NOMBRES ALGEBRIQUES DE PETITE MESURE

ET FORMES LINEAIRES EN UN LOGARITHME

Yann Bugeaud, Maurice Mignotte et Frédéric Normandin

Nombres algébriques de petite mesure

Résumé – Ce travail améliore un article récent de M. Mignotte et M. Waldschmidt sur des estimations relatives aux conjugués des nombres algébriques de petite mesure.

On algebraic numbers of small height : linear forms in one logarithm

Abstract – This work improves a recent paper by M. Mignotte and M. Waldschmidt which deals with estimates on the conjugates of algebraic numbers of small measure.

Le présent travail reprend l'article [3] et l'améliore sur deux points : certaines parties des preuves sont nettement simplifiées et l'estimation est légèrement meilleure. Ces progrès sont obtenus par une estimation analytique plus directe et surtout par un choix optimal du rayon d'interpolation. Le théorème 2 améliore un résultat de [3] et le corollaire, par contre, semble nouveau.

1. L'inégalité fondamentale

Soit E un corps de nombres de degré $D = [E : \mathbf{Q}]$ et G l'ensemble des plongements complexes de E dans $\mathbf{C}$. On considère $K(\geq 2)$ éléments distincts non nuls $\alpha_1, \ldots, \alpha_K$ de E. Soit G' une partie de G ayant $|G'|$ éléments (On note $|X|$ le cardinal de l'ensemble X); pour tout $\sigma \in G'$, soient $\varphi_\sigma \in i\mathbf{R}$ un complexe imaginaire pur, $\log \sigma\alpha_k$ une détermination quelconque du logarithme de $\sigma\alpha_k$, pour $1 \leq k \leq K$, et $\mathcal{K}_\sigma$ une partie de $\{1, \ldots, K\}$ ayant au moins deux éléments; on note

$$\Lambda_\sigma = \frac{1}{|\mathcal{K}_\sigma|} \sum_{k \in \mathcal{K}_\sigma} |\log \sigma\alpha_k + \varphi_\sigma|.$$

Sous ces hypothèses, notre résultat principal est le suivant.

Théorème 1. *On a l'inégalité*

$$\sum_{\sigma \in G'} \frac{|\mathcal{K}_\sigma|(|\mathcal{K}_\sigma| - 1)}{K^2} \log\left(\frac{|\mathcal{K}_\sigma| - 1}{Ke\Lambda_\sigma}\right) + \frac{K-1}{K^2} \sum_{\sigma \in G'} \sum_{k \in \mathcal{K}_\sigma} \left|\log|\sigma\alpha_k|\right|$$
$$\leq \left(1 - \frac{1}{K}\right) \frac{2D}{K} \sum_{k=1}^{K} \mathrm{h}(\alpha_k) + \frac{D}{K}\left(1 + \frac{|G'|}{2D} + \log\frac{K}{2}\right).$$

2. Preuve du théorème 1

Soit J un entier positif impair (que l'on fera par la suite tendre vers l'infini); on pose $M = K(J+1)$, $M' = M/2$ et, pour $\sigma \in G'$, $M_\sigma = |\mathcal{K}_\sigma|(J+1)$.

Première étape. –Définition de $\gamma \in E$, $\gamma \neq 0$.

On considère la matrice carrée $M \times M$

$$\mathcal{M} = \left(\binom{m + M'}{j} \alpha_k^m\right)_{(j,k;m)},$$

où (j,k) est l'indice de ligne, $0 \le j \le J$, $1 \le k \le K$, et m l'indice de colonne, avec $-M' \le m < M'$. On désigne par γ son déterminant. L'ordre des paires (j,k) n'intervient pas, car on s'intéresse seulement à la valeur absolue de γ.

Lemme 1. *La valeur explicite de $|\gamma|$ est donnée par*

$$|\gamma| = \Big|\prod_{k=1}^{K} \alpha_k\Big|^{-(J+1)(M-J)/2} \ \Big|\prod_{i>j}(\alpha_i - \alpha_j)\Big|^{(J+1)^2}.$$

Démonstration : On applique le résultat de Dobrowolski cité en annexe de [4].

Comme les α_k sont distincts, il est clair que γ n'est pas nul.

Deuxième étape. –Majoration de $|\sigma\gamma|$, $\sigma \in G$.

Par combinaisons linéaires des lignes, à k constant, on a

$$\gamma = \det\left(\frac{m^j}{j!}\alpha_k^m\right).$$

On désigne par $\mathcal{S}$ l'ensemble des applications bijectives de $[0,J]\times[1,K]$ dans $[-M', M'-1]$.

Alors

$$\sigma\gamma = \sum_{\psi\in\mathcal{S}} \epsilon_\psi \prod_{j=0}^{J}\prod_{k=1}^{K} \frac{\psi(j,k)^j}{j!}\left(\sigma\alpha_k\right)^{\psi(j,k)},$$

avec $\epsilon_\psi \in \{1,-1\}$.

Le membre de droite est un polynôme à coefficients rationnels en les $\sigma\alpha_1,\dots,\sigma\alpha_K,\sigma\alpha_1^{-1},\dots,\sigma\alpha_K^{-1}$, dont le degré partiel en $\sigma\alpha_i$ (resp. $\sigma\alpha_i^{-1}$) est, d'après l'égalité ci-dessus (ou bien d'après le lemme 1), majoré par

$$N := \frac{M}{2}(J+1)\big(1-\frac{J}{M}\big).$$

Lemme 2. *Pour tout $\sigma \in G$, on a*

$$\frac{1}{M}\log|\sigma\gamma| \le \log M + \frac{J}{2}\left(1+\log\frac{K}{2}\right) + \log(J+1) + \frac{N}{M}\sum_{k=1}^{K}\Big|\log|\sigma\alpha_k|\Big|.$$

Démonstration : Le terme $\Big|\prod_{j=0}^{J}\prod_{k=1}^{K}\psi(j,k)^j\Big|$ est majoré par $\left(\frac{M}{2}\right)^{KJ}\left(\frac{M}{2}-\frac{K}{2}\right)^{K(J-1)}\cdots\left(\frac{K}{2}\right)^{K(J-J)}$, donc par $\prod_{j=2}^{J+1}\left(\frac{jK}{2}\right)^{K(j-1)}$. Or, pour tout entier j, on a $\log(j!) \ge j\log j - j$, ainsi

$$\log\Big|\prod_{j=0}^{J}\prod_{k=1}^{K}\frac{\psi(j,k)^j}{j!}\Big| \le KJ\frac{J+1}{2}\log\frac{K}{2} + K\sum_{j=2}^{J+1}(j-1)\log j - K\sum_{j=1}^{J} j\log j + KJ\frac{J+1}{2},$$

et donc

$$\log|\sigma\gamma| \le \log M! + KJ\frac{J+1}{2}\left(1+\log\frac{K}{2}\right) + KJ\log(J+1) + N\sum_{k=1}^{K}\Big|\log|\sigma\alpha_k|\Big|.$$

Troisième étape. –Majoration de $|\sigma\gamma|$, $\sigma \in G'$.

On utilise exactement la même méthode que celle suivie dans [3]; toutefois, on choisit pour le paramètre R sa valeur optimale, qui est $(M_\sigma - J - 1)/(2\Lambda_\sigma)$ (au lieu de $M_\sigma/2\Lambda_\sigma$).

On obtient ainsi la majoration, valable pour $\sigma \in G'$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{M}\log|\sigma\gamma| \leq & -\frac{M_\sigma(M_\sigma - J - 1)}{2M}\log\left(\frac{M_\sigma - J - 1}{Me\Lambda_\sigma}\right) + \log M \\ & + \frac{N}{M}\sum_{k\notin\mathcal{K}_\sigma}\Big|\log|\sigma\alpha_k|\Big| - \frac{KJ}{M}\left(\frac{J-2}{2}\log J - \frac{3(J+1)}{4}\right) + \frac{J}{2}\log\frac{M}{2}.\end{aligned}$$

Quatrième étape. –Inégalité de Liouville.

Pour $1 \leq k \leq K$, notons d_k le degré de α_k sur $\mathbf{Q}$ et $a_0(\alpha_k) > 0$ (resp. $a_0(\alpha_k^{-1}) > 0$) le coefficient dominant du polynôme minimal de α_k (resp. de α_k^{-1}).

En utilisant le lemme 4 de [3], on voit que le nombre

$$\prod_{k=1}^{K}\left((a_0(\alpha_k)a_0(\alpha_k^{-1})\right)^{ND/d_k}\prod_{\sigma\in G}|\sigma\gamma|$$

est un entier positif, donc est ≥ 1.

De l'égalité $M(\alpha) = M(\alpha^{-1})$, valable pour tout nombre algébrique α non nul, on déduit

$$2h(\alpha_k) = \frac{1}{d_k}\log(a_0(\alpha_k)a_0(\alpha_k^{-1})) + \frac{1}{D}\sum_{\sigma\in G}\Big|\log|\sigma\alpha_k|\Big|.$$

On majore $|\sigma\gamma|$ grâce à l'étape 3 pour $\sigma \in G'$, et grâce à l'étape 2 pour $\sigma \notin G'$; on obtient

$$\begin{aligned}0 \leq & \frac{2ND}{M}\sum_{k=1}^{K}\mathrm{h}(\alpha_k) - \frac{N}{M}\sum_{\sigma\in G'}\sum_{k\in\mathcal{K}_\sigma}\big|\log|\sigma\alpha_k|\big| + D\log M - \frac{|G'|KJ}{M}\left(\frac{J-2}{2}\log J - \frac{3(J+1)}{4}\right) \\ & + |G'|\left(\frac{J}{2}\log\frac{M}{2}\right) + (D - |G'|)\left(\frac{J}{2}(1 + \log\frac{K}{2}) + \log(J+1)\right) \\ & - \sum_{\sigma\in G'}\frac{M_\sigma(M_\sigma - J - 1)}{2M}\log\left(\frac{M_\sigma - J - 1}{Me\Lambda_\sigma}\right).\end{aligned}$$

Cinquième étape. –Conclusion.

On divise la relation précédente par $M/2$ et on fait tendre J (donc M) vers l'infini. Après simplification, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma\in G'}\frac{|\mathcal{K}_\sigma|(|\mathcal{K}_\sigma| - 1)}{K^2}\log\left(\frac{|\mathcal{K}_\sigma| - 1}{Ke\Lambda_\sigma}\right) + \frac{K-1}{K^2}\sum_{\sigma\in G'}\sum_{k\in\mathcal{K}_\sigma}\big|\log|\sigma\alpha_k|\big| \\ \leq \left(1 - \frac{1}{K}\right)\frac{2D}{K}\sum_{k=1}^{K}\mathrm{h}(\alpha_k) + \frac{D}{K}\left(1 + \frac{|G'|}{2D} + \log\frac{K}{2}\right),\end{aligned}$$

et le théorème est prouvé.

3. Une amélioration dans un cas particulier

On considère le cas $G' = \{Id\}$. Soit α un nombre algébrique non nul de degré $D \geq 3$. On choisit $\mathcal{K}_{Id} = \{1, \ldots, K\}$, $\varphi_{Id} = 0$ et l'on pose $\alpha_k = \alpha^{(-1)^{k+1}[k/2]}$. On a alors $\Lambda_{Id} \leq K|\log\alpha|/4$.

Lemme 3. *Soit $\sigma \in G$. Sous ces hypothèses, le degré partiel en $\sigma\alpha$ (resp. $\sigma\alpha^{-1}$) du polynôme considéré au cours de la deuxième étape est majoré par*

$$N' := \frac{1}{12}\frac{K^2 - 1}{K}M^2 + \frac{M}{4}.$$

Démonstration : On applique le Lemme 1, en distinguant selon que K est pair ou non.

On reprend alors la preuve du théorème en remplaçant N par N' et on obtient

$$\log\left(\frac{4(K-1)}{eK^2|\log\alpha|}\right) \leq \frac{K}{3}D\,\mathrm{h}(\alpha) + \frac{D}{K-1}\left(1+\frac{1}{2D}+\log\frac{K}{2}\right).$$

En d'autres termes, on a le résultat suivant, d'où l'on peut déduire la proposition énoncée dans [3].

Théorème 2. *Soit α un nombre algébrique non nul de degré D. Alors, pour tout entier $K, 2 \leq K < D$, on a*

$$|\log\alpha| \geq \frac{4(K-1)}{eK^2}\,\mathrm{M}(\alpha)^{-K/3}e^{-\frac{D}{K-1}\left(\frac{1}{2D}+1+\log\frac{K}{2}\right)}.$$

4. Application du Théorème 1

On considère le cas $G = G'$ et l'on suppose que $\alpha \neq 1$ est une unité algébrique de degré $D \geq 3$. Soit un entier $K, 2 \leq K < D$, on choisit, pour tout $\sigma \in G$, $\mathcal{K}_\sigma = \{1, \ldots, K\}$ et $\varphi_\sigma = 0$. Puis on pose $\alpha_k = \alpha^{(-1)^{k+1}[k/2]}$. Alors le théorème donne

$$\sum_{\sigma\in G}\log\left(\frac{4(K-1)}{eK^2|\log\sigma\alpha|}\right) \leq \frac{D}{K-1}\left(\frac{3}{2}+\log\frac{K}{2}\right).$$

Et on obtient le résultat suivant.

Corollaire. *Soit $\alpha \neq 1$ une unité algébrique de degré D, de conjugués $\alpha_1, \ldots, \alpha_D$. Alors, pour tout entier $K, 2 \leq K < D$, on a*

$$\prod_{i=1}^{D}|\log\alpha_i| \geq \exp\left\{-D\left(\frac{1}{K-1}\left(\frac{3}{2}+\log\frac{K}{2}\right)+\log\frac{eK^2}{4(K-1)}\right)\right\}.$$

Ainsi, par l'inégalité arithmético-géométrique,

$$\sum_{i=1}^{D}|\log\alpha_i| \geq D\frac{4(K-1)}{eK^2}\left(\frac{K}{2}\right)^{-1/(K-1)}e^{-\frac{3}{2(K-1)}}.$$

Ce résultat n'a bien entendu d'intérêt que pour les petites valeurs de K et nous permet d'obtenir, en choisissant $K = 3$, l'estimation $\sum_{i=1}^{D}|\log\alpha_i| \geq 0.13D$.

On peut améliorer cette minoration dans le cas où α n'est pas une unité totalement réelle. Il suffit pour cela de considérer β, un conjugué non réel de α, et d'appliquer le théorème de la même manière que ci-dessus aux $K = 5$ entiers algébriques $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \beta$, $\alpha_3 = \beta^{-1}$, $\alpha_4 = \overline{\beta}$ et $\alpha_5 = \overline{\beta^{-1}}$; on obtient alors $\sum_{i=1}^{D}|\log\alpha_i| \geq 0.201D$.

On en déduit que si α a tous ses conjugués dans le secteur angulaire $|\theta| \leq 0.1$, alors il existe un réel positif η tel que $M(\alpha) \geq (1+\eta)^D$. Un résultat du même type a déjà été obtenu précédemment de deux manières profondément différentes : en utilisant la notion de diamètre transfini [1], et à partir du théorème d'Erdős-Turàn [2].

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] M. LANGEVIN, Minorations de la maison et de la mesure de Mahler de certains entiers algébriques, *Comptes Rendus*, 303, série I, 1986, p.523-526.

[2] M. MIGNOTTE, Sur un théorème de M. Langevin, *Acta Arithmetica*, 54, 1989, p.81-86.

[3] M. MIGNOTTE et M. WALDSCHMIDT, On algebraic numbers of small height : linear forms in one logarithm, *Journal of Number Theory*, 47, 1994, p.43-62.

[4] U. RAUSCH, On a theorem of Dobrowolski about the product of conjugate numbers, *Colloquium Mathematicum*, 50, 1985, p.137-142.

Y. B. et M. M. : Université Louis Pasteur, 7, rue René Descartes, 67084 STRASBOURG Cedex, France.
e-mail : bugeaud@pari.u-strasbg.fr mignotte@math.u-strasbg.fr
tél. : 88416300 FAX : 88619069
F. N. : Université Jean Monnet, 23, rue du Docteur Paul Michelon, 42023 ST-ETIENNE Cedex 2, France.
tél. : 77421500 FAX : 77251817

Correction des épreuves : Y. B.