(n)$ et $c_2(n)$ vérifiant la propriété suivante. Pour tout intervalle borné $J \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ il existe un réel $K(J) > 0$ et pour tout $K \geq K(J)$ des nombres algébriques $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \mathbf{A}_n$ tels que*

$$c_1^{-1}(n)K \leq H(\alpha_j) \leq c_1(n)K, \quad |\alpha_j - \alpha_k| \geq K^{-n-1} \quad (1 \leq j < k \leq t)$$

et

$$t \geq c_2(n)|J|K^{n+1}.$$

On peut choisir $c_1(n) = 2^{n+2}$ et $c_2(n) = \left(n^n 2^{5n^2+9n+7}\right)^{-1}$.

Démonstration : Il s'agit du Theorem 3 de [3], à l'exception de la borne inférieure pour la hauteur. Celle-ci s'obtient cependant facilement à partir de la démonstration de Beresnevich, dont on reprend les notations ci-dessous. Quitte à diviser ses coefficients par leur plus grand diviseur commun, on peut en effet supposer que le polynôme P obtenu [3, page 104] par application du théorème de Minkowski est primitif et satisfait les inégalités (19) de [3]. Par conséquent, la minoration (20) de [3] est vérifiée, et elle se réécrit

$$|na_n x^{n-1} + \ldots + 2a_2 x + a_1| > Q/2.$$

Comme $|x| \leq 1/2$, il vient $n(n+1)H(P) > Q/2$ et donc $H(P) > Q/(2n(n+1)) \geq 2^{-n-2}Q$. Beresnevich montre alors que P est irréductible, d'où $H(\alpha) = H(P) > 2^{-n-2}Q$. □

Le Théorème G signifie que, quel que soit l'intervalle borné $J \subset \mathbf{R}$, si H est suffisamment grand (en fonction de J), alors les nombres algébriques de degré n qui appartiennent à J et dont la hauteur est de l'ordre de H sont bien répartis dans le sens suivant : la mesure de Lebesgue de l'ensemble des points de J qui se trouvent à une distance comparable à H^{-n-1} d'un tel nombre algébrique est au moins égale à $c_2(n)|J|$.

5. Démonstration du Théorème 1

Soient $n \geq 2$ un entier et f et Ψ deux fonctions satisfaisant les hypothèses de l'énoncé.

Supposons tout d'abord que la série $\sum_{x=1}^{+\infty} x^n f(\Psi(x))$ converge et montrons qu'alors $\mathcal{H}^f(\mathcal{K}_n(\Psi)) = 0$. Pour tout $H_0 > 0$, l'ensemble $\mathcal{K}_n(\Psi)$ est clairement inclus dans la réunion des intervalles réels centrés en les nombres algébriques $\alpha \in \mathbf{A}_n$ de hauteur $\geq H_0$ et de rayon $\Psi(H(\alpha))$. Pour tout entier $H > H_0$ on a

$$\sum_{\substack{\deg(\alpha) \leq n \\ H_0 \leq H(\alpha) \leq H}} f\big(\Psi(H(\alpha))\big) \leq \sum_{k=H_0}^{H} n(n+1)(2k+1)^n f(\Psi(k)).$$

En effet, il y a au plus $(n+1)(2k+1)^n$ polynômes de degré $\leq n$ et de hauteur égale à k, chacun ayant au plus n racines réelles. D'après l'hypothèse, le membre de gauche de l'inégalité ci-dessus a une limite finie lorsque H tend vers l'infini. Par conséquent, la série

$$\sum_{\substack{\deg(\alpha) \leq n \\ H_0 \leq H(\alpha) \leq H}} f\big(\Psi(H(\alpha))\big)$$

converge et le lemme de Cantelli (voir par exemple [5], page 4) entraîne $\mathcal{H}^f(\mathcal{K}_n(\Psi)) = 0$.

Supposons maintenant que la série $\sum_{x=1}^{+\infty} x^n f(\Psi(x))$ diverge. On se fixe un réel $\lambda > 0$ et l'on va montrer qu'alors $\mathcal{H}^f(\mathcal{K}_n(\Psi)) > \lambda^{-1}$. Tout d'abord, on observe, d'après les propriétés de la mesure de Hausdorff, que l'on peut se contenter d'établir le résultat sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et non sur $\mathbf{R}$ tout entier. Nous allons construire un sous-ensemble de Cantor $\mathbf{K} \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et définir une mesure de probabilité à support dans $\mathbf{K}$. Nous conclurons en appliquant le Lemme 2. Dans ce but, nous construisons une suite décroissante d'ensembles $\mathbf{K}(0) := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \supset \mathbf{K}(1) \supset \ldots$, qui sont des réunions finies d'intervalles fermés.

Notre démarche s'inspire de celle de Jarník. Dans le processus inductif de construction d'intervalles compacts, on associe à tout intervalle obtenu à l'étape ℓ des sous-intervalles de longueur contrôlée et suffisamment éloignés les uns des autres. L'intersection de tous ces intervalles constitue notre ensemble de Cantor $\mathbf{K}$, sur lequel on définit une mesure de probabilité μ. On conclut en appliquant le Lemme 2. Cette démarche, également suivie par Dickinson & Velani [8], est très bien expliquée dans l'ouvrage de Falconer [14].

- Construction de sous-intervalles compacts d'un intervalle fixé.

Le résultat suivant constitue le point-clef de la démonstration du Théorème 1. Il s'agit d'une généralisation de la Hilfssatz 3 de Jarník [16].

Proposition 1. *Soient $J \subset [-1/2, 1/2]$ un intervalle compact, $n \geq 2$ un entier et $H_0 > 1$ un réel. Soit F une fonction positive telle que $x \mapsto x^n F(x)$ soit décroissante et que la série $\sum_{x=1}^{\infty} x^n F(x)$ diverge. On suppose également que :*

$$\text{Pour tout réel } a > 0, \ \liminf_{x \to \infty} \frac{F(ax)}{F(x)} > 0. \tag{3}$$

Il existe alors une constante $c_3 = c_3(n, F) > 0$ et des nombres algébriques $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ appartenant à $\mathbf{A}_n \cap J$, de hauteurs au moins égales à H_0, tels que les intervalles

$$\big[\alpha_j - F\big(H(\alpha_j)\big), \alpha_j + F\big(H(\alpha_j)\big)\big], \quad 1 \leq j \leq t,$$

soient deux à deux disjoints et

$$\sum_{j=1}^{t} F\big(H(\alpha_j)\big) \geq c_3 \, |J|.$$

Remarque : D'après la démonstration de la Proposition 1, il est clair que $c_3(n, F) = c_3(n, \lambda F)$ pour tout réel non nul λ.
Démonstration : On se fixe un entier $n \geq 2$ et un intervalle $J \subset [-1, 1]$. On note $m := |J|$ sa longueur et $c_4 = c_1(n)$, $c_5 = c_2(n)$ correspondent aux constantes figurant dans l'énoncé du Théorème G.

Notons $K(J)$ le réel donné par le Théorème G appliqué à l'intervalle J. On choisit un entier K_1 suffisamment grand pour que

$$K_1 > \max\{100, c_4 H_0, K(J), (m c_5)^{-1}\} \quad \text{et } K_1^n F(c_4^{-1} K_1) \leq \frac{1}{100}. \tag{4}$$

Comme la série $\sum_{x=1}^{\infty} x^n F(x)$ diverge et que $x \mapsto x^n F(x)$ décroît, la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (kc_4^{-1}K_1)^n F(kc_4^{-1}K_1)$$

diverge et il découle de (4) qu'il existe un entier $M > 2$ tel que l'on ait

$$1/25 \leq \sum_{k=1}^{M} (kK_1)^n F(kc_4^{-1}K_1) \leq 1/20. \tag{5}$$

Les constantes numériques 1/20, 1/25 et 1/100 apparaissant dans (4) et (5) n'ont pas de signification particulière, l'essentiel est qu'elles soient assez petites.

Le Théorème G appliqué à l'intervalle J avec le réel K_1 assure l'existence de $[c_5 m K_1^{n+1}]$ nombres algébriques $\alpha_1^{(1)} < \ldots < \alpha_{[c_5 m K_1^{n+1}]}^{(1)} \in \mathbf{A}_n$ vérifiant

$$H_0 \leq c_4^{-1} K_1 \leq H\big(\alpha_j^{(1)}\big) \leq c_4 K_1 \quad \text{et} \quad |\alpha_j^{(1)} - \alpha_{j'}^{(1)}| \geq K_1^{-n-1} \quad (1 \leq j < j' \leq [c_5 m K_1^{n+1}]).$$

On considère alors les intervalles

$$I^{(1)}\big(\alpha_j^{(1)}\big) := \big[\alpha_j^{(1)} - F(c_4^{-1}K_1), \alpha_j^{(1)} + F(c_4^{-1}K_1)\big]$$

centrés en les nombres algébriques $\alpha_j^{(1)}$ avec j congru à 1 modulo K_1 et $j < [c_5 m K_1^n/2]K_1 + 1$. Ceux-ci sont au nombre de $[c_5 m K_1^n/2]$ et deux à deux distants d'au moins K_1^{-n}. Or il résulte de (4) que $F(c_4^{-1}K_1) < K_1^{-n}/2$, donc les intervalles $I^{(1)}\big(\alpha_j^{(1)}\big)$ sont disjoints et la somme de leurs longueurs est égale à $2[c_5 m K_1^n/2] F(c_4^{-1}K_1)$. Nous allons maintenant construire inductivement d'autres sous-intervalles de J, deux à deux disjoints, et disjoints des intervalles $I^{(1)}\big(\alpha_j^{(1)}\big)$ retenus.

Dans un souci de clarté, nous détaillons la seconde étape du processus de construction avant d'expliquer le pas récurrent.

Nous appliquons le Théorème G avec le réel $2K_1$. On dispose alors de $[2^{n+1} c_5 m K_1^{n+1}]$ nombres algébriques $\alpha_1^{(2)}, \ldots, \alpha_{[2^{n+1} c_5 m K_1^{n+1}]}^{(2)}$, deux à deux distants d'au moins $(2K_1)^{-n-1}$, et de hauteur vérifiant

$$H_0 \leq 2c_4^{-1} K_1 \leq H\big(\alpha_j^{(2)}\big) \leq 2c_4 K_1 \quad (1 \leq j \leq [2^{n+1} c_5 m K_1^{n+1}]).$$

Au maximum,

$$E^{(2)} := \frac{2c_5 m K_1^n F(c_4^{-1}K_1)}{(2K_1)^{-n-1}} + c_5 m K_1^n$$

d'entre eux se trouvent dans un des intervalles

$$\big[\alpha_j^{(1)} - 2F(c_4^{-1}K_1), \alpha_j^{(1)} + 2F(c_4^{-1}K_1)\big],$$

où les $\alpha_j^{(1)}$ sont les $[c_5 m K_1^n/2]$ nombres algébriques retenus lors de la première étape, et l'on déduit de (5) et (4) que $E^{(2)} \leq \left[2^{n+1} c_5 m K_1^{n+1}\right]/3$. Si $\alpha_j^{(2)}$ n'est pas l'un de ces $E^{(2)}$ nombres, l'intervalle

$$I^{(2)}\big(\alpha_j^{(2)}\big) := \left[\alpha_j^{(2)} - F(2c_4^{-1}K_1), \alpha_j^{(2)} + F(2c_4^{-1}K_1)\right]$$

ne rencontre aucun des intervalles $I^{(1)}\big(\alpha_{j'}^{(1)}\big)$ puisque, comme F décroît, $F(2c_4^{-1}K_1) \leq F(c_4^{-1}K_1)$ et $|\alpha_j^{(2)} - \alpha_{j'}^{(1)}| > 2F(c_4^{-1}K_1)$ pour tout j et tout j'. Il reste à s'assurer que l'on peut choisir suffisamment de tels intervalles $I^{(2)}\big(\alpha_j^{(2)}\big)$ deux à deux disjoints. La minoration de $E^{(2)}$ entraîne que l'on dispose d'au moins $\lceil 2^n c_5 m K_1^{n+1} \rceil$ intervalles, et l'on sait que leurs centres sont à des distances mutuelles au moins égales à $(2K_1)^{-n-1}$. En ordonnant ces centres par ordre croissant et en choisissant le premier, le $(2K_1+1)$-ième, le $(4K_1+1)$-ième, etc, il nous reste $[2^{n-1} c_5 m K_1^n]$ centres distants d'au moins $2^{-n} K_1^{-n}$. Les intervalles correspondants ne se rencontrent pas car $F(2c_4^{-1}K_1) < 2^{-n-1}K_1^{-n}$, par (4).

Soit maintenant un entier k vérifiant $3 \leq k \leq M$. Pour tout $1 \leq \ell \leq k-1$, on suppose avoir construit, en procédant comme ci-dessus, $[\ell^n c_5 m K_1^n/2]$ intervalles

$$I^{(\ell)}\big(\alpha_j^{(\ell)}\big) := \left[\alpha_j^{(\ell)} - F(\ell c_4^{-1}K_1), \alpha_j^{(\ell)} + F(\ell c_4^{-1}K_1)\right], \quad 1 \leq j \leq [\ell^n c_5 m K_1^n/2],$$

deux à deux disjoints et centrés en des nombres algébriques $\alpha_j^{(\ell)}$ de degré n. D'après le Théorème G appliqué à l'intervalle J et au réel kK_1 il existe $[k^{n+1} c_5 m K_1^{n+1}]$ nombres algébriques $\alpha_1^{(k)}, \ldots, \alpha_{[k^{n+1}c_5 m K_1^{n+1}]}^{(k)}$, deux à deux distants d'au moins $(kK_1)^{-n-1}$, et de hauteur vérifiant

$$H_0 \leq k c_4^{-1} K_1 \leq H\big(\alpha_j^{(k)}\big) \leq k c_4 K_1 \quad (1 \leq j \leq [k^{n+1} c_5 m K_1^{n+1}]).$$

Au maximum,

$$\begin{aligned} E^{(k)} :=& \frac{2c_5 m K_1^n \big(F(c_4^{-1}K_1) + 2^n F(2c_4^{-1}K_1) + \ldots + (k-1)^n F\big((k-1)c_4^{-1}K_1\big)\big)}{(kK_1)^{-n-1}} \\ & + c_5 m K_1^n (1 + 2^n + \ldots + (k-1)^n) \end{aligned}$$

d'entre eux se trouvent dans un des intervalles

$$\left[\alpha_j^{(\ell)} - 2F(\ell c_4^{-1}K_1), \alpha_j^{(\ell)} + 2F(\ell c_4^{-1}K_1)\right],$$

avec $\ell \geq 1$. Il découle de (4), (5) et de la majoration facile

$$1 + 2^n + \ldots + (k-1)^n \leq \frac{k^{n+1}}{(n+1)}$$

que

$$E^{(k)} \leq 2c_5 m k^{n+1} K_1^{n+1} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{4K_1(n+1)}\right) \leq \frac{[k^{n+1} c_5 m K_1^{n+1}]}{3}.$$

De même que lors de l'étape précédente, la décroissance de la fonction F entraîne qu'il existe au moins
$$[k^{n+1}c_5 m K_1^{n+1}] - E^{(k)} \geq \lceil k^{n+1}c_5 m K_1^{n+1}/2\rceil$$
intervalles
$$I^{(k)}\big(\alpha_j^{(k)}\big) := \big[\alpha_j^{(k)} - F(kc_4^{-1}K_1), \alpha_j^{(k)} + F(kc_4^{-1}K_1)\big]$$
qui ne rencontrent aucun $I^{(\ell)}\big(\alpha_j^{(\ell)}\big)$ avec $1 \leq \ell \leq k-1$. On procède comme ci-dessus pour en choisir $[k^n c_5 m K_1^n/2]$ deux à deux disjoints. Ils ne se rencontrent pas car $F(kc_4^{-1}K_1) \leq k^{-n}K_1^{-n}/2$.

Nous avons ainsi construit des nombres algébriques $\alpha_j^{(\ell)}$, $1 \leq \ell \leq M$, de hauteur contrôlée et dont les distances mutuelles sont également contrôlées. Il nous reste à minorer la somme des $F\big(H(\alpha_j^{(\ell)})\big)$.

Comme la fonction F décroît et que la hauteur des nombres algébriques $\alpha_j^{(\ell)}$ est majorée par $\ell c_4 K_1$, la somme $S := \sum_{\alpha_j} F(H(\alpha_j))$, qui porte sur les nombres algébriques que l'on a retenus dans notre processus de construction, vérifie

$$\begin{aligned}
S &\geq \sum_{k=1}^{M} [c_5 m (kK_1)^n/2] F(kc_4K_1) \\
&\geq \sum_{k=1}^{M} \frac{[c_5 m (kK_1)^n]}{4} F(kc_4K_1) \\
&\geq \frac{c_5 m}{4} \sum_{k=1}^{M} (kK_1)^n F(kc_4^{-1}K_1)\, \frac{F(kc_4K_1)}{F(kc_4^{-1}K_1)}.
\end{aligned}$$

Or (3) entraîne qu'il existe une constante $c_6 > 0$ telle que $F(kc_4K_1) \geq c_6 F(kc_4^{-1}K_1)$ pour tout $k \geq 1$. Par conséquent, il existe une constante $c_3 > 0$, que l'on peut choisir égale à $c_5c_6/100$, vérifiant
$$S \geq c_3\,|J|,$$
comme affirmé. □

- Construction de l'ensemble de Cantor $\mathbf{K}$.

Rappelons que l'on a supposé la fonction $x \mapsto x^n f\big(2\Psi(x)\big)$ décroissante. Compte-tenu de la remarque suivant la Proposition 1, on note $c_7 = c_7(n, f, \Psi)$ la constante positive donnée par la Proposition 1 appliquée à une fonction F non nulle et proportionnelle à $x \mapsto f(2\Psi(x))$. Sans restriction, on peut supposer $c_7 \leq 2$.

On rappelle que l'on s'est fixé un réel $\lambda > 0$. On définit l'ensemble $\mathbf{K}(1)$ en appliquant la Proposition 1 avec l'intervalle $J = \mathbf{K}(0) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, la fonction

$$F : x \mapsto \lambda c_7 |\mathbf{K}(0)| f\big(2\Psi(x)\big)$$

et un réel $H_0 > 1$ tel que

$$F(x) := \lambda c_7 |\mathbf{K}(0)| f(2\Psi(x)) > 2\Psi(x) \quad \text{pour tout } x \geq H_0. \tag{6}$$

Cela est possible car

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{u\to +\infty} \Psi(u) = 0. \tag{7}$$

Nous obtenons ainsi des nombres algébriques $\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_{t_1}^{(1)}$, de hauteurs au moins égales à H_0, vérifiant

$$|\alpha_j^{(1)} - \alpha_{j'}^{(1)}| > F\big(H(\alpha_j^{(1)})\big) + F\big(H(\alpha_{j'}^{(1)})\big) \quad \text{pour } j \neq j',$$

et des intervalles

$$I(1,j) := \big[\alpha_j^{(1)} - F\big(H(\alpha_j^{(1)})\big), \alpha_j^{(1)} + F\big(H(\alpha_j^{(1)})\big)\big]$$

deux à deux disjoints. On note

$$\mathbf{K}(1,j) := \big[\alpha_j^{(1)} - \Psi\big(H(\alpha_j^{(1)})\big), \alpha_j^{(1)} + \Psi\big(H(\alpha_j^{(1)})\big)\big],$$

intervalle qui, par (6), est inclus dans $I(1,j)$. On pose alors

$$\mathbf{K}(1) = \bigcup_{j=1}^{t_1} \mathbf{K}(1,j),$$

la réunion étant disjointe. En outre, la Proposition 1 affirme que la fonction F vérifie

$$\sum_{j=1}^{t_1} F\big(H(\alpha_j^{(1)})\big) \geq c_7 |\mathbf{K}(0)|,$$

et ceci entraîne que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{t_1} f\big(|\mathbf{K}(1,j)|\big) &= \sum_{j=1}^{t_1} f\big(2\Psi\big(H(\alpha_j^{(1)})\big)\big) \\ &= \frac{1}{\lambda c_7 |\mathbf{K}(0)|} \sum_{j=1}^{t_1} F\big(H(\alpha_j^{(1)})\big) \geq \frac{1}{\lambda}. \end{aligned} \tag{8}$$

Supposons maintenant que pour $\ell \geq 1$, l'ensemble $\mathbf{K}(\ell)$ soit bien défini et soit la réunion de t_ℓ intervalles compacts disjoints $\mathbf{K}(\ell,j)$, $1 \leq j \leq t_\ell$, centrés aux points $\alpha_j^{(\ell)}$ et de longueur

$$|\mathbf{K}(\ell,j)| = 2\Psi\big(H(\alpha_j^{(\ell)})\big).$$

L'ensemble $\mathbf{K}(\ell+1)$ est alors la réunion disjointe de sous-intervalles compacts des $\mathbf{K}(\ell, j)$. Pour le construire, nous appliquons la Proposition 1 à chaque $\mathbf{K}(\ell, j)$, mais cette fois avec la fonction

$$F_{\ell,j} : x \to c_7\, f\big(2\Psi(x)\big)\, \frac{|\mathbf{K}(\ell, j)|}{f\big(|\mathbf{K}(\ell, j)|\big)}$$

et avec un réel H_0 choisi de telle sorte que

$$F_{\ell,j}(x) > 2\Psi(x) \qquad \text{pour tout } x \geq H_0. \tag{9}$$

Nous obtenons alors des nombres algébriques $\alpha_i^{(\ell+1,j)}$, $1 \leq i \leq m_{\ell,j}$, de hauteurs au moins égales à H_0, vérifiant

$$|\alpha_i^{(\ell+1,j)} - \alpha_{i'}^{(\ell+1,j)}| \geq F_{\ell,j}\big(H\big(\alpha_i^{(\ell+1,j)}\big)\big) + F_{\ell,j}\big(H\big(\alpha_{i'}^{(\ell+1,j)}\big)\big), \qquad \text{pour } i \neq i',$$

et des intervalles

$$\mathbf{K}(\ell+1, j, i) := \big[\alpha_i^{(\ell+1,j)} - \Psi\big(H\big(\alpha_i^{(\ell+1,j)}\big)\big), \alpha_i^{(\ell+1,j)} + \Psi\big(H\big(\alpha_i^{(\ell+1,j)}\big)\big)\big],$$

qui sont deux à deux disjoints par (9). Pour tout $1 \leq j \leq t_\ell$, on a ainsi construit $m_{\ell,j}$ intervalles $\mathbf{K}(\ell+1, j, i)$, qui sont inclus dans l'intervalle $\mathbf{K}(\ell, j)$. On pose alors

$$\mathbf{K}(\ell+1) := \bigcup_{j=1}^{t_\ell} \bigcup_{i=1}^{m_{\ell,j}} \mathbf{K}(\ell+1, j, i),$$

qui est la réunion de

$$t_{\ell+1} := \sum_{j=1}^{t_\ell} m_{\ell,j}$$

intervalles compacts disjoints.

On observe que, pour $1 \leq j \leq t_\ell$, la Proposition 1 entraîne

$$\sum_{j=1}^{m_{\ell,j}} F_{\ell,j}\big(H(\alpha_i^{(\ell+1,j)})\big) \geq c_7 |\mathbf{K}(\ell, j)|,$$

et donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m_{\ell,j}} f\big(|\mathbf{K}(\ell+1, j, i)|\big) &= \frac{1}{c_7} \sum_{i=1}^{m_{\ell,j}} \frac{f\big(|\mathbf{K}(\ell, j)|\big)}{|\mathbf{K}(\ell, j)|} F_{\ell,j}\big(H\big(\alpha_i^{(\ell+1,j)}\big)\big) \\ &\geq \frac{1}{c_7} \frac{f\big(|\mathbf{K}(\ell, j)|\big)}{|\mathbf{K}(\ell, j)|} c_7 |\mathbf{K}(\ell, j)| = f\big(|\mathbf{K}(\ell, j)|\big). \end{aligned} \tag{10}$$

De (8) et (10) découle facilement le lemme important suivant. On rappelle que, pour tout $\ell \geq 1$, l'ensemble $\mathbf{K}(\ell)$ est composé d'exactement t_ℓ intervalles compacts disjoints.

Lemme 3. *Pour tout $\ell \geq 1$ et tout $1 \leq j \leq t_\ell$, on a*

$$\sum_{i=1}^{m_{\ell,j}} f\big(|\mathbf{K}(\ell+1,j,i)|\big) \geq f\big(|\mathbf{K}(\ell,j)|\big). \tag{11}$$

En outre, pour tout $\ell \geq 1$, on a

$$\sum_{J\in\mathbf{K}(\ell)} f(|J|) \geq \sum_{J\in\mathbf{K}(1)} f(|J|) \geq \frac{1}{\lambda}.$$

Démonstration : La première assertion est la réécriture de (10). Une récurrence facile s'appuyant sur (11) et (8) permet de démontrer la seconde partie du lemme. □

On définit alors l'ensemble de Cantor

$$\mathbf{K} := \bigcap_{\ell=0}^{\infty} \mathbf{K}(\ell).$$

On a clairement

$$\mathbf{K} \subset \mathcal{K}_n(\Psi). \tag{12}$$

En outre, $\mathbf{K}(1)$ dépend du réel λ que l'on s'est donné au départ de la construction. Ainsi, $\mathbf{K}$ dépend également de λ. Pour ne pas alourdir les notations, nous n'indiquons pas cette dépendance par la présence d'un indice supplémentaire.

- Construction d'une mesure de probabilité à support dans $\mathbf{K}$.

Afin d'appliquer le principe de distribution de masse (le Lemme 2), nous allons construire une mesure de probabilité μ à support dans $\mathbf{K}$ telle que pour tout intervalle J de longueur $|J|$ on ait

$$\mu(J) \leq \frac{2\lambda}{c_7} f(|J|). \tag{13}$$

On définit récursivement la mesure μ sur chaque intervalle de $\mathbf{K}(\ell)$ de la façon suivante. On pose $\mu(\mathbf{K}(0)) = 1$ Soit $\ell \geq 0$ et soit J l'un des $t_{\ell+1}$ intervalles compacts formant $\mathbf{K}(\ell+1)$. Avec les notations précédentes, il existe un unique couple (j_0, i_0) avec $1 \leq j_0 \leq t_\ell$ et $1 \leq i_0 \leq m_{\ell,j_0}$ tel que $J = \mathbf{K}(\ell+1, j_0, i_0)$. On pose alors

$$\mu(J) := \frac{f(|J|)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{m_{\ell,j_0}} f(\mathbf{K}(\ell+1,j_0,i))}\, \mu(\mathbf{K}(\ell,j_0)). \tag{14}$$

Chaque intervalle intervenant dans la construction de $\mathbf{K}$ a donc une mesure bien définie. En outre, cette mesure s'étend à tous les boréliens de $\mathbf{K}(0) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (voir par exemple [14], Proposition 1.7).

Fait. *La mesure μ définie ci-dessus est à support dans $\mathbf{K}$ et vérifie, pour tout borélien F inclus dans $\mathbf{K}(0)$,*

$$\mu(F) = \inf_{J \in \mathcal{J}} \mu(J),$$

où l'infimum est pris sur tous les recouvrements $\mathcal{J}$ de F par des intervalles J appartenant à la réunion des $\mathbf{K}(\ell)$, $\ell \geq 0$.

Lemme 4. *Pour tout $\ell \geq 1$ et tout intervalle J appartenant à $\mathbf{K}(\ell)$, on a*

$$\mu(J) \leq \lambda\, f(|J|).$$

En particulier, l'intervalle J vérifie (13).

Démonstration : Soient $\ell \geq 1$, $1 \leq j \leq t_\ell$ et $1 \leq i \leq m_{\ell,j}$. Les intervalles $\mathbf{K}(\ell, j)$ et $\mathbf{K}(\ell+1, j, i)$ appartiennent respectivement aux ensembles $\mathbf{K}(\ell)$ et $\mathbf{K}(\ell+1)$ et vérifient $\mathbf{K}(\ell+1, j, i) \subset \mathbf{K}(\ell, j)$. La définition (14) de μ et (11) entraînent que

$$\frac{\mu(\mathbf{K}(\ell+1, j, i))}{f(|\mathbf{K}(\ell+1, j, i)|)} \leq \frac{\mu(\mathbf{K}(\ell, j))}{f(|\mathbf{K}(\ell, j|))}. \tag{15}$$

Comme $\mu(\mathbf{K}(0)) = 1$ et que, d'après le Lemme 3, $\sum_{J \in \mathbf{K}(1)} f(|J|) \geq 1/\lambda$, la définition de μ implique que $\mu(J) \leq \lambda f(|J|)$ pour tout intervalle J apparteant à $\mathbf{K}(1)$. Ceci, combiné à (15), prouve le Lemme 4 car $c_7 \leq 2$. □

Nous devons maintenant démontrer (13) pour un intervalle arbitraire J. Soit $\delta > 0$ suffisamment petit pour que tout intervalle de longueur δ rencontre au plus une composante de $\mathbf{K}(1)$.

Lemme 5. *Si J est un intervalle inclus dans $\mathbf{K}(0)$ de longueur inférieure à δ, alors*

$$\mu(J) \leq \frac{2\lambda}{c_7}\, f(|J|).$$

Démonstration : On peut supposer que J rencontre $\mathbf{K}$ car sinon on a clairement $\mu(J) = 0$ et (13) est trivialement vérifiée. D'autre part, si J rencontre, pour tout ℓ, une et une seule composante de $\mathbf{K}(\ell)$, alors $\mu(J) = 0$ puisque la longueur des composantes de $\mathbf{K}(\ell)$ tend vers 0 quand ℓ tend vers l'infini : (13) est alors trivialement vérifiée. Il nous reste donc à traiter le cas où il existe un entier ℓ tel que J rencontre exactement un intervalle de $\mathbf{K}(\ell)$, que l'on note, en accord avec les notations précédentes, $\mathbf{K}(\ell, j)$, et au moins deux intervalles de $\mathbf{K}(\ell+1)$, que l'on note $\mathbf{K}(\ell+1, j, 1), \ldots, \mathbf{K}(\ell+1, j, a)$, avec $a \geq 2$. On convient que, pour $1 \leq i \leq a$, l'intervalle $\mathbf{K}(\ell+1, j, i)$ est centré au point α_i et est de longueur $2\Psi(H(\alpha_i))$. Notre choix de δ assure $\ell \geq 1$.

On peut supposer que $\alpha_1 < \ldots < \alpha_a$. On note $F_{\ell,j}$ la fonction que l'on a utilisée pour construire des sous-intervalles compacts de $\mathbf{K}(\ell, j)$. Comme les nombres algébriques α_i et $\alpha_{i'}$, avec $i \neq i'$, sont à une distance supérieure à $F_{\ell,j}(H(\alpha_i)) + F_{\ell,j}(H(\alpha_{i'}))$ l'un de l'autre et que J rencontre tous les intervalles $\mathbf{K}(\ell+1, j, i)$, $1 \leq i \leq a$, on a

$$|J \cap \mathbf{K}(\ell, j)| \geq \sum_{i=1}^{a} F_{\ell,j}\big(H(\alpha_i)\big) - \Psi\big(H(\alpha_1)\big) - \Psi\big(H(\alpha_a)\big).$$

Par (9) et la définition de $F_{\ell,j}$, il vient

$$\begin{aligned} |J \cap \mathbf{K}(\ell, j)| &\geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{a} F_{\ell,j}\big(H(\alpha_i)\big) \\ &\geq \frac{c_7}{2} \frac{|\mathbf{K}(\ell, j)|}{f(|\mathbf{K}(\ell, j)|)} \sum_{i=1}^{a} f\big(2\Psi\big(H(\alpha_i)\big)\big) \\ &\geq \frac{c_7}{2} \frac{|\mathbf{K}(\ell, j)|}{f(|\mathbf{K}(\ell, j)|)} \sum_{i=1}^{a} f\big(|\mathbf{K}(\ell+1, j, i)|\big). \end{aligned} \tag{16}$$

Le lemme 4 et (16) entraînent

$$\begin{aligned} \mu(J) = \mu(J \cap \mathbf{K}(\ell, j)) &\leq \sum_{i=1}^{a} \mu(\mathbf{K}(\ell+1, j, i)) \\ &\leq \lambda \sum_{i=1}^{a} f(|\mathbf{K}(\ell+1, j, i)|) \\ &\leq \frac{2\lambda}{c_7} \frac{f(|\mathbf{K}(\ell, j)|)}{|\mathbf{K}(\ell, j)|} |J \cap \mathbf{K}(\ell, j)| \\ &\leq \frac{2\lambda}{c_7} f(|J \cap \mathbf{K}(\ell, j)|), \end{aligned}$$

car la fonction $x \mapsto f(x)/x$ est décroissante au voisinage de 0 et $|J \cap \mathbf{K}(\ell, j)| \leq |J|$. La fonction f étant croissante, on obtient (13), comme affirmé. □

- Conclusion.

La mesure μ construite ci-dessus est une mesure de probabilité à support dans $\mathbf{K}$. Le lemme 5 assure qu'elle vérifie les hypothèses du principe de distribution de masse (i.e. du Lemme 2). On en déduit que

$$\mathcal{H}^f(\mathbf{K}) \geq \frac{1}{\lambda},$$

d'où, par (12),

$$\mathcal{H}^f(\mathcal{K}_n(\Psi)) \geq \frac{1}{\lambda}.$$

Le choix de $\lambda > 0$ étant arbitraire, on obtient

$$\mathcal{H}^f(\mathcal{K}_n(\Psi)) = +\infty,$$

comme affirmé. □

6. Démonstrations des Théorèmes 2 à 4

Démonstration du Théorème 2 :

Elle est analogue à la démonstration du Satz 5 de Jarník [16], que le lecteur intéressé peut consulter. □

Démonstration du Théorème 3 :

On suppose $n \geq 2$, le cas $n = 1$ figurant dans [9]. Si $t \geq 1$, pour tout réel ε, on définit la fonction Ψ_ε sur $\mathbf{R}_{>0}$ par

$$\Psi_\varepsilon(x) = x^{-(n+1)\nu_0} (\log x)^{-\nu_1} \dots (\log_t x)^{-\nu_t - \varepsilon}$$

et l'on note

$$\mathcal{K}_n(\Psi_\varepsilon) := \mathcal{K}_n(\nu_0, \dots, \nu_{t-1}, \nu_t + \varepsilon).$$

Afin d'homogénéiser les notations et de traiter simultanément les cas $t = 0$ et $t \geq 1$, on définit, si $t = 0$ et $1 - \nu_0 < \varepsilon < \nu_0 - 1$, la fonction Ψ_ε sur $\mathbf{R}_{>0}$ par

$$\Psi_\varepsilon(x) = x^{-(n+1)(\nu_0 + \varepsilon)},$$

et l'on note

$$\mathcal{K}_n(\Psi_\varepsilon) := \mathcal{K}_n(\nu_0 + \varepsilon).$$

Soient $\delta \geq 0$ et $\varepsilon \in \mathbf{R}$. La série

$$\sum_{x=1}^{\infty} x^n f_\delta\big(\Psi_\varepsilon(x)\big)$$

est, si $t \geq 1$, de même nature que la série de terme général

$$x^{-1}(\log x)^{-1} \dots (\log_{t-1} x)^{-1} (\log_t x)^{-1-\delta-\varepsilon/\nu_0}$$

et, si $t = 0$, de même nature que la série de terme général

$$x^{-1-(n+1)(\delta\nu_0 + \delta\varepsilon + \varepsilon/\nu_0)}.$$

Si $\delta > 0$, ces deux séries convergent pourvu que $|\varepsilon|$ soit suffisamment petit. Comme

$$\mathcal{E}_n(\underline{\nu}) \subset \mathcal{K}_n(\Psi_{-|\varepsilon|}),$$

il découle du Théorème 1 que

$$\mathcal{H}^{f_\delta}\big(\mathcal{E}_n(\underline{\nu})\big) = 0. \tag{17}$$

Si $\delta = 0$ et $t \geq 0$, le Théorème 1 permet d'affirmer que

$$\mathcal{H}^{f_0}\big(\mathcal{K}_n(\Psi_0)\big) = +\infty \tag{18}$$

et

$$\mathcal{H}^{f_0}\big(\mathcal{K}_n(\Psi_{1/m})\big) = 0 \qquad \text{pour tout entier } m > 1/(\nu_0 - 1). \tag{19}$$

L'inclusion

$$\mathcal{K}_n(\Psi_0) \setminus \bigcup_{m>1/(\nu_0-1)} \mathcal{K}_n(\Psi_{1/m}) \subset \mathcal{E}_n(\underline{\nu}),$$

(2), (18) et (19) entraînent que

$$\mathcal{H}^{f_0}\big(\mathcal{E}_n(\underline{\nu})\big) = +\infty, \tag{20}$$

comme affirmé. La valeur exacte de la dimension de Hausdorff de $\mathcal{E}_n(\underline{\nu})$ découle alors facilement de (17), (20) et du Lemme 1. □

Démonstration du Théorème 4 :

On suppose $n \geq 2$, le cas $n = 1$ figurant dans [9]. Supposons tout d'abord que $\nu_0 = \ldots = \nu_t = 1$. Soit $\varepsilon \geq 0$. Le Théorème B affirme que l'ensemble

$$\mathcal{K}_n(1, \ldots, 1, 1+\varepsilon)$$

est de mesure de Lebesgue nulle si $\varepsilon > 0$ et de mesure de Lebesgue totale si $\varepsilon = 0$. Comme

$$\mathcal{K}_n(1, \ldots, 1) \setminus \bigcup_{m \geq 1} \mathcal{K}_n(1, \ldots, 1 + 1/m) \subset \mathcal{E}_n(\underline{\nu}),$$

l'ensemble $\mathcal{E}_n(\underline{\nu})$ est de mesure de Lebesgue totale. On a donc $\dim \mathcal{E}_n(\underline{\nu}) = 1$ et

$$\mathcal{H}^1\big(\mathcal{E}_n(\underline{\nu}) \cap [0,1]\big) = 1. \tag{21}$$

Pour toute fonction dimension g vérifiant

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} = 0,$$

on déduit de (21) et du Lemme 1 que

$$\mathcal{H}^g\big(\mathcal{E}_n(\underline{\nu}) \cap [0,1]\big) = 0,$$

d'où

$$\mathcal{H}^g\big(\mathcal{E}_n(\underline{\nu})\big) = 0.$$

Supposons maintenant qu'il existe un entier $1 \leq k \leq t$ tel que

$$\nu_0 = \ldots = \nu_{k-1} = 1 \quad \text{et } \nu_k \neq 1.$$

Si $\nu_k > 1$, le Théorème D entraîne que $\mathcal{H}^1\big(\mathcal{E}_n(\underline{\nu})\big) = 0$. L'assertion qui fait intervenir les fonctions f_δ se démontre de la même manière que le Théorème 3, et on en déduit facilement que $\dim\big(\mathcal{E}_n(\underline{\nu})\big) = 1$.

Si $\nu_k < 1$, alors, pour tout $0 < \varepsilon < 1 - \nu_k$, on définit la fonction Ψ_ε sur $\mathbf{R}_{>0}$ par

$$\Psi_\varepsilon(x) = x^{-(n+1)} (\log x)^{-1} \dots (\log_k x)^{-\nu_k - \varepsilon}$$

et l'on note

$$\mathcal{K}_n(\Psi_\varepsilon) := \mathcal{K}_n(1, \dots, 1, \nu_k + \varepsilon).$$

Ainsi, on a $\mathcal{E}_n(\underline{\nu}) \subset \mathcal{K}_n(\Psi_{-\varepsilon}) \setminus \mathcal{K}_n(\Psi_\varepsilon)$ et le Théorème D assure que $\mathcal{K}_n(\Psi_\varepsilon)$ est de mesure de Lebesgue totale. On en déduit que $\mathcal{H}^1\big(\mathcal{E}_n(\underline{\nu})\big) = 0$. $\square$

Références bibliographiques

[1] A. Baker, *On a theorem of Sprindžuk*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 292 (1966), 92–104.

[2] A. Baker and W. M. Schmidt, *Diophantine approximation and Hausdorff dimension*, Proc. London Math. Soc. 21 (1970), 1–11.

[3] V. Beresnevich, *On approximation of real numbers by real algebraic numbers*, Acta Arith. 90 (1999), 97–112.

[4] V. I. Bernik, *On the best approximation of zero by values of integral polynomials*, Acta Arith. 53 (1989), 17–28 (en russe).

[5] V. I. Bernik and M. M. Dodson, Metric Diophantine approximation on manifolds, Cambridge Tracts in Mathematics 137, Cambridge University Press, 1999.

[6] A. S. Besicovitch, *Sets of fractional dimension (IV): on rational approximation to real numbers*, J. London Math. Soc. 9 (1934), 126–131.

[7] J. W. S. Cassels, An introduction to Diophantine Approximation, Cambridge Tracts in Math. and Math. Phys., vol. 99, Cambridge University Press, 1957.

[8] H. Dickinson and S. L. Velani, *Hausdorff measure and linear forms*, J. reine angew. Math. 490 (1997), 1–36.

[9] H. Dickinson and S. L. Velani, *Sets of exact logarithmic order in the theory of Diophantine approximation*, Math. Annalen (à paraître).

[10] M. M. Dodson, *Star bodies and Diophantine approximation*, J. London Math. Soc. 44 (1991), 1–8.

[11] M. M. Dodson, *Diophantine approximation, zero-infinity laws and s-sets*, soumis.

[12] K. Falconer, The geometry of fractal sets, Cambridge Tracts in Mathematics 85, Cambridge University Press, 1985.

[13] K. Falconer, *Classes of sets with large intersections*, Mathematika 32 (1985), 191–205.

[14] K. Falconer, Fractal Geometry : Mathematical Foundations and Applications, John Wiley & Sons, 1990.

[15] V. Jarník, *Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen*, Prace Mat.-Fiz. (1928-9), 91–106.

[16] V. Jarník, *Über die simultanen Diophantische Approximationen*, Math. Z. 33 (1931), 505–543.

[17] C. A. Rogers, Hausdorff Measures, Cambridge University Press, Cambridge, 1970.

[18] V. G. Sprindžuk, Mahler's problem in metric number theory, Amer. Math. Soc., Transl. Math. Monogr. 25, Providence, R. I., 1969.

Yann Bugeaud
Université Louis Pasteur
U. F. R. de mathématiques
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG
FRANCE