L'équation de Nagell–Ljunggren $\dfrac{x^n-1}{x-1}=y^q$

Yann Bugeaud & Maurice Mignotte

1. Introduction

Le présent travail fait le point sur l'état actuel des connaissances concernant l'équation diophantienne

$$\frac{x^n-1}{x-1}=y^q, \quad \text{en entiers } x>1, y>1, n>2, q\geq 2, \tag{1}$$

associée au problème suivant : existe-t-il des puissances pures qui ne s'écrivent qu'avec le chiffre 1 dans une certaine base x ?

L'équation (1) possède les trois solutions

$$\frac{3^5-1}{3-1}=11^2, \quad \frac{7^4-1}{7-1}=20^2 \quad \text{et} \quad \frac{18^3-1}{18-1}=7^3, \tag{$\mathcal{S}$}$$

et les travaux les plus récents conduisent à conjecturer que ce sont les seules.

Conjecture A. *L'équation (1) ne possède que les trois solutions ($\mathcal{S}$).*

Compte tenu de l'état actuel de nos connaissances, cette conjecture semble par trop ambitieuse, alors que la suivante paraît plus abordable.

Conjecture B. *L'équation (1) ne possède qu'un nombre fini de solutions.*

Dès à présent, il convient de souligner que des énoncés nettement plus faibles que la Conjecture B demeurent des problèmes ouverts. À titre d'exemple, on ne sait toujours pas démontrer la finitude du nombre de solutions de (1) lorsque $q=5$... et cela même si l'on impose en plus à x d'être un cube !

Comme l'a montré Shorey dans son survol [46], la Conjecture B se déduit de la conjecture *abc*, que l'on peut énoncer comme suit.

Soit $\varepsilon>0$ un réel et soient a, b et c trois entiers sans diviseur commun vérifiant $a+b=c$. Soit G le produit des diviseurs premiers (distincts) de abc. Alors, il existe un réel $\kappa>0$, qui ne dépend que de ε, tel que $c\leq \kappa\, G^{1+\varepsilon}$.

Il suffit en effet de réécrire (1) sous la forme

$$(x-1)y^q+1=x^n,$$

et de choisir $\varepsilon=1/8$, afin de déduire de la conjecture *abc* qu'il existe un réel $\kappa_1>0$ tel que

$$x^n<\kappa_1\big(x(x-1)y\big)^{9/8}<\kappa_1\, x^{9/4}\, y^{9/8}. \tag{2}$$

En outre, il découle facilement de (1) que $y^q < 2\,x^{n-1}$ et donc

$$y^{q(n-9/4)/(n-1)} < 2\,x^{n-9/4},$$

que l'on combine avec (2) afin d'obtenir

$$y^{q(n-9/4)/(n-1)} < 2\,\kappa_1\,y^{9/8}. \tag{3}$$

Les cas $n = 3$ et $n = 4$ étant résolus (*cf.* ci–après), on déduit de (3) une majoration de y^q par une constante numérique absolue. Ainsi (1) ne possède qu'un nombre fini de solutions... si la conjecture *abc* est vraie.

Le présent survol est organisé comme suit. Dans la partie 2, nous présentons les premiers résultats relatifs à (1), qui sont dus à Nagell [36, 37] et à Ljunggren [31]. Plusieurs décennies se sont alors écoulées avant que Shorey & Tijdeman [47] n'obtiennent, comme conséquence des travaux d'Alan Baker [1, 2] sur la théorie des formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques, de nouveaux énoncés concernant (1), qui font l'objet de la troisième partie, tandis que la partie suivante constitue une brève introduction élémentaire à la théorie de Baker. Nous présentons ensuite les différentes étapes de la résolution complète de (1) lorsque x est égal à un carré, et montrons, dans la partie 6, comment interviennent les formes linéaires de logarithmes p-adiques dans la résolution de (1) lorsque x est fixé. En particulier, nous donnons les grandes lignes de la résolution de (1) quand x est une puissance de 10. Les parties 7, 8 et 9 complètent les résultats précédents et incluent en particulier une extension du théorème de Nagell et Ljunggren. La partie 10 est consacrée à une généralisation de l'équation (1), associée à la question : existe-t-il des puissances pures qui ne s'écrivent qu'avec le même chiffre a dans une certaine base x ? Dans la partie 11, nous examinons (1) lorsque x est négatif, avant de mentionner, dans la dernière partie, deux problèmes dans lesquels intervient l'équation (1).

2. Les résultats de Nagell et Ljunggren

L'énoncé suivant regroupe les résultats obtenus par Nagell [36, 37] puis complétés par Ljunggren [31], qui traitent plusieurs cas particuliers de (1).

Théorème 1. *À l'exception des solutions* $(\mathcal{S})$*, l'équation (1) ne possède aucune solution* (x, y, n, q) *si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :*

$$(i) \qquad q = 2,$$

$$(ii) \qquad 3 \text{ divise } n,$$

$$(iii) \qquad 4 \text{ divise } n,$$

$$(iv) \qquad q = 3 \text{ et } n \not\equiv 5 \pmod 6.$$

Les démonstrations sont élémentaires, en ce sens qu'elles ne font appel à aucune autre théorie que l'arithmétique des anneaux $\mathbf{Z}[i]$ et $\mathbf{Z}[(1+i\sqrt{3})/2]$. Elles sont cependant trop longues pour être détaillées ici, et le lecteur intéressé est invité à consulter l'ouvrage de Ribenboim [40]. Pour (iii), nous mentionnons simplement que si (x, y, n, q) est solution de (1) avec $n = 2^a m$, $a \geq 1$ et $m \geq 3$ impair, alors il existe un entier y_1 divisant y tel que (x, y_1, m, q) est solution de (1). Les démonstrations de (i) et (ii) reposent sur un semblable résultat de factorisation, qui s'avère d'ailleurs très utile pour d'autres questions, et dont nous reprenons ci-dessous un énoncé très général obtenu par Shorey [28b]. Quant à (iv), sa démonstration fait appel à un résultat de Nagell [38].

Notations. *On convient de noter (a, b) le plus grand diviseur commun aux entiers a et b et de désigner par φ l'indicateur d'Euler. En outre, pour tout entier $n \geq 1$, on note $G(n)$ la partie sans facteur carré de n et $Q_n := \varphi(G(n))$ le nombre d'entiers compris entre 1 et $G(n)$ et premiers avec $G(n)$.*

Théorème 2. *Soit (x, y, n, q) une solution de (1) avec n impair. Si le diviseur D de n vérifie $(D, n/D) = (D, Q_{n/D}) = 1$, alors il existe des entiers y_1 et y_2 tels que $y_1 y_2 = y$ et*

$$\frac{(x^D)^{n/D} - 1}{x^D - 1} = y_1^q \quad \text{et} \quad \frac{x^D - 1}{x - 1} = y_2^q.$$

Si (x, y, n, q) est une solution de (1) avec n pair, disons $n = 2m$. Le cas $n = 4$ étant couvert par le Théorème 1, on peut supposer m impair et il est facile de voir qu'il existe alors un entier y_1 divisant y tel que $x^m + 1 = y_1^q$. On retrouve alors l'équation de Catalan, qui n'admet qu'un nombre fini de solutions (*cf.* Tijdeman [49]), mais, même si l'on dispose d'informations très précises relatives aux éventuelles solutions non triviales de cette équation (*cf.* entre autres l'ouvrage de Ribenboim [40] et le survol de Mignotte [35]), la résolution complète de (1) sous l'hypothèse n pair demeure un problème ouvert.

Par applications successives du Théorème 2 en prenant pour D la puissance du plus grand facteur premier de n qui divise exactement n, on démontre la première partie de l'énoncé suivant, la seconde étant détaillée dans [40].

Théorème 3. *Si l'équation (1) possède une solution (x, y, n, q) et si n s'écrit comme produit de facteurs premiers $n = 2^a p_1^{u_1} \dots p_\ell^{u_\ell}$, avec $a \in \{0, 1\}$ et $u_i > 0$, alors, pour tout $1 \leq i \leq \ell$, il existe un entier y_i tel que*

$$\frac{x^{p_i^{u_i}} - 1}{x - 1} = y_i^q.$$

En outre, il existe des entiers $w_i \geq 2$ et $z_i \geq 2$ tels que

$$\frac{w_i^{p_i} - 1}{w_i - 1} = z_i^q \quad \text{ou} \quad p_i\, z_i^q,$$

la deuxième possibilité ne pouvant se produire que si q divise u_i.

Il découle facilement de ce qui précède qu'afin de démontrer la Conjecture B il suffit de prouver que (1) ne possède qu'un nombre fini de solutions (x, y, p^a, q) où p est premier et $a \geq 1$.

3. Application des formes linéaires de logarithmes : résultats de finitude

La théorie des formes linéaires de logarithmes, initialement développée par Baker [1, 2], s'est avérée, et continue à s'avérer, très riche d'applications dans le domaine des équations diophantiennes. À la différence des résultats d'approximation diophantienne obtenus par Thue, Siegel et Roth, elle conduit à des énoncés effectifs, en ce sens qu'elle permet non seulement d'affirmer que certaines équations n'ont qu'un nombre fini de solutions, mais également d'expliciter une borne numérique, certes souvent très élevée, pour la taille des éventuelles solutions. En outre, la théorie des formes linéaires de logarithmes permet d'apporter de précieuses informations sur certaines équations exponentielles, dont par exemple l'équation de Catalan, pour lesquelles les méthodes antérieures se révélaient inopérantes. Avant d'expliquer en quelques lignes dans la partie suivante de quoi il en retourne, nous présentons deux énoncés issus de cette théorie et montrons comment ils s'appliquent à (1).

Théorème 4. *Soient a_1 et a_2 deux entiers non nuls premiers entre eux tels que $|a_1 a_2| \geq 2$. Soit $f(X) \in \mathbf{Z}[X]$ un polynôme irréductible de degré ≥ 3 (resp. ≥ 2) et soit b un entier non nul. Alors les équations*

$$a_1^n \pm a_2^n = b\, y^q \text{ en inconnues } n \geq 0, y \in \mathbf{Z} \setminus \{0\} \text{ et } q \geq 2$$

et

$$f(x) = b\, y^q \text{ en inconnues } x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z} \setminus \{0\} \text{ et } q \geq 2 \ (\textit{resp. } q \geq 3)$$

ne possèdent qu'un nombre fini de solutions, dont on peut explicitement majorer la taille.

La démonstration du Théorème 4 se trouve par exemple dans l'ouvrage de Shorey & Tijdeman [48], où figure également le résultat suivant, qui s'en déduit relativement facilement.

Théorème 5. *L'équation (1) n'admet qu'un nombre fini de solutions (x, y, n, q) si l'une au moins des conditions suivantes est vérifiée.*

$$(i) \qquad x \text{ est fixé},$$

$$(ii) \qquad n \text{ a un diviseur premier fixé } p,$$

$$(iii) \qquad y \text{ a un diviseur premier fixé } p.$$

Démonstration : Pour prouver l'assertion (i), il suffit de remarquer que (1) s'écrit $x^n - 1 = (x-1)\, y^q$ et donc que le Théorème 4 s'applique, avec $a_1 = x$, $a_2 = 1$ et $b = x - 1$.

Le cas $p = 2$ de (ii) ayant déjà été considéré au cours de la partie précédente, on peut supposer p impair. Un argument de factorisation montre alors qu'il existe deux entiers positifs r et s, avec $rs \leq p$, et un entier $y_1 > 0$ divisant y tels que $(x^{n/p}, y_1, q)$ soit solution de l'équation

$$r\, \frac{z^p - 1}{z - 1} = s\, Y^q, \tag{4}$$

en inconnues $z > 2$, $Y > 1$ et $q \geq 2$. Si $p \geq 5$ ou si $p = 3$ et $q \geq 3$, il découle du Théorème 4 que (4) n'admet qu'un nombre fini de solutions. Ainsi, il ne reste plus qu'à examiner le cas $p = 3$ et $q = 2$, pour lequel de simples considérations de congruences conduisent au résultat (*cf.* [48]).

Démontrons maintenant (iii). Si p divise $x - 1$, alors $(x^n - 1)/(x - 1) \equiv n \pmod p$, donc p divise n et on est ramené à (ii). Dans le cas contraire, soit $t > 1$ le plus petit entier $u > 1$ tel que p divise $x^u - 1$. Il est clair que t divise $p - 1$. En outre, t divise n puisque $x^n - 1 \equiv 0 \pmod p$. Ainsi, n est multiple d'un des diviseurs premiers de $p - 1$ et on est également ramené à (ii). $\square$

4. Un outil important : les formes linéaires de logarithmes

Après avoir détaillé quelques-unes parmi les nombreuses conséquences des résultats de Baker, nous expliquons brièvement ce qu'est une forme linéaire de logarithmes, puis donnons un exemple de raffinement, a priori modeste, mais très riche de conséquences.

Soit $n \geq 1$ et, pour $1 \leq i \leq n$, soient x_i/y_i des nombres rationnels non nuls et m_i des entiers non nuls. Notons $m \geq 2$ un majorant des $|m_i|$ et $H_i \geq 3$ un majorant des quantités $|x_i|$ et $|y_i|$. On suppose que

$$\Lambda := \left| \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{m_1} \cdots \left(\frac{x_n}{y_n}\right)^{m_n} - 1 \right|$$

est non nul. Alors, par une simple estimation du dénominateur de Λ, on obtient

$$\log \Lambda \geq -\sum_{i=1}^{n} m_i \log |y_i| \geq -m \sum_{i=1}^{n} \log H_i.$$

La dépendance en les H_i est très satisfaisante, au contraire de celle en m. Or, pour résoudre de nombreux problèmes en théorie des nombres, on aimerait disposer d'une meilleure estimation du point de vue de m, quitte à faire quelques concessions relativement aux H_i. Baker [1, 2] a, le premier, démontré un tel résultat, et on sait maintenant (d'après Baker & Wüstholz [3]) que, sous les hypothèses précédentes, on a

$$\log \Lambda \geq -(50n)^{2n} \log H_1 \ldots \log H_n \log m, \tag{5}$$

et l'on conjecture que l'on peut remplacer le produit des $\log H_i$ par leur somme. Or cela a été démontré par Shorey [43] (voir également les estimations de Waldschmidt [51], qui incluent tous les raffinements connus en 1993) dans le cas particulier où les rationnels x_i/y_i sont tous très proches de 1. Un exemple spectaculaire d'application est donné par l'équation

$$|(b+1)x^m - by^m| = 1, \quad \text{en inconnues } b \geq 2, x > 0, y > 0,$$

qui conduit à estimer la quantité

$$\frac{1}{b\,y^m} = \left| \frac{b+1}{b} \left(\frac{x}{y}\right)^m - 1 \right|.$$

De (5) découle la minoration

$$-m \log y \geq -10^8 \log(b+1) \log y \log m,$$

mais, comme $(b+1)/b$ et x/y sont très proches de 1 quand x, y et b sont grands, on peut appliquer le raffinement et, par conséquent, obtenir (par exemple en utilisant [26], où l'on observe cependant que le "$\log m$" de (5) est alors remplacé par "$\log^2 m$")

$$-m \log y \geq -10^8 \log y \log^2 m,$$

soit une majoration de m indépendante de b, résultat dû originellement à Mignotte [33], puis raffiné par Bennett & de Weger [5], qui ont démontré le théorème suivant.

Théorème 6. *Soient a, b et n des entiers vérifiant $a > b \geq 1$ et $n \geq 3$. Alors l'équation*

$$|ax^n - by^n| = 1$$

admet au plus une solution en entiers positifs (x, y), sauf éventuellement si $a = b + 1$, $2 \leq b \leq \min\{0.3n, 83\}$ et $17 \leq n \leq 347$.

Le Théorème 6 a été démontré indépendamment par Delone [22] et Nagell [38] pour $n = 3$ et par Ljunggren [32] dans le cas $n = 4$.

Tout d'abord, il convient de souligner que le cas $(a, b) = (2, 1)$ du Théorème 6 est une conséquence d'un résultat difficile de Darmon & Mérel [21], qui ont prouvé que l'équation diophantienne $X^n + Y^n = 2Z^n$ avec $n \geq 3$ n'admet comme solutions entières que les solutions triviales. Leur démonstration reprend des idées développées par Wiles afin de résoudre la conjecture de Fermat.

À l'exception de ce cas particulier, le Théorème 6 fait appel à trois techniques d'approximation diophantienne, que l'on présente brièvement sous l'hypothèse additionnelle $a = b + 1$, destinée uniquement à simplifier les explications. La première, les formes linéaires en deux logarithmes, a été évoquée plus haut : elle permet de majorer n indépendamment de b. La seconde repose sur l'observation suivante. Si $|(b+1)x^n - by^n| = 1$, alors

$$\left| \sqrt[n]{1 + \frac{1}{b}} - \frac{x}{y} \right| < \frac{1}{b\, n\, y^n} \tag{6}$$

et donc le nombre algébrique $\sqrt[n]{1 + 1/b}$ admet une très bonne approximation rationnelle, en l'occurrence x/y. Or, à l'aide de techniques basées sur la construction explicite des approximants de Padé de la fonction $z \mapsto \sqrt[n]{1 - z}$, il est possible, pour certaines valeurs de b et de n, de construire une suite de rationnels $(p_m/q_m)_m$ qui contient *toutes* les bonnes approximations rationnelles de $\sqrt[n]{1 + 1/b}$. En outre, on contrôle bien les différences $|\sqrt[n]{1 + 1/b} - p_m/q_m|$, et on peut ainsi en déduire qu'aucun rationnel x/y ne vérifie (6). Cette méthode est efficace quand n et b ne sont pas trop petits, mais elle reste d'un emploi délicat, et son succès n'est pas *a priori* assuré.

Le troisième outil utilisé par Bennett & de Weger est la théorie algorithmique des nombres : à l'aide de calculs sur ordinateur, utilisant des algorithmes astucieux, ils ont complètement résolu les équations appelées *équations de Thue* $|(b+1)x^n - by^n| = \pm 1$, pour $(b,n) \in \{(2,5),(2,7),(2,11),(2,13),(3,13)\}$. Cela illustre bien les limites de ce que l'on savait faire vers 1996. À l'heure actuelle, on peut imaginer pouvoir résoudre par cette méthode toutes les paires (b,n) avec $17 \le n \le 21$ et $2 \le b \le 0.3n$.

Au prix de longs efforts, le Théorème 6 a été amélioré par Bennett [4], qui a raffiné la seconde technique et prouvé le résultat remarquable suivant.

Théorème 7. *Soient a, b et n des entiers vérifiant $a > b \ge 1$ et $n \ge 3$. Alors l'équation*

$$|ax^n - by^n| = 1$$

admet au plus une solution en entiers positifs (x,y).

Il est alors facile d'en déduire un résultat démontré indépendamment par Mignotte [34], mais par une autre méthode.

Théorème 8. *La seule solution (x,y,n,q) de l'équation (1) avec $n \equiv 1 \pmod q$ est $(3,11,5,2)$.*

Démonstration : Au vu du Théorème 1, on peut supposer que q est un nombre premier impair. Posons $n = \nu q + 1$, l'équation (1) s'écrit alors $x(x^\nu)^q - (x-1)y^q = 1$, et il suffit d'appliquer le Théorème 7 pour constater qu'il n'y a alors pas de solution. □

Le Théorème 8 se trouve énoncé dans [30], mais la démonstration qu'en donne Le est erronée, ainsi d'ailleurs que les démonstrations de [52], comme le remarque Ping-Zhi Yuan [53] (voir aussi [4]).

Le Théorème 7 permet également de retrouver un résultat de Le [28], démontré par Inkeri [25] lorsque $q = 3$.

Théorème 9. *L'équation (1) ne possède aucune solution (x,y,n,q) où x est une puissance q-ième.*

Démonstration : Supposons qu'il existe $z > 1$, $y > 1$, $q > 2$ et $n \ge 3$ tels que $z^{qn} - 1 = (z^q - 1)\, y^q$. Il suffit alors d'appliquer le Théorème 7 à l'équation $z^q Z^q - (z^q - 1) Y^q = 1$ pour conclure. □

Les Théorèmes 8 et 9 jouent un rôle très important dans les démonstrations des résultats présentés dans les chapitres suivants.

5. Un exemple de résolution complète de l'équation (1)

Une question naturelle consiste à se demander si (1) admet une solution (x,y,n,q), où x est une puissance pure. D'après le Théorème 9, on sait déjà que x ne peut en aucun cas être une puissance q-ième. Le résultat suivant montre que x n'est pas non plus un carré.

Théorème 10. *L'équation (1) n'admet aucune solution (x, y, n, q) où x est un carré.*

Le Théorème 10 a été obtenu indépendamment et au moyen de deux approches différentes par Bennett [4] et Bugeaud, Mignotte, Roy & Shorey [20], complétant des résultats antérieurs de Saradha & Shorey [42]. Nous choisissons de détailler les étapes principales de la démonstration de [20], qui ne fait appel ni au Théorème 7, ni au Théorème 8.

Tout d'abord, un argument facile de factorisation montre qu'il suffit de prouver le Théorème 10 quand n est impair. Supposons donc que les entiers $z \geq 2$, $n \geq 5$, $q \geq 3$ et $y \geq 2$ avec n impair vérifient l'équation

$$\frac{z^{2n} - 1}{z^2 - 1} = y^q.$$

Alors, il existe deux entiers y_1 et y_2 tels que

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = y_1^q \quad \text{et} \quad \frac{z^n + 1}{z + 1} = y_2^q. \tag{7}$$

- Première étape.

Eliminant z^n du système (7), on obtient l'équation

$$(z + 1)\, y_2^q - (z - 1)\, y_1^q = 2,$$

à laquelle on peut appliquer le raffinement des formes linéaires de logarithmes mentionné plus haut. Ainsi, on borne q et on obtient que q est majoré par 200, indépendamment de $z \geq 5$, et par 132, indépendamment de $z \geq 12$.

- Deuxième étape.

Avant toute chose, on observe que Saradha & Shorey [42] ont démontré que l'on a nécessairement $(z\,\varphi(z), q) = 1$, où φ est l'indicateur d'Euler. Or cette information supplémentaire nous permet d'appliquer un lemme de nature hypergéométrique, démontré par Le [27] puis raffiné par Saradha & Shorey [42]. On obtient ainsi une très bonne majoration de z en fonction de q, à savoir $z \leq 1.61\, q^{1/2}$. En réalité, on démontre des estimations plus précises, lesquelles, combinées au résultat de la première étape, entraînent $z \leq 11$. Par conséquent, on est ramené à étudier un nombre fini de paires (z, q).

- Troisième étape.

Pour chaque paire (z, q) restante, on vérifie que n est congru à 1 modulo q. Pour cela, on regarde l'équation $x^n - 1 = (x - 1)\, y^q$, avec x et q fixés. Si p est un nombre premier de la forme $kq + 1$, alors $(y^q)^k \equiv 1 \pmod{p}$, donc y^q ne prend qu'un petit nombre de valeurs modulo p. Ainsi n ne prend également qu'un petit nombre de valeurs modulo $p - 1$, en particulier modulo q. Pour obtenir le résultat souhaité, l'expérience montre qu'il suffit de considérer en général deux ou trois tels nombres premiers p, en tout cas rarement plus de six.

- Quatrième étape.

Compte-tenu des trois étapes précédentes, on est ramené à considérer un nombre fini d'équations de la forme

$$xX^q - (x-1)Y^q = \pm 1.$$

Plus précisément, il ne reste à traiter que les équations

$$5X^q - 4Y^q = 1, \qquad 17 \le q \le 71,$$

$$6X^q - 5Y^q = 1, \qquad 17 \le q \le 67,$$

$$7X^q - 8Y^q = -1, \qquad 17 \le q \le 61.$$

Ce sont toutes des équations de Thue, dont on sait majorer explicitement la taille des solutions, et par conséquent *en principe*, les déterminer toutes. Or les meilleures bornes actuellement connues sont de l'ordre de $10^{10^{500}}$, donc bien trop élevées pour envisager une résolution complète. Qu'à cela ne tienne ! Comme, grâce à l'étape précédente, on sait que n est de la forme $\nu q + 1$, on cherche en fait à montrer que ces équations ne possèdent aucune solution (X, Y) avec X ou Y une puissance ν-ième. On a donc une majoration de ν, puis de n, de l'ordre de 10^{500}. Pour conclure, on utilise à nouveau des arguments modulaires afin de montrer que n est nécessairement congru à 1 modulo un entier M, suffisamment grand (i.e. $> 10^{500}$).

6. Où apparaissent les formes linéaires de logarithmes p-adiques

Comme on l'a vu dans la partie 4, les formes linéaires de logarithmes permettent de minorer non trivialement la distance d'un produit de nombres algébriques à 1. On travaille alors avec la valeur absolue archimédienne, et on peut raisonnablement se demander si un énoncé du même style est valable pour les valeurs absolues p-adiques. La réponse est oui (*cf.* les travaux de Van der Poorten et de Kunrui Yu), et on déduit du résultat principal de [15] la minoration suivante pour la distance p-adique entre deux puissances de nombres rationnels.

Théorème 11. *Soient p un nombre premier, x_1/y_1 et x_2/y_2 deux nombres rationnels non nuls et multiplicativement indépendants, que l'on suppose être des unités p-adiques. Soient m_1 et m_2 deux entiers rationnels strictement positifs. Notons $m = \max\{m_1, m_2, 2\}$ et désignons par H_i, $i = 1, 2$, deux nombres réels tels que $H_i \ge \max\{|x_i|, |y_i|, 2\}$. Alors, la valuation p-adique $v_p(\Lambda)$ de*

$$\Lambda = \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{m_1} - \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{m_2}$$

est majorée par

$$v_p(\Lambda) \le 2000\, p \log H_1 \log H_2 \log^2 m.$$

Il convient de ne pas attacher trop d'importance au fait que la dépendance en m soit la même que dans [26], à savoir en $\log^2 m$ et non en $\log m$ comme dans (5). La raison principale est la suivante : comme les constantes numériques jouent un rôle très important pour la résolution pratique des problèmes, on s'attache tout particulièrement à les raffiner, même si cela se traduit par une légère perte au niveau de la dépendance en m.

Par ailleurs, le facteur p qui apparaît dans le membre de droite réduit le champ d'application du Théorème 11, qui, pour certaines questions, gagne à être remplacé par l'étude d'une forme linéaire de logarithmes archimédienne. Cependant, quand p est un nombre que l'on contrôle très bien, le Théorème 11 se révèle riche de conséquences, et il est en outre important de préciser que le facteur p disparaît et la constante numérique diminue si les deux rationnels sont p-adiquement proches de 1. C'est par exemple le cas pour l'équation diophantienne

$$\frac{10^{nt}-1}{10^t-1} = y^q, \qquad \text{en entiers } q \geq 3, y \geq 2, t \geq 1, n \geq 3. \tag{8}$$

En effet, réécrivons (8) sous la forme

$$\frac{10^{nt}}{10^t-1} = y^q - \left(\frac{1}{1-10^t}\right)^1 =: \Lambda,$$

et appliquons le Théorème 11 avec $p=5$. On obtient alors

$$nt \leq c\,t \log y \log^2 q,$$

où c est une constante numérique, d'autant plus petite que t est grand. Or il est clair que nt est de l'ordre de grandeur de $q \log y$. Ainsi, à t fixé, on obtient une bonne majoration de q, indépendante de n et de y. Par exemple, dans le cas $t=1$, on obtient $q \leq 2063$.

Afin de traiter (8), il convient de majorer t et, à cet effet, de faire appel (comme dans la partie 5) à un résultat de Le [27], qui majore t en fonction de q. Or l'on vient d'obtenir, via les formes linéaires de logarithmes 5–adiques, une minoration de t en fonction de q. Les deux estimations se croisent et conduisent, dans ce cas précis, à $t \leq 11$. D'après le Théorème 10, t est nécessairement impair, donc il ne nous reste plus que six équations à traiter.

Pour cela, on montre à l'aide de congruences (*cf.* Troisième étape de la démonstration du Théorème 10) que toute solution vérifie $n \equiv 1 \pmod q$, puis on conclut en utilisant le Théorème 8, ou bien en procédant exactement comme lors de la quatrième étape de la démonstration du Théorème 10.

À l'aide de longs calculs sur ordinateur, nous avons appliqué cette méthode pour traiter les valeurs de x auxquelles s'applique le lemme hypergéométrique de Le [27]. Nous avons cependant utilisé le raffinement du Théorème 1 démontré dans [9] et avons obtenu le résultat suivant [19].

Théorème 12. *Si l'équation (1) a une solution* (x, y, n, q) *avec* $n \geq 5$, *alors il existe un nombre premier* p *tel que* p *divise* x *et* q *divise* $p-1$. *En particulier, on a* $x \geq 2q+1$.

Le Théorème 12 contient en particulier l'énoncé suivant, obtenu dans [17], qui résout une conjecture vieille d'une cinquantaine d'années.

Corollaire 1. *Un nombre entier supérieur à 1 ne s'écrivant qu'avec le chiffre 1 en base dix n'est pas une puissance parfaite.*

Comme toutes les solutions de (1) vérifiant $q = 2$ sont connues, le Théorème 12 résout complètement (1) quand x est un produit de nombres premiers de la forme $2^a + 1$. En outre, comme l'on dispose (*cf.* Inkeri [25]) de quelques informations sur (1) avec $q = 3$, on connaît toutes les solutions de (1) si x est une puissance quelconque d'un entier inférieur ou égal à 20 et différent de 11. On est ainsi conduit à formuler le problème suivant.

Problème 1. *Montrer que l'équation*

$$\frac{11^{tn} - 1}{11^t - 1} = y^5 \tag{9}$$

n'admet qu'un nombre fini de solutions (y, t, n), *où* $t \geq 1$, $y \geq 2$ *et* $n \geq 3$ *sont des entiers.*

Pour être complet, il convient de mentionner que la théorie des formes linéaires de logarithmes ultramétriques simultanées en plusieurs places, développée dans [11], permet d'étendre sensiblement le Théorème 12.

7. À nouveau les congruences

Au cours de la troisième étape de la démonstration présentée dans la partie 5, nous avons vu comment un raisonnement de congruences permet de montrer, *en principe*, que, si les entiers x et q sont fixés, et s'il existe n et y vérifiant $(x^n - 1)/(x - 1) = y^q$, alors n est congru à 1 modulo q. Ceci ne nous permet cependant pas de résoudre le Problème 1 car la variable t peut prendre des valeurs arbitrairement grandes. Toutefois, une légère modification de l'argument précédent nous a permis [16, 18] de résoudre (9) et plus généralement de résoudre (1) pour tout x assez petit.

Théorème 13. *Si l'équation* (1) *possède une quatrième solution* (z^t, y, n, q), *alors* $z > 10000$ *si* $t \geq 1$, *et* $z > 10^6$ *si* $t = 1$.

Pour démontrer ce résultat, on commence par appliquer le Théorème 12, et on se retrouve alors avec un petit nombre d'équations à traiter du type

$$\frac{z^{tn} - 1}{z^t - 1} = y^q,$$

où q divise $\varphi(z)$, que l'on traite à l'aide de la méthode décrite dans [16].

8. Une extension du théorème de Nagell et Ljunggren

Le Théorème 5 affirme que (1) n'a qu'un nombre fini de solutions (x, y, n, q) pour lesquelles n est divisible par un nombre premier p ; cependant, (1) n'est complètement résolue que dans le cas $p = 3$ (cf. Théorème 1). La méthode que nous présentons maintenant et qui fait l'objet de [14] permet d'étendre les résultats de Nagell et Ljunggren aux nombres premiers $p = 5, 7, 11$ et 13, ainsi que de résoudre (1) pour certaines petites valeurs de p et q.

Théorème 14. *Si (x, y, n, q) est une éventuelle quatrième solution de (1) et si p est un diviseur premier impair de n, alors ou bien $p \geq 29$, ou bien $(p, q) \in \{(17, 17), (19, 19), (23, 23)\}$. En outre, on a $(p, q) \notin \{(29, 5), (29, 19), (29, 23), (31, 23), (37, 5), (37, 7), (37, 11), (67, 5)\}$, et si $q = 3$, alors $p \geq 101$.*

Nous indiquons maintenant les grandes lignes de la démonstration. Soient $p \geq 5$ un nombre premier et n un multiple de p. Le Théorème 3 entraîne que si l'équation (1) a une solution (x, y, n, q), alors l'une des équations

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = y^q, \qquad \frac{x^p - 1}{x - 1} = p\, y^q \tag{10}$$

admet une solution vérifiant $x \geq 2$. Il nous suffit donc de résoudre ces deux équations pour les couples (p, q) figurant dans l'énoncé du Théorème 14. Au premier abord, cela semble irréaliste car les bornes théoriques pour la taille des solutions des équations superelliptiques $f(x) = ay^m$ sont très élevées, et, sauf dans certains cas bien particuliers *ad hoc*, l'ordinateur ne peut les résoudre dès que, disons, $m \times \deg(f)$ excède 20. Cependant, dans les deux exemples qui nous intéressent, le polynôme f est cyclotomique et possède ainsi de nombreuses propriétés, que l'on peut exploiter, pourvu que p soit différent de q et que q ne divise pas le nombre de classes relatif du p-ième corps cyclotomique. Cette méthode, dont l'origine remonte à des travaux de Bilu [6] et Bilu & Hanrot [7], et qui a également été utilisée avec succès dans le cadre de l'équation de Catalan [13], permet de majorer x par une borne de l'ordre de $p^q\, q^{pq}$, et il suffit alors d'une simple énumération pour achever la résolution des équations (10).

Par ailleurs, un résultat classique de la théorie des équations diophantiennes exponentielles affirme que, pour les équations (10), on sait majorer q en fonction de p. Les bornes reposent entre autres sur des minorations de formes linéaires en ≥ 3 logarithmes, et sont de ce fait très élevées : supérieures à $(3p)^{10p}$ si l'on applique les meilleures estimations actuelles [8]. Or, grâce aux propriétés des polynômes cyclotomiques, il s'avère en fait possible de ne faire appel qu'à des formes linéaires en deux logarithmes pour borner q en fonction de p dans les équations (10) : on obtient alors par exemple $q \leq 5521$ pour $p = 5$, et $q \leq 9000p^2 \log^4 p$ pour tout p premier. Il ne reste alors plus qu'un nombre raisonnable de couples $(5, q)$ à traiter, pour lesquels on applique la méthode décrite dans le précédent paragraphe… si toutefois p n'est pas égal à q ! Dans le cas contraire, on se voit contraint d'utiliser les techniques développées par Bilu & Hanrot [7] et, malgré de multiples astuces de programmation, les capacités actuelles des ordinateurs ne nous permettent pas de résoudre (10) dès que $p = q \geq 17$.

9. Autres résultats

On désigne par $\omega(n)$ le nombre de facteurs premiers distincts de l'entier rationnel $n \geq 2$. Shorey [44, 45] a démontré des versions faibles des Théorèmes 8 et 9 (sa conclusion est la finitude du nombre de solutions et non la résolution complète), desquelles il a déduit de nouvelles informations relatives à (1). En examinant ses démonstrations, il s'avère que, grâce aux Théorèmes B et Le, on peut maintenant démontrer le résultat suivant.

Théorème 15. *Si l'équation (1) a une solution (x, y, n, q) avec $n \geq 5$, alors $\omega(n) \leq q - 2$. Si, de plus, on suppose $(n, Q_n) = 1$, alors $\omega(n) = 1$ si $q = 5$ et $2^{\omega(n)} \leq q - 1$ sinon. D'autre part, si q divise n, alors n est une puissance de q.*

On en déduit immédiatement que si (1) possède une solution vérifiant $q = 3$, alors n est une puissance d'un nombre premier au moins égal à 5.

Dans les parties 5 et 6, on a résolu l'équation (1) dans le cas où x est un carré ou la puissance de certains entiers fixés. Hirata-Kohno & Shorey [24] ont complété ces informations en s'intéressant à (1) sous l'hypothèse additionnelle que x est une puissance μ-ième.

Théorème 16. *Soit $\mu \geq 3$ un nombre premier. Alors l'équation (1) n'a qu'un nombre fini de solutions (x, y, n, q) vérifiant*

$$q > 2(\mu - 1)(2\mu - 3)$$

et $x = z^\mu$ pour un entier $z > 1$. En outre, pour de telles solutions, x^n est majoré par une constante effectivement calculable ne dépendant que de μ.

Il découle du Théorème 16 et du Théorème 9 que (1) ne possède qu'un nombre fini de solutions (x, y, n, q) telles que x est un cube et $q \notin \{5, 7, 11\}$, et l'on est naturellement amené à poser le problème suivant.

Problème 2. *Montrer que l'équation*

$$\frac{(z^3)^n - 1}{z^3 - 1} = y^5$$

n'admet qu'un nombre fini de solutions (z, y, n), où z, y et n sont des entiers supérieurs ou égaux à 3.

Aussi étonnant que cela puisse paraître, aucune technique actuellement connue ne semble en mesure de résoudre le Problème 2.

10. L'équation $a\dfrac{x^n - 1}{x - 1} = y^q$

Après s'être demandé si un nombre ne s'écrivant qu'avec le chiffre 1 en base x pouvait être une puissance pure, il est naturel de se poser la même question pour les nombres s'écrivant avec le même chiffre, ou bien avec le même bloc de chiffres, répété plusieurs fois. Ce problème s'avère en général plus simple que l'étude de (1), et il fut résolu, dans le cas de la base 10 et pour tout chiffre autre que 1, par Obláth [39] dès 1956. Par la suite, Inkeri [25] considéra le cas d'autres bases, mais il buta lui aussi sur l'équation (1). Il observa cependant que si l'on sait résoudre (1) pour un entier $x \geq 2$ fixé, alors il devient assez facile de résoudre l'équation

$$a\,\frac{x^n-1}{x-1} = y^q, \qquad \text{en inconnues } n \geq 3,\ x \geq 2,\ 1 \leq a < x,\ y \geq 2,\ q \geq 2, \tag{11}$$

par exemple en étudiant les diviseurs premiers de $(x^n-1)/(x-1)$. Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant [10] et avons les moyens de résoudre complètement (11) pour toute valeur fixée de x... dans les limites, bien sûr, des possibilités des ordinateurs !

Théorème 17. *Les seules solutions de l'équation (11) avec $x \leq 100$ ou $x = 1000$ sont*

$$\begin{aligned}(a,x,y,n,q) \in \big\{&(1,3,11,5,2),(1,7,20,4,2),(4,7,40,4,2),(1,18,7,3,3),\\ &(7,18,49,3,2),(7,18,7,3,4),(8,18,14,3,3),(3,22,39,3,2),\\ &(12,22,78,3,2),(19,30,133,3,2),(21,41,1218,4,2),\\ &(13,68,247,3,2),(52,68,494,3,2),(58,99,7540,4,2)\big\}.\end{aligned}$$

En particulier, ce théorème affirme que si a, b et c désignent n'importe quel chiffre, alors aucun des nombres non nuls écrits en base dix

$$aa\ldots aa, \qquad abab\ldots abab \qquad \text{et} \qquad abcabc\ldots abcabc$$

n'est une puissance pure, sauf, bien sûr, les nombres a, ab et abc lorsque ceux-ci sont des puissances parfaites.

11. Le cas $x < 0$

Les résultats de Nagell et Ljunggren mentionnés au paragraphe 2 sont plus généraux que le Théorème 1, car ils incluent la résolution de (1) pour $x < 0$. Comme il est expliqué dans [18], ce problème revient à résoudre l'équation

$$\frac{x^n+1}{x+1} = y^q, \quad \text{en entiers } x > 1, y > 1, n \geq 3 \text{ impair}, q \geq 2, \tag{12}$$

qui possède la solution $(x,y,n,q) = (19,7,3,3)$. Il s'agit d'ailleurs de l'unique solution avec $n = 3$ ou 4 [36, 37, 31]. Il est tentant de conjecturer qu'il s'agit là de l'unique solution de (12), mais nous sommes loin de pouvoir le démontrer. Cependant, nous avons plusieurs résultats partiels, qui vont dans le sens de cette conjecture.

Les méthodes utilisées lors de l'étude de l'équation (1) s'appliquent également à (12), et permettent de démontrer les résultats suivants. En outre, les nouvelles estimations [11] ont permis de considérablement réduire le temps de calcul [18].

Théorème 18. *Si l'équation (12) a une solution (x, y, n, q) avec $n \geq 5$, alors il existe un nombre premier p tel que p divise x et q divise $p-1$. En particulier, on a $x \geq 2q+1$. L'équation (12) n'a pas de solution (x, y, n, q) avec $2 \leq x \leq 10^4$ et $n \geq 5$.*

Le cas particulier $x = 2$ est traité dans [12], l'équation correspondante intervenant dans la classification des groupes finis simples.

12. Applications

La question suivante apparaît en théorie des groupes finis et est fortement liée à l'équation (1) : trouver des nombres premiers P et Q et des entiers rationnels $n \geq 3$ et $a \geq 1$ tels que

$$\frac{Q^n - 1}{Q - 1} = P^a.$$

Plusieurs travaux y font référence, notamment [12, 23, 29, 49] et [40, page 121]. Observons que l'équation (12) possède également des liens avec la théorie des groupes finis [12].

Une autre application concerne l'irrationalité de nombres réels dont le développement décimal est de la forme suivante. Soient $g \geq 2$ et $h \geq 2$ des entiers. Pour tout entier $m \geq 1$, on définit $(m)_h = a_1 \dots a_r$ la suite des chiffres de m dans son écriture en base h, i.e. $m = a_1 h^{r-1} + \dots + a_r$, avec $a_1 > 0$ et $0 \leq a_i < h$ pour $1 \leq i \leq r$. Pour une suite $(n_i)_{i \geq 1}$ d'entiers positifs ou nuls, on pose

$$a_h(g) = 0.(g^{n_1})_h (g^{n_2})_h \dots$$

Il est établi que $a_h(g)$ est irrationnel si la suite $(n_i)_{i \geq 1}$ est non bornée (voir par exemple [41]), et Sander [41] a étudié le cas où cette suite est bornée et admet exactement deux éléments qui apparaissent une infinité de fois. Son Theorem 3 repose sur une application incorrecte d'un résultat de [47] et n'est à ce jour pas démontré. Cependant, comme il est expliqué par exemple dans [19], les Théorèmes 12 et 13 permettent de montrer l'irrationalité de nombres $a_h(g)$ sous les hypothèses considérées par Sander.

Références bibliographiques

[1] A. Baker, *Linear forms in the logarithms of algebraic numbers*, Mathematika 12 (1966), 204–216.

[2] A. Baker, *A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms I–III*, Acta Arith. 21 (1972), 117–129 ; 24 (1973), 33–36 ; 27 (1975), 247–252.

[3] A. Baker and G. Wüstholz, *Logarithmic forms and group varieties*, J. reine angew. Math. 442 (1993), 19–62.

[4] M. Bennett, *Rational approximation to algebraic number of small height : The diophantine equation $|ax^n - by^n| = 1$*, J. reine angew. Math. (à paraître).

[5] M. Bennett and B.M.M. De Weger, *On the Diophantine equation $| ax^n - by^n | = 1$*, Math. Comp. 67 (1998), 413–438.

[6] Y. Bilu, *Solving superelliptic Diophantine equations by the method of Gelfond–Baker*, preprint 94–09, Mathématiques Stochastiques, Univ. Bordeaux 2 (1994).

[7] Y. Bilu and G. Hanrot, *Solving superelliptic Diophantine equations by Baker's method*, Compositio Math. 112 (1998), 273–312.

[8] Y. Bugeaud, *Sur la distance entre deux puissances pures*, C. R. Acad. Sci. Paris 322 (1996), 1119–1121.

[9] Y. Bugeaud, *Linear forms in p-adic logarithms and the Diophantine equation* $\frac{x^n-1}{x-1} = y^q$, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 127 (1999), 373–381.

[10] Y. Bugeaud, *On the Diophantine equation* $a\frac{x^n-1}{x-1} = y^q$, Proceedings of the Number Theory Conference held in Turku, Ed. M. Jutila and T. Metsänkylä, De Gruyter (2001), 19–24.

[11] Y. Bugeaud, *Linear forms in two p-adic logarithms and applications to Diophantine problems* (soumis).

[12] Y. Bugeaud, Zhenfu Cao and M. Mignotte, *On simple K_4-groups*, J. Algebra (à paraître).

[13] Y. Bugeaud et G. Hanrot, *Un nouveau critère pour l'équation de Catalan*, Mathematika (à paraître).

[14] Y. Bugeaud, G. Hanrot et M. Mignotte, *Sur l'équation diophantienne* $\frac{x^n-1}{x-1} = y^q$, *III*, Proc. London Math. Soc. (à paraître).

[15] Y. Bugeaud et M. Laurent, *Minoration effective de la distance p-adique entre puissances de nombres algébriques*, J. Number Theory 61 (1996), 311–342.

[16] Y. Bugeaud et M. Mignotte, *Sur l'équation diophantienne* $\frac{x^n-1}{x-1} = y^q$, *II*, C.R.A.S. Série I, t. 328 (1999), 741–744.

[17] Y. Bugeaud and M. Mignotte, *On integers with identical digits*, Mathematika (à paraître).

[18] Y. Bugeaud and M. Mignotte, *On the Diophantine equation* $\frac{x^n-1}{x-1} = y^q$ *with negative* x, Proceedings of the Millenial Conference on Number Theory (à paraître).

[19] Y. Bugeaud, M. Mignotte and Y. Roy, *On the Diophantine equation* $\frac{x^n-1}{x-1} = y^q$, Pacific J. Math. 193 (2000), 257–268.

[20] Y. Bugeaud, M. Mignotte, Y. Roy and T. N. Shorey, *The diophantine equation* $(x^n - 1)/(x-1) = y^q$ *has no solution with* x *square*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 127 (1999), 353–372.

[21] H. Darmon and L. Merel, *Winding quotients and some variants of Fermat's Last Theorem*, J. reine angew. Math. 490 (1997), 81–100.

[22] B. N. Delone, *Solution of the indeterminate equation* $X^3q + Y^3 = 1$, Izv. Akad. Nauk SSR (6) 16 (1922), 253–272.

[23] R. M. Guralnik, *Subgroups of prime power index in a simple group*, J. Algebra 81 (1983), 304–311.

[24] N. Hirata-Kohno and T. N. Shorey *On the equation* $(x^m - 1)/(x-1) = y^q$ *with* x *power*, Analytic Number Theory, ed. Y. Motohashi, London Math. Soc. Lecture Note Series 247 (1997), 343–351, Cambridge University Press, Cambridge.

[25] K. Inkeri, *On the Diophantine equation* $a(x^n-1)/(x-1)=y^m$, Acta Arith. 21 (1972), 299–311.

[26] M. Laurent, M. Mignotte et Y. Nesterenko, *Formes linéaires en deux logarithmes et déterminants d'interpolation*, J. Number Th. 55 (1995), 285–321.

[27] Maohua Le, *A note on the diophantine equation* $(x^m-1)/(x-1)=y^n$, Acta Arith. 64 (1993), 19–28.

[28] Maohua Le, *A note on the Diophantine equation* $(x^m-1)/(x-1)=y^n+1$, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 116 (1994), 385–389.

[29] Maohua Le, *A Diophantine equation concerning finite groups*, Pacific J. of Math. 169 (1995), 335–341.

[30] Maohua Le, *A note on perfect powers of the form* $x^{m-1}+\ldots+x+1$, Acta Arith. 69 (1995), 91–98.

[31] W. Ljunggren, *Noen Setninger om ubestemte likninger av formen* $(x^n-1)/(x-1)=y^q$, Norsk. Mat. Tidsskr. 25 (1943), 17–20.

[32] W. Ljunggren, *On an improvement of a theorem of T. Nagell concerning the Diophantine equation* $Ax^3+By^3=C$, Math. Scand. 1 (1953), 297–309.

[33] M. Mignotte, *A note on the equation* $ax^n-by^n=c$, Acta Arith. 75 (1997), 287–295.

[34] M. Mignotte, *On the Diophantine equation* $(x^n-1)/(x-1)=y^q$, in: Algebraic Number Theory and Diophantine Analysis, F. Halter-Koch and R. F. Tichy Eds, W. de Gruyter, Berlin (2000).

[35] M. Mignotte, *Catalan's equation just before 2000*, Proceedings of the Number Theory Conference held in Turku, Ed. M. Jutila and T. Metsänkylä, De Gruyter (2001), 247–254.

[36] T. Nagell, *Des équations indéterminées* $x^2+x+1=y^n$ *et* $x^2+x+1=3y^n$, Nordsk. Mat. Forenings Skr. (1) 2 (1920), 14 pages.

[37] T. Nagell, *Note sur l'équation indéterminée* $(x^n-1)/(x-1)=y^q$, Norsk. Mat. Tidsskr. 2 (1920), 75–78.

[38] T. Nagell, *Solution complète de quelques équations cubiques à deux indéterminées*, J. de Math. (9) 4 (1925), 209–270.

[39] R. Oblàth, *Une propriété des puissances parfaites*, Mathesis 65 (1956), 356–364.

[40] P. Ribenboim, Catalan's Conjecture, Academic Press, Boston (1994).

[41] J. W. Sander, *Irrationality criteria for Mahler's numbers*, J. Number Theory 52 (1995), 145–156.

[42] N. Saradha and T. N. Shorey, *The equation* $(x^n-1)/(x-1)=y^q$ *with* x *square*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 125 (1999), 1–19.

[43] T. N. Shorey, *Linear forms in the logarithms of algebraic numbers with small coefficients I, II*, J. Indian Math. Soc. (N. S.) 38 (1974), 271–284 ; ibid. 38 (1974), 285–292.

[44] T. N. Shorey, *On the equation* $z^q=(x^n-1)/(x-1)$, Indag. Math. 48 (1986), 345–351.

[45] T. N. Shorey, *Perfect powers in values of certain polynomials at integer points*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 99 (1986), 195–207.

[46] T. N. Shorey, *Exponential Diophantine equations involving products of consecutive integers and related equations*, in: Number Theory, edited by R. P. Bambah, V. C. Dumir and R. J. Hans-Gill, Hindustan Book Agency (1999), 463–495.

[47] T. N. Shorey and R. Tijdeman, *New applications of Diophantine approximations to Diophantine equations*, Math. Scand. 39 (1976), 5–18.

[48] T. N. Shorey and R. Tijdeman, Exponential Diophantine equations, Cambridge Tracts in Mathematics 87 (1986), Cambridge University Press, Cambridge.

[49] Qi Sun, *An unsolved Diophantine equation in finite groups*, J. Math. Res. Exposition 6 (1986), 20 (en chinois).

[50] R. Tijdeman, *On the equation of Catalan*, Acta Arith. 29 (1976), 197–209.

[51] M. Waldschmidt, *Minorations de combinaisons linéaires de logarithmes de nombres algébriques*, Canadian J. Math. 45 (1993), 176–224.

[52] Li Yu and Maohua Le, *On the Diophantine equation* $(x^m - 1)/(x - 1) = y^n$, Acta Arith. 83 (1995), 363–366.

[53] Ping-Zhi Yuan, Comment : "A note on perfect powers of the form $x^{m-1} + \ldots + x + 1$", Acta Arith. 69 (1995), 91–98, by Maohua Le and "On the Diophantine equation $(x^m - 1)/(x - 1) = y^n$", Acta Arith. 83 (1995), 363–366, by Li Yu & Maohua Le. *Acta Arith.* **83** (1998), 199.

Yann Bugeaud, Maurice Mignotte
Université Louis Pasteur
U. F. R. de mathématiques
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG

e-mail : `bugeaud@math.u-strasbg.fr` `mignotte@math.u-strasbg.fr`