# Approximation par des nombres algébriques

*Yann Bugeaud* (Strasbourg)

Abstract. For a real algebraic number $\theta$ of degree $D$, it follows from results of W. M. Schmidt and E. Wirsing that for every $\varepsilon>0$ and every positive integer $d<D$ there exist infinitely many algebraic numbers $\alpha$ of degree $d$ such that $|\theta-\alpha|<\mathrm{H}(\alpha)^{-d-1+\varepsilon}$. Here, H denotes the naïve height. In the present work, we provide very precise additional informations about the height of such $\alpha$'s. We also give a sharp approximation property valid for almost all real numbers (in the sense of Lebesgue measure), and show with an example that this cannot be satisfied by all real transcendental numbers. Further, as an application of our main theorem, we extend a previous result of E. Bombieri & J. Mueller in showing that, for any given real algebraic number $\theta$, there exist infinitely many real number fields $\mathbf{K}$ for which precise information about effective approximation of $\theta$ relatively to $\mathbf{K}$ can be given.

1991 Mathematics Subject Classification : 11J68, 11J82, 11K60.

## 1. Introduction

En 1961, E. Wirsing [22] a montré que si le nombre complexe $\theta$ n'est pas algébrique de degré inférieur ou égal à $D\,(D \geq 2)$, alors, pour tout entier $d \in \{2, \ldots, D\}$, il existe une infinité de nombres algébriques $\alpha$ de degré majoré par $d$ vérifiant

$$|\theta-\alpha| \leq \mathrm{H}(\alpha)^{-d/4}, \tag{1}$$

où $\mathrm{H}(\alpha)$ désigne la hauteur naïve de $\alpha$. Ces dernières années, plusieurs résultats de cette nature ont été obtenus par G. Diaz, M. Laurent, D. Roy et M. Waldschmidt [6, 8, 9, 10, 14]. Notamment, M. Laurent & D. Roy [9], Corollaire 1, ont prouvé que, sous les hypothèses supplémentaires $D \geq 27$ et $d \geq 26$, il existe une infinité de nombres algébriques $\alpha$ vérifiant

$$0.001\, d \leq \deg(\alpha) \leq d \quad \text{et} \quad |\theta-\alpha| \leq \mathrm{H}(\alpha)^{-d/1000}. \tag{2}$$

L'existence de suites infinies de bonnes approximations algébriques de nombres transcendants, combinée à des mesures précises d'approximation simultanée, permet d'obtenir de nouveaux énoncés d'indépendance algébrique, comme l'ont récemment montré D. Roy & M. Waldschmidt [13, 14, 15], ainsi que P. Philippon [11].

Nous nous intéressons ici dans un premier temps à l'approximation des nombres algébriques réels par des nombres algébriques de plus bas degré. Dans ce cas, (1) a été amélioré et complété par W. M. Schmidt (*cf.* [16], Theorem 7I), comme l'une des nombreuses conséquences de son théorème du sous-espace : il a démontré, à l'aide d'une autre estimation de E. Wirsing, que si $\theta$ est un réel algébrique de degré strictement supérieur à $D\,(D \geq 2)$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité de nombres algébriques réels $\alpha$, de degré majoré par $D$, tels que

$$|\theta-\alpha| < \mathrm{H}(\alpha)^{-D-1+\varepsilon}. \tag{3}$$

Ce résultat est presque optimal, dans le sens où l'on ne peut pas remplacer $\varepsilon$ par un réel strictement négatif. En outre, sous ces hypothèses, le Corollaire 1 de [9], où degré et mesure de Mahler sont séparés, s'applique, et permet ainsi de prouver l'existence de bonnes approximations algébriques satisfaisant des contraintes variées. Dans le présent travail, nous apportons des informations précises concernant la hauteur et le degré des solutions $\alpha$ de (3), informations qui restent valables pour l'approximation de presque tout nombre réel $\theta$ (au sens de la mesure de Lebesgue).

Dans un second temps, nous présentons un énoncé métrique qui complète le résultat de [9] : nous parvenons à contrôler précisément, non seulement le degré (comme dans (2)), mais également la mesure des approximants de presque tout (au sens de la mesure de Lebesgue) nombre réel. Néanmoins, comme le montrent plusieurs contre-exemples, on ne pouvait espérer obtenir un résultat plus général.

Enfin, nous reprenons une idée de E. Bombieri & J. Mueller [4] et, à l'aide de leur version du principe de Thue, nous déduisons de notre résultat principal de nouvelles informations concernant l'approximation effective des nombres algébriques réels. Ainsi, nous démontrons que si $\theta$ est un réel algébrique de degré $D \geq 3$ et si $\eta$ est un nombre strictement positif, alors il existe une infinité de corps quadratiques réels $\mathbf{K}$ tels que la mesure d'irrationalité effective de $\theta$ relativement à $\mathbf{K}$ est inférieure à $2D/3 + \eta$.

Nous avons choisi d'étudier l'approximation des nombres *réels*. Nous énonçons cependant les résultats correspondant dans le cas complexe, sans détailler les démonstrations, qui reposent sur les mêmes idées.

**Remerciements :** Je suis très reconnaissant envers Michel Laurent, Damien Roy et Michel Waldschmidt pour leurs nombreux et pertinents commentaires. En outre, je remercie l'arbitre pour ses remarques très judicieuses.

## 2. Notations et principaux résultats

Nous utilisons les notations usuelles, à savoir que si $P(X)$ est un polynôme à coefficients entiers s'écrivant

$$P(X) = a_d\, X^d + \ldots + a_1\, X + a_0 = a_d \prod_{i=1}^{d} (X - \alpha_i)$$

avec $a_d > 0$, on note $\mathrm{H}(P)$ sa *hauteur* naïve

$$\mathrm{H}(P) = \max_{0 \leq j \leq d} |a_j|,$$

et $\mathbf{M}(P)$ sa *mesure de Mahler*

$$\mathbf{M}(P) = a_d \prod_{i=1}^{d} \max\{1, |\alpha_i|\}.$$

Ces deux mesures vérifient l'encadrement (*cf.* [8])

$$2^{-d}\,\mathrm{H}(P) \le \mathbf{M}(P) \le \mathrm{H}(P)\,\sqrt{d+1}. \tag{4}$$

A l'instar de M. Laurent & D. Roy [9], on note

$$\mu(P) = \log \mathbf{M}(P).$$

Si $\alpha$ est un nombre algébrique de polynôme minimal $P(X)$, la *hauteur* de $\alpha$ et sa *mesure de Mahler* sont définies par, respectivement, $\mathrm{H}(\alpha) = \mathrm{H}(P)$ et $\mathbf{M}(\alpha) = \mathbf{M}(P)$. En outre, on pose $\mu(\alpha) = \mu(P)$ et on désigne par $\mathrm{h}(\alpha) = \mu(\alpha)/d$ la hauteur logarithmique de Weil de $\alpha$.

Avant d'énoncer les Théorèmes 1 et 2, il convient de rappeler brièvement les résultats connus jusqu'à présent, et pour cela d'introduire les notations suivantes.

**Définition.** *Soient $d \ge 1$ un entier et $\theta$ un nombre complexe. On note $w_d(\theta)$ la borne supérieure des nombres réels $w$ pour lesquels il existe une infinité de polynômes $P$ à coefficients entiers, de degré majoré par $d$, vérifiant*

$$0 < |P(\theta)| \le \mathrm{H}(P)^{-w}.$$

*De même, on note $w_d^*(\theta)$ la borne supérieure des nombres réels $w^*$ pour lesquels il existe une infinité de nombres algébriques $\alpha$, de degré majoré par $d$, vérifiant*

$$0 < |\theta - \alpha| \le \mathrm{H}(\alpha)^{-w^*-1}.$$

Pour tout entier $d$ et tout réel $\theta$, on voit facilement (*cf.* [16], page 44) que

$$w_d^*(\theta) \le w_d(\theta), \tag{5}$$

et la minoration $w_d(\theta) \ge d$, valable si $\theta$ n'est pas algébrique de degré $\le d$, découle du théorème de Minkowski. E. Wirsing [22] est le premier qui soit parvenu à estimer $w_d^*$ en fonction de $w_d$ et il a montré que pour tout entier $d$ et tout nombre réel $\theta$ qui n'est pas algébrique de degré inférieur ou égal à $d$, on a

$$w_d^*(\theta) \ge w_d(\theta) - d + 1,$$

$$w_d^*(\theta) \ge \frac{1}{2}\,(w_d(\theta) + 1),$$

$$w_d^*(\theta) \ge \frac{w_d(\theta)}{w_d(\theta) - d + 1}. \tag{6}$$

De son célèbre théorème du sous-espace (*cf.* [17], chapter *VI*), W. M. Schmidt déduit que tout nombre algébrique réel $\theta$ de degré strictement supérieur à $d$ vérifie $w_d(\theta) = d$, et il obtient $w_d^*(\theta) = d$, grâce à (5) et (6). Ainsi, pour un réel $\varepsilon > 0$, il existe une infinité de nombres algébriques $\alpha$ de degré $d$ vérifiant

$$0 < |\theta - \alpha| \leq \mathrm{H}(\alpha)^{-d-1+\varepsilon}. \tag{7}$$

Ceci est clair si $d = 1$ et découle de $w_{d-1}^*(\theta) < d$ si $d \geq 2$. Cependant ce résultat est ineffectif, en ce sens qu'il ne permet pas de déterminer explicitement un nombre réel $H$ tel qu'il existe un nombre algébrique $\alpha$, de degré $d$ et de hauteur majorée par $H$, vérifiant (7). Le Théorème 1, même s'il conserve ce caractère ineffectif, apporte des renseignements précis sur le degré et la hauteur des solutions de (7). Il s'applique en fait à une classe de nombres réels beaucoup plus étendue que l'ensemble des nombres algébriques, mais ne traite pas le problème de l'approximation par des nombres rationnels, couvert par le théorème de Dirichlet.

**Théorème 1.** *Soient $d \geq 2$ un entier et $\theta$ un réel qui n'est pas algébrique de degré $\leq d$. On suppose que $w_d(\theta) = d$ et que $w_{d-1}(\theta) < d$. Soient $\varepsilon$ et $\lambda$ des réels vérifiant $0 < \varepsilon < \lambda < d$. Alors, il existe un réel $H_1$, ne dépendant que de $\theta$, $\lambda$ et $\varepsilon$, et, pour tout $H \geq H_1$, un nombre algébrique réel $\alpha$ vérifiant*

$$\deg(\alpha) = d, \qquad H^{1-\varepsilon/\lambda} \leq \mathrm{H}(\alpha) \leq H \quad \text{et} \qquad |\theta - \alpha| \leq \mathrm{H}(\alpha)^{-d-1+\varepsilon}.$$

Dans tout ce travail, les résultats métriques sont relatifs à la mesure de Lebesgue et l'expression “presque tout” est à prendre au sens de la mesure de Lebesgue sur **R** ou sur **C**, suivant le contexte. En réponse à une conjecture de K. Mahler, V. G. Sprindžuk (*cf.* [19], page 63) a prouvé que pour presque tout réel $\theta$ et pour tout entier $d \geq 1$, on a $w_d(\theta) = d$ et donc $w_d^*(\theta) = d$, grâce à (5) et (6). Ce résultat est lui aussi ineffectif (dans le même sens que celui de W. M. Schmidt, énoncé ci-dessus), mais comme les hypothèses du Théorème 1 sont vérifiées, on obtient des renseignements qualitatifs nouveaux sur les bonnes approximations de $\theta$.

**Corollaire 1.** *Soient $d \geq 2$ un entier et $\varepsilon > 0$ un réel. Pour presque tout réel $\theta$, il existe un réel $H_2$, ne dépendant que de $\theta$, $\varepsilon$ et $d$, et pour tout $H \geq H_2$, un nombre algébrique réel $\alpha$ vérifiant*

$$\deg(\alpha) = d, \qquad H^{1-\varepsilon/(d-1)} \leq \mathrm{H}(\alpha) \leq H \quad \text{et} \qquad |\theta - \alpha| \leq \mathrm{H}(\alpha)^{-d-1+\varepsilon}.$$

**Remarque :** Comme l'a noté E. Wirsing [22], si $\theta$ est un nombre algébrique réel de degré $D$, alors il existe deux constantes explicites $\kappa_1 > 0$ et $\kappa_2 > 0$, ne dépendant que de $\theta$, telles que tout nombre algébrique $\alpha$ de degré au plus égal à $D - 1$ vérifie

$$|\theta - \alpha| \geq \kappa_1 \, \mathrm{H}(\alpha)^{-D+1},$$

et qu'une infinité de tels $\alpha$ soient solutions de

$$|\theta - \alpha| \leq \kappa_2 \, \mathrm{H}(\alpha)^{-D+1}.$$

E. Bombieri & J. Mueller ([4], Theorem 2) ont donné une démonstration nouvelle de ce résultat, qui repose sur le théorème des minima successifs de Minkowski.

Jusqu'à présent, on ne disposait d'aucun énoncé vraiment satisfaisant d'approximation simultanée généralisant le résultat de E. Wirsing [22], dans le sens où l'on ne pouvait pas imposer que la mesure des approximants vérifie des contraintes précises. Cet obstacle est levé dans les énoncés ci-dessus : le corollaire suivant découle immédiatement du Théorème 1.

**Corollaire 2.** *Soient $m \geq 1$ et $d \geq 2$ des entiers et $\varepsilon, \lambda$ des réels vérifiant $0 < \varepsilon < \lambda < d$. Soient $\theta_1, \ldots, \theta_m$ des nombres algébriques réels de degré strictement supérieur à $d$. Il existe un réel $H_3$, ne dépendant que de $\theta_1, \ldots, \theta_m, \lambda$ et $\varepsilon$, vérifiant la propriété suivante. Pour tout $H > H_3$, il existe des nombres algébriques réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ tels que, pour tout entier $1 \leq i \leq m$, on ait*

$$\deg(\alpha_i) = d, \qquad H^{1-\varepsilon/\lambda} \leq \mathrm{H}(\alpha_i) \leq H \quad \text{et} \qquad |\theta_i - \alpha_i| \leq \mathrm{H}(\alpha_i)^{-d-1+\varepsilon}.$$

Nos Corollaires 1 et 2 dépendent directement de théorèmes de V. G. Sprindžuk et W. M. Schmidt, dont les démonstrations sont de nature ineffective. Par conséquent, notre méthode ne permet pas de déterminer explicitement les réels $H_2$ et $H_3$.

Les énoncés précédents concernent exclusivement l'approximation des nombres réels. Cependant, le cas des nombres complexes non réels se traite exactement de la même manière, en faisant référence aux résultats correspondants de E. Wirsing, V. G. Sprindžuk et W. M. Schmidt. On obtient alors l'énoncé suivant, qui ne couvre pas l'approximation par des rationnels, ni par des nombres quadratiques.

**Théorème 1'.** *Soient $d \geq 3$ un entier et $\theta$ un nombre complexe non réel qui n'est pas algébrique de degré $\leq d$. On suppose que $w_d(\theta) = (d-1)/2$ et que $w_{d-1}(\theta) < (d-1)/2$. Soient $\varepsilon$ et $\lambda$ des réels vérifiant $0 < \varepsilon < \lambda < (d-1)/2$. Alors, il existe un réel $H_4$, ne dépendant que de $\theta$, $\lambda$ et $\varepsilon$, et, pour tout $H \geq H_4$, un nombre algébrique réel $\alpha$ vérifiant*

$$\deg(\alpha) = d, \qquad H^{1-\varepsilon/\lambda} \leq \mathrm{H}(\alpha) \leq H \quad \text{et} \qquad |\theta - \alpha| \leq \mathrm{H}(\alpha)^{-d/2-1/2+\varepsilon}.$$

Dans leur travail [9], M. Laurent & D. Roy démontrent le résultat suivant, dont la preuve implique en particulier leur énoncé (2), mentionné dans l'introduction.

**Théorème LR.** *Soient $\theta$ un nombre complexe transcendant, $a$ et $b$ deux nombres réels $\geq 1$, $(d_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante (au sens large) d'entiers positifs, et $(t_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante (au sens large) de nombres réels positifs. On suppose que pour tout $n \geq 0$ on a,*

$$d_n \geq 26, \quad t_n \geq 2\, d_n, \quad d_{n+1} \leq a\, d_n, \quad t_{n+1} \leq b\, t_n.$$

*Alors il existe une infinité d'entiers $n \geq 0$ ayant la propriété suivante : pour chacun de ces $n$, il existe un nombre algébrique $\alpha$ vérifiant*

$$\big(1000 \max\{1, (ab)^2/4\}\big)^{-1} d_n \leq \deg(\alpha) \leq d_n, \qquad \mu(\alpha) \leq t_n$$
$$\text{et} \qquad \log|\theta - \alpha| \leq -\big(500 \max\{1, (ab)^2/4\}\big)^{-1} d_n\, t_n.$$

Le Théorème LR n'apporte cependant aucun renseignement sur la suite des entiers $n$ vérifiant la propriété requise, ni sur la hauteur des approximants. Le résultat suivant, qui présente une propriété d'approximation satisfaite par presque tout nombre complexe transcendant, le complète sur ces deux points. En outre, il a l'avantage de ne plus faire appel à des suites de réels $(d_n)_{n\geq 0}$ et $(t_n)_{n\geq 0}$. On souligne toutefois dès à présent que le Théorème 2 n'est pas valable pour tous les nombres complexes transcendants (*cf.* Théorème 3).

**Théorème 2.** *Soient $d \geq 8$ et $t \geq 40\,d$ deux réels. Alors, pour presque tout nombre réel (resp. complexe) transcendant $\theta$, il existe un réel $t_0$, et, pour tout $t \geq t_0$, un nombre algébrique réel (resp. complexe) $\alpha$ vérifiant*

$$\frac{d}{24} \leq \deg(\alpha) \leq d, \qquad \frac{t}{140} \leq \mu(\alpha) \leq t$$
$$\text{et} \qquad -\frac{21}{5}\,d\,t \leq \log|\theta - \alpha| \leq -\frac{d\,t}{850}.$$

Dans le cas de l'approximation des nombres réels, nous démontrons (*cf.* le Théorème 4 ci–après) un résultat complémentaire.

Appliqué à $t = \kappa d/24$, le Théorème 2 conduit immédiatement au Corollaire 3, qui complète le Corollaire 2 de [9] et le Théorème 3.2 de [14]. Une nouvelle fois, notre énoncé a l'avantage de très bien contrôler la hauteur et le degré des approximants, mais l'inconvénient de ne pas être valable pour *tout* nombre réel transcendant, à l'inverse des résultats de [9] et [14].

**Corollaire 3.** *Soit $\kappa$ un nombre réel supérieur à 960. Pour presque tout nombre réel (resp. complexe) $\theta$, il existe un entier $d_0$ et, pour tout $d \geq d_0$, un nombre algébrique réel (resp. complexe) $\alpha$ vérifiant*

$$\frac{\kappa}{3360} \leq \mathrm{h}(\alpha) \leq \kappa, \qquad \frac{d}{24} \leq \deg(\alpha) \leq d$$
$$\text{et} \qquad -\frac{7}{40}\,\kappa\,d^2 \leq \log|\theta - \alpha| \leq -\frac{\kappa\,d^2}{20400}.$$

K. Mahler et J. Koksma ont classifié les nombres complexes suivant la qualité de leurs approximations algébriques et les ont répartis en quatre catégories, la première regroupant les nombres algébriques. Pour plus de détails, le lecteur est invité à consulter l'ouvrage de T. Schneider [18]. On se contente de rappeler la définition d'un *$U$-nombre de Mahler* (ou *$U^*$-nombre de Koksma*, les deux classifications étant en fait équivalentes).

**Définition.** *Le nombre complexe transcendant $\xi$ est un $U$-nombre (resp. un $U^*$-nombre) s'il existe un entier $n \geq 1$ pour lequel $w_n(\xi)$ (resp. $w_n^*(\xi)$) est infini.*

Le Théorème 2 ne peut cependant être vrai pour *tous* les nombres réels ou complexes $\theta$ que l'on souhaite approcher. En effet, le résultat ci-dessous montre qu'il faut, en particulier, exclure le cas des $U$-nombres réels, qui, on le rappelle, constituent un ensemble non dénombrable.

**Théorème 3.** *Soit $\xi$ un $U$-nombre et soit $n \geq 1$ un entier pour lequel $w_n^*(\xi)$ est infini. Soient $a \geq 1$, $b \geq 1$ et $c \leq 1$ des réels strictement positifs. Soit $D$ un entier supérieur à $2nb/c$. Alors il existe une suite de réels positifs $(X_k)_{k \geq 1}$, strictement croissante vers l'infini, satisfaisant la propriété suivante. Si, pour un entier $k \geq 1$, le nombre algébrique $\beta$ vérifie*

$$D \leq \deg(\beta) \leq aD \quad \text{et} \quad X_k \leq \mu(\beta) \leq bX_k,$$

*alors*

$$\log|\xi-\beta| \geq -cD\,X_k.$$

Ce résultat confirme l'idée qu'un nombre réel ayant de très bonnes approximations algébriques ne peut pas avoir de trop nombreuses bonnes approximations.

## 3. Une loi du 0 – 1

Soient $t \geq d \geq 1$ deux réels et posons

$$\overline{\mathbf{Q}}(d,t) := \{\gamma \in \overline{\mathbf{Q}} \mid [\mathbf{Q}(\gamma):\mathbf{Q}] \leq d,\, \mu(\gamma) \leq t\}.$$

Dans le travail [20], M. Waldschmidt a étudié la distribution des ensembles $\overline{\mathbf{Q}}(d,t)$ dans le plan complexe et, à cet effet, il a introduit, pour un nombre complexe transcendant $\theta$ et un réel $\kappa > 0$, l'ensemble

$$\mathcal{E}_\kappa(\theta) := \big\{(d,t)\,;\, t \geq d \geq d_0,\, \min_{\gamma\in\overline{\mathbf{Q}}(d,t)} |\theta-\gamma| \leq \exp\{-\kappa dt\}\big\},$$

où $d_0$ est un réel suffisamment grand (dépendant de $\theta$). Il a ainsi observé que si les ensembles $\overline{\mathbf{Q}}(d,t)$ étaient "bien distribués" dans le plan complexe, alors pour $\kappa$ assez grand, $\mathcal{E}_\kappa(\theta)$ serait vide, tandis que pour $\kappa$ assez petit l'ensemble complémentaire $\mathcal{E}_\kappa^c(\theta)$ serait vide. Cependant, il est possible de construire des nombres transcendants $\theta$ pour lesquels ces deux propriétés ne sont pas vérifiées pour une suite infinie de couples $(d,t)$ avec $d$ et $t$ non bornés. *A contrario*, elles sont vraisemblablement satisfaites par *presque tout* $\theta$ : la seconde propriété découle du Lemme 5 ci-dessous, alors que la première – avec la contrainte additionnelle $t \geq 40\,d$, omise dans [20] – se déduit du Théorème 2.

Il semble en fait très problématique de se débarrasser d'une condition technique liant $d$ et $t$, ou encore de remplacer la constante 40 dans l'inégalité ci-dessus par un réel positif arbitrairement petit (ou même par 1), et ce même en affaiblissant les autres constantes numériques du Théorème 2. La condition $t \geq d$ imposée par M. Waldschmidt paraît par conséquent arbitraire et peu naturelle ; en outre, la présence de $d_0$ dans la définition de $\mathcal{E}_\kappa(\theta)$ entraîne un certain flou. Pour pallier ces difficultés, nous proposons de considérer non plus des sous-ensembles de couples $(d,t)$, mais directement les sous-ensembles de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ suivants :

$${}^R\mathcal{F}_\kappa := \bigcap\nolimits_{\kappa'<\kappa} \bigcup\nolimits_{d_0\geq 1} \bigcup\nolimits_{h_0\geq 1} \bigcap\nolimits_{d\geq d_0} \bigcap\nolimits_{t\geq h_0 d} \bigcup\nolimits_{\gamma\in\overline{\mathbf{Q}}(d,t)\cap\mathbf{R}} ]\gamma - e^{-\kappa' dt}, \gamma + e^{-\kappa' dt}[,$$

$${}^R\mathcal{F}'_\kappa := \bigcap\nolimits_{\kappa'>\kappa} \bigcup\nolimits_{d_0\geq 1} \bigcup\nolimits_{h_0\geq 1} \bigcap\nolimits_{d\geq d_0} \bigcap\nolimits_{t\geq h_0 d} \bigcap\nolimits_{\gamma\in\overline{\mathbf{Q}}(d,t)\cap\mathbf{R}} ]\gamma - e^{-\kappa' dt}, \gamma + e^{-\kappa' dt}[^c,$$

$${}^C\mathcal{F}_\kappa := \bigcap\nolimits_{\kappa'<\kappa} \bigcup\nolimits_{d_0\geq 1} \bigcup\nolimits_{h_0\geq 1} \bigcap\nolimits_{d\geq d_0} \bigcap\nolimits_{t\geq h_0 d} \bigcup\nolimits_{\gamma\in\overline{\mathbf{Q}}(d,t)} B(\gamma, e^{-\kappa' dt})$$

et

$${}^C\mathcal{F}'_\kappa := \bigcap\nolimits_{\kappa'>\kappa} \bigcup\nolimits_{d_0\geq 1} \bigcup\nolimits_{h_0\geq 1} \bigcap\nolimits_{d\geq d_0} \bigcap\nolimits_{t\geq h_0 d} \bigcap\nolimits_{\gamma\in\overline{\mathbf{Q}}(d,t)} B(\gamma, e^{-\kappa' dt})^c,$$

où $\kappa$ est un réel positif et la notation $^c$ désigne l'ensemble complémentaire. En outre, pour $\theta \in \mathbf{R}$, on définit

$$\kappa_0(\theta) := \max\{\kappa > 0 \mid \theta \in {}^R\mathcal{F}_\kappa\}$$

et

$$\kappa_0'(\theta) := \min\{\kappa > 0 \mid \theta \in {}^R\mathcal{F}_\kappa'\},$$

en convenant que $\kappa_0(\theta) = 0$ (*resp.* $\kappa_0'(\theta) = \infty$) si $\theta$ n'appartient à aucun ensemble ${}^R\mathcal{F}_\kappa$ (*resp.* ${}^R\mathcal{F}_\kappa'$).

Notre définition et celle de M. Waldschmidt sont très liées, en ce sens que – les guillemets indiquent un léger manque de rigueur – "si le nombre transcendant $\theta$ appartient à ${}^C\mathcal{F}_\kappa$, alors il existe $d_0(\theta)$ tel que le complémentaire de $\mathcal{E}_\kappa(\theta)$ (défini avec $d_0(\theta)$) est vide" et "si le nombre transcendant $\theta$ appartient à ${}^C\mathcal{F}_\kappa'$, alors il existe $d_0'(\theta)$ tel que $\mathcal{E}_\kappa(\theta)$ (défini avec $d_0'(\theta)$) est vide".

L'intérêt principal de notre définition est que l'on a pour tout $\theta$ les égalités

$$\kappa_0(\theta + 1) = \kappa_0(\theta) \quad \text{et} \quad \kappa_0(2\theta) = \kappa_0(\theta).$$

Ceci est très naturel car approcher $\theta$, $\theta + 1$ ou $2\theta$ constitue bien le même problème. Or cet aspect n'est pas clairement respecté avec la définition de M. Waldschmidt lorsque l'on s'intéresse, par exemple, au plus petit $\kappa$ tel que le complémentaire de $\mathcal{E}_\kappa(\theta)$ est vide, notamment à cause de la condition liant $t$ et $d$.

Un argument classique de théorie ergodique nous permet alors de démontrer le résultat d'approximation suivant, qui constitue une nouvelle illustration de la loi du $0 - 1$.

**Théorème 4.** *Il existe deux réels $\tilde{\kappa}$ et $\tilde{\kappa}'$ tels que presque tout nombre réel $\theta$ vérifie $\kappa_0(\theta) = \tilde{\kappa}$ et $\kappa_0'(\theta) = \tilde{\kappa}'$. En outre, on a*

$$1/850 \leq \tilde{\kappa} \leq \tilde{\kappa}' \leq 1.$$

En d'autres termes, le Théorème 4 affirme que la qualité de l'approximation par des nombres algébriques est la même pour presque tout nombre réel. Il est par ailleurs naturel de conjecturer que les constantes $\tilde{\kappa}$ et $\tilde{\kappa}'$ sont égales à 1.

## 4. Sur l'amélioration effective de l'inégalité de Liouville

Soit $\mathbf{K}$ un corps de nombres réel et soit $\theta$ un nombre algébrique réel n'appartenant pas à $\mathbf{K}$. On dit que $\mu$ est une mesure d'irrationalité effective (*resp.* ineffective) de $\theta$ relativement au corps $\mathbf{K}$ s'il existe une constante effective (*resp.* ineffective) $C(\theta) > 0$ telle que, pour tout $\alpha \in \mathbf{K}$, on ait

$$|\theta - \alpha| > C(\theta)\, \mathrm{H}_{\mathbf{K}}(\alpha)^{-\mu},$$

où $\mathrm{H}_{\mathbf{K}}(\alpha)$ est la hauteur naïve du polynôme $P^{n/\deg(\alpha)}$, où $n = [\mathbf{K} : \mathbf{Q}]$ et $P \in \mathbf{Z}[X]$ est le polynôme minimal de $\alpha$. On note $\mu_{\text{eff}}(\theta, \mathbf{K})$, (*resp.* $\mu_{\text{ineff}}(\theta, \mathbf{K})$) la borne inférieure des mesures d'irrationalité effectives (*resp.* ineffectives) de $\theta$ relativement à $\mathbf{K}$.

Le théorème de K. F. Roth [12] affirme que $\mu_{\mathrm{ineff}}(\theta, \mathbf{K}) = 2$, alors que, du point de vue effectif, la première amélioration générale de l'estimation facile $\mu_{\mathrm{eff}}(\theta, \mathbf{K}) \leq [\mathbf{K}(\theta) : \mathbf{K}]$ est due à N. I. Feld'man [7] et repose sur la théorie des formes linéaires de logarithmes développée par A. Baker [1]. Par cette méthode, on obtient (*cf.* [5])

$$\mu_{\mathrm{eff}}(\theta, \mathbf{K}) \leq [\mathbf{K}(\theta) : \mathbf{K}] - \eta(\theta, \mathbf{K}),$$

où $\eta(\theta, \mathbf{K}) > 0$ est une constante numérique très petite. De meilleurs résultats effectifs sont connus, mais ils ont l'inconvénient de n'être valables que pour des classes restreintes de nombres algébriques réels $\theta$.

Dans le travail [4], E. Bombieri & J. Mueller abordent ce problème différemment et montrent que, pour tout $\eta > 0$, pour tout réel algébrique $\theta$ de degré $r \geq 3$, il existe une infinité de corps de nombres réels $\mathbf{K}$ de degré égal à $r-1$, pour lesquels $\mu_{\mathrm{eff}}(\theta, \mathbf{K}) \leq 2 + \eta$. Leur démonstration repose sur une formulation explicite du principe de Thue, due à E. Bombieri [2] et à E. Bombieri & J. Mueller [3], combinée à un résultat d'approximation du même type que notre résultat principal, mais cependant moins précis. Reprenant leurs arguments, l'application du Théorème 1 conduit à l'énoncé suivant, qui généralise le Theorem 1 de [4].

**Théorème 5.** *Soit $\theta$ un nombre algébrique réel de degré $D \geq 3$. Soient $\eta > 0$ et $d$ un entier vérifiant $2 \leq d < D$. Il existe une infinité de corps de nombres réels $\mathbf{K}$, de degré exactement égal à $d$, tels que*

$$\mu_{\mathrm{eff}}(\theta, \mathbf{K}) \leq 2\,\frac{D}{d+1} + \eta.$$

*En particulier, il existe une infinité de corps de nombres réels $\mathbf{K}$ de degré égal à $D-1$ tels que*

$$\mu_{\mathrm{eff}}(\theta, \mathbf{K}) \leq 2 + \eta,$$

*et il existe une infinité de corps de nombres quadratiques réels $\mathbf{K}$ tels que*

$$\mu_{\mathrm{eff}}(\theta, \mathbf{K}) \leq \frac{2}{3}\,D + \eta.$$

**Remarque :** Le Théorème 1 nous permet d'obtenir des renseignements complémentaires sur les discriminants des corps de nombres relativement auxquels $\theta$ possède une bonne mesure d'irrationalité effective.

## 5. Résultats auxiliaires

Les Lemmes 1 et 2 reprennent des résultats classiques sur la hauteur des polynômes et la distance entre deux nombres algébriques.

**Lemme 1.** *Soient $P_1, \ldots, P_k$ des polynômes à coefficients entiers en une indéterminée et soit $P$ leur produit. Notons $d$ le degré de $P$. On a alors l'encadrement*

$$2^{-d} \prod_{i=1}^{k} \mathrm{H}(P_i) \leq \mathrm{H}(P) \leq 2^{d} \prod_{i=1}^{k} \mathrm{H}(P_i).$$

**Démonstration :** Une démonstration de ce résultat, originellement dû à Gelfond, se trouve par exemple dans [9]. □

**Lemme 2.** *Soient $\alpha$ et $\beta$ deux nombres algébriques distincts de degrés* $\deg(\alpha)$ *et* $\deg(\beta)$, *et de mesures $\mu(\alpha)$ et $\mu(\beta)$, respectivement. On a alors*

$$\log|\alpha - \beta| \geq -(\log 2)\, \deg(\alpha)\, \deg(\beta) - \deg(\alpha)\, \mu(\beta) - \deg(\beta)\, \mu(\alpha).$$

**Démonstration :** Il s'agit d'un cas particulier de l'inégalité de Liouville, qui se déduit, par exemple, de [15], Lemma 1.5. □

Le Lemme 3 s'inspire du travail de D. Roy & M. Laurent [9].

**Lemme 3.** *Soit $\theta$ un nombre complexe. Pour tout entier $d \geq 8$ et pour tout réel $t \geq d$ suffisamment grand en fonction de $\theta$, il existe un polynôme non nul $P \in \mathbf{Z}[X]$ irréductible tel que*

$$\deg(P) \leq d, \;\; \mu(P) \leq t \quad \text{et} \quad \log|P(\theta)| \leq -\frac{3}{14}\,(d\,\mu(P) + \deg(P)\,t).$$

**Démonstration :** Le Lemme 1 de [9] avec $\beta = 3/7$ assure l'existence d'un polynôme $Q$ non nul vérifiant

$$\deg(Q) \leq d, \;\; \mu(Q) \leq t \quad \text{et} \quad \log|Q(\theta)| \leq -\frac{3}{7}\,dt.$$

Ecrivons $Q = Q_1 \ldots Q_m$ comme produit de polynômes irréductibles. Il existe un indice $i$ pour lequel

$$\log|Q_i(\theta)| \leq -\frac{3}{14}\,(d\,\mu(Q_i) + \deg(Q_i)\,t),$$

car sinon, compte tenu de l'additivité de la mesure et du degré, on obtiendrait

$$\begin{aligned} \log|Q(\theta)| &> \sum_{i=1}^{m} \log|Q_i(\theta)| \\ &> -\frac{3}{14}\,(d\,\mu(Q) + \deg(Q)\,t) \geq -\frac{3}{7}\,d\,t. \end{aligned}$$

Le polynôme $Q_i$ possède les propriétés demandées. □

**Lemme 4.** *Soient $\theta$ un nombre complexe, $d$ un entier positif et $P$ un polynôme non nul à coefficients entiers de degré au plus $d$. On suppose $P$ sans racine multiple et $|P(\theta)| \leq 1$. Alors, si $\alpha$ est une racine de $P$ située à distance minimale de $\theta$, on a pour tout entier $s > 0$ la majoration*

$$|\theta - \alpha|^{s(s+1)/2} \leq d^{d/2}\, \mathbf{M}(P)^d\, 2^{ds}\, |P(\theta)|^s.$$

**Démonstration :** Il s'agit du Lemme 3 de G. Diaz [6]. □

**Lemme 5.** *Pour presque tout nombre réel (resp. complexe) $\theta$, il n'existe qu'un nombre fini de polynômes irréductibles $P \in \mathbf{Z}[X]$ tels que*

$$\log|P(\theta)| < -5\deg(P)\,\mu(P) - 7\,\deg^2(P). \tag{8}$$

**Démonstration :** Soit $\theta$ un nombre complexe transcendant. Soit $P$ un polynôme irréductible de degré $d \geq 1$ tel que $|P(\theta)| \leq 1$. Le Lemme 4 appliqué avec $s = 1$ assure l'existence d'une racine $\alpha$ de $P$ telle que

$$|\theta - \alpha| \leq d^{d/2}\, \mathbf{M}(P)^d\, 2^d\, |P(\theta)|. \tag{9}$$

Si $\theta$ ne vérifie pas la conclusion du lemme, alors il existe une infinité de polynômes irréductibles pour lesquels (8) est satisfaite, et donc, d'après (9), une infinité de nombres algébriques $\alpha$ tels que

$$\log|\theta - \alpha| \leq \frac{\deg(\alpha)}{2}\log\deg(\alpha) + (\log 2)\,\deg(\alpha) - 4\,\deg(\alpha)\,\mu(\alpha) - 7\,\deg^2(\alpha).$$

Compte tenu de l'estimation $\mu(\alpha) \geq \log \mathrm{H}(\alpha) - (\log 2)\,\deg(\alpha)$ déduite de (4), il existe une infinité de nombres algébriques $\alpha$ vérifiant

$$\begin{aligned}\log|\theta - \alpha| &\leq -4\deg(\alpha)\log\mathrm{H}(\alpha) + \deg(\alpha)\left(-(7 - 4\log 2)\deg(\alpha) + \frac{\log\deg(\alpha)}{2} + \log 2\right)\\ &\leq -4\,\deg(\alpha)\,\log(2\mathrm{H}(\alpha)).\end{aligned}$$

On observe que la somme de leur degré et de leur hauteur tend vers l'infini. Comme le nombre de nombres algébriques de degré au plus $d$ et de hauteur au plus $H$ est majoré par $d\,(2H+1)^d$, il suffit, pour montrer que $\theta$ appartient à un sous-ensemble de $\mathbf{R}$ (*resp.* de $\mathbf{C}$) de mesure nulle, de noter que la série double $\sum_{d\geq 1}\sum_{H\geq 1} d\,(2H+1)^{d+1}\,(2H)^{-4d}$ (*resp.* la série double $\sum_{d\geq 1}\sum_{H\geq 1} d\,(2H+1)^{d+1}\,(2H)^{-8d}$) converge. Cette dernière affirmation est claire puisque, pour $d \geq 1$ et $H \geq 1$, on a $d(2H+1)^{d+1}(2H)^{-4d} \leq 2^{-d+1}H^{-3d+1}$ et que $\sum_{d\geq 1}\sum_{H\geq 1} 2^{-d+1}H^{-3d+1} \leq \sum_{d\geq 1} \pi^2\, 2^{-d}/3 \leq \pi^2/3$. □

**Lemme 6.** *Soit* $P(X)=a_0\prod_{i=1}^{d}(X-\alpha_i)$ *un polynôme à coefficients complexes, de coefficient dominant* $a_0>0$*. Soient* $\xi$ *un nombre complexe quelconque et* $\rho>0$*. Alors il existe un réel explicite* $c_1$*, ne dépendant que de* $d$*,* $\xi$ *et* $\rho$*, tel que*

$$\prod_{j \ \text{tel que}\ |\xi-\alpha_j|<\rho} |\xi-\alpha_j| \le c_1\,\frac{|P(\xi)|}{\mathrm{H}(P)}.$$

**Démonstration :** Il s'agit d'une partie du Hilfssatz 2 de E. Wirsing [22]. □

Le Théorème 5 repose sur la version suivante du principe de Thue, énoncée dans [4].

**Théorème BM.** *Soit* $\mathbf{K}$ *un corps de nombres réel et soit* $\theta$ *un nombre algébrique réel de degré* $D\ge 2$ *sur* $\mathbf{K}$ *et vérifiant* $|\theta|<1$*. Pour tout* $\alpha\in\mathbf{K}$ *avec* $|\theta-\alpha|<1$ *et pour tout réel* $a$ *vérifiant* $0<a<1$*, on a la majoration*

$$\mu_{\mathrm{eff}}(\theta,\mathbf{K}) \le \frac{2\,(D+a^2)\,[\mathbf{K}:\mathbf{Q}]}{(1-a)^2}\cdot\frac{\log \mathrm{h}(\alpha)+(D/a^2)(\log \mathrm{h}(\theta)+1)}{\log(1/|\theta-\alpha|)}.$$

**Démonstration :** Il s'agit d'un corollaire du principe de Thue obtenu par E. Bombieri & J. Mueller [3], dont la démonstration est présentée dans [4]. □

## 6. Démonstrations des théorèmes

**Démonstration du Théorème 1 :**

Elle reprend des arguments de E. Wirsing [22]. On peut sans restriction aucune supposer $\varepsilon<d-w_{d-1}(\theta)$ et $0<\theta\le 1/4$. Soit $H>0$ un réel. Notons $V$ la valeur absolue du déterminant de la matrice de Van der Monde formée sur $(\theta,1,\dots,d)$. Le théorème de Minkowski assure l'existence d'un polynôme $P$ non nul, de degré au plus $d$, à coefficients entiers, tel que

$$\begin{aligned} |P(\theta)| &\le 2^{-2d}\,H^{-d+\varepsilon}\\ \max\{|P(1)|,\dots,|P(d-1)|\} &\le (2^{2d+1}\,V)^{1/(d-1)}\,H^{1-\varepsilon/(d-1)}\\ |P(d)| &\le H. \end{aligned}\tag{10}$$

Nous allons montrer que, pourvu que $H$ soit assez grand, le polynôme $P$ ainsi obtenu est irréductible de degré égal à $d$, et ses $d$ racines sont proches des $d$ réels $1,\dots,d-1$ et $\theta$.

En résolvant le système de Cramer, on constate tout d'abord que

$$\mathrm{H}(P)\le H,\tag{11}$$

si $H$ est assez grand (en fonction de $\theta$ et de $\varepsilon$).

Supposons le degré de $P$ inférieur ou égal à $d-1$ et soit $\eta > 0$ vérifiant $\varepsilon < \eta < d - w_{d-1}(\theta)$. Par définition de $w_{d-1}(\theta)$, on a, pourvu que $H$ soit assez grand, $|P(\theta)| \geq \mathrm{H}(P)^{-d+\eta}$, et ceci, joint à (11), contredit la première inégalité de (10). Par conséquent, $P$ est de degré $d$.

Comme $w_d(\theta) = d$, si $\nu > 0$ est fixé, on a $|P(\theta)| \geq \mathrm{H}(P)^{-d-\nu}$, pourvu que $H$ soit suffisamment grand. Combiné à (10) et à (11), on en déduit que

$$\mathrm{H}(P) \geq H^{1-(\varepsilon+\nu)/(d+\nu)}. \tag{12}$$

Il reste à montrer que $P$ est irréductible et possède une racine très proche de $\theta$. Pour cela, on utilise le même raisonnement que E. Wirsing [22]. Notons $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ les zéros de $P$. L'idée consiste à prouver que les disques de rayon $1/4$ centrés en $\theta$, $1, \ldots, d-1$ contiennent chacun un et un unique zéro de $P$. D'après le Lemme 6, (10) et (12) avec $\nu \leq \varepsilon/d$, pour $\zeta \in \{\theta, 1, \ldots, d-1\}$, il existe des réels explicites $c_2$, $c_3$ et $c_4$, ne dépendant que de $\theta$, $d$ et $\varepsilon$, tels que

$$\prod_{j \text{ tel que } |\zeta - \alpha_j| \leq 1/4} |\zeta - \alpha_j| \leq c_2 \frac{|P(\zeta)|}{\mathrm{H}(P)} \leq c_3 \, H^{-\varepsilon/(d-1)+\varepsilon(d+1)/(d^2+\varepsilon)} \leq c_4 \, H^{-\varepsilon/d^3},$$

quantité qui tend vers zéro quand $H$ tend vers l'infini. On déduit alors que, pour $H$ assez grand, le disque de centre $\zeta$ et de rayon $1/4$ contient au moins, et donc exactement, un zéro de $P$. Par suite, toutes les racines de $P$ sont réelles et, si $\alpha_1$ désigne le zéro de $P$ le plus proche de $\theta$, on obtient, comme $0 < \theta < 1/4$,

$$\begin{aligned} |P(\theta)| &= |a_d| \cdot |\theta - \alpha_1| \prod_{j=2}^{d} |\theta - \alpha_j| \\ &\geq 2^{-d+1} |a_d| \cdot |\theta - \alpha_1| \prod_{j=2}^{d} |\alpha_j| \\ &\geq 2^{-d} |\theta - \alpha_1| \, \mathbf{M}(P), \end{aligned}$$

donc, par (4) et (10),

$$|\theta - \alpha_1| \leq 2^{2d} \frac{|P(\theta)|}{\mathrm{H}(P)} \leq \mathrm{H}(P)^{-d-1+\varepsilon}.$$

Pour $H$ suffisamment grand, $\alpha_1$ est de degré $d$, car sinon on aurait $w_{d-1}^*(\theta) \geq d$, en contradiction avec (5) et l'hypothèse $w_{d-1}(\theta) < d$. En choisissant $\nu \leq \min\{\varepsilon/d, \varepsilon(d-\lambda)/(\lambda-\varepsilon)\}$ dans (12), on obtient $\mathrm{H}(P) \geq H^{1-\varepsilon/\lambda}$, comme requis. □

**Démonstration du Théorème 2 :**

Soit $\theta$ un nombre complexe transcendant vérifiant la conclusion du Lemme 5. Soient $d \geq 8$ et $t \geq 40\,d$ deux nombres réels. Si $t$ est suffisamment grand, le lemme 3 permet d'associer au couple $(d,t)$ un polynôme non nul $P$ irréductible vérifiant

$$\deg(P) \leq d, \;\; \mu(P) \leq t \quad \text{et} \quad \log|P(\theta)| \leq -\frac{3}{14}\left(d\,\mu(P) + \deg(P)\,t\right). \tag{13}$$

En outre, comme $\log|Q(\theta)|$ reste minoré lorsque $Q$ décrit un ensemble fini de polynômes, le Lemme 5 assure l'existence d'un réel $t_1$ tel que

$$\log|P(\theta)| \geq -5\,\deg(P)\,\mu(P) - 7\,\deg^2(P) \tag{14}$$

pour tout $t \geq t_1$. Soit $t$ un réel supérieur à $t_1$. Le degré de $P$ est au moins égal à $d/24$, car sinon, compte-tenu de l'hypothèse technique

$$t \geq 40\,d, \tag{15}$$

on déduirait de (13) l'estimation

$$\begin{aligned}\log|P(\theta)| &\leq -\frac{3}{14}\left(24\,\deg(P)\,\mu(P) + 40\,\deg^2(P)\right)\\ &\leq -5.1\,\deg(P)\,\mu(P) - 8\,\deg^2(P),\end{aligned}$$

qui contredit (14).

D'autre part, si $\mu(P) \leq t/140$, on a

$$\begin{aligned}\log|P(\theta)| &\leq -\frac{3}{14}\,d\,\mu(P) - \frac{1}{28}\,t\,\deg(P) - \frac{5}{28}\,t\,\deg(P)\\ &\leq -5.2\,\mu(P)\,\deg(P) - 7.1\,\deg^2(P),\end{aligned}$$

en utilisant (15). Ceci contredit (14), par conséquent, on a construit un polynôme $P$ irréductible vérifiant

$$d/24 \leq \deg(P) \leq d \quad \text{et} \quad t/140 \leq \mu(P) \leq t.$$

Le Lemme 4 entraîne alors, pour tout entier $s \geq 1$, l'existence d'une racine $\alpha$ de $P$ telle que

$$\begin{aligned}|\theta - \alpha| &\leq \frac{d\log d}{s(s+1)} + \frac{2d\log 2}{s+1} + \frac{84-123s}{5880s(s+1)}\,dt\\ &\leq \frac{1176-390s}{23520s(s+1)}\,dt.\end{aligned}$$

Il suffit alors de choisir $s = 7$ pour obtenir le résultat annoncé.

Par ailleurs, on a la majoration triviale

$$\log|P(\theta)| \leq (\log 2)\deg(P) + \deg(P)\,\mu(P) + \log|\theta - \alpha|,$$

de laquelle on déduit, par (14),

$$\log|\theta - \alpha| \geq -4\,\deg(P)\,\mu(P) - (7 + \log 2)\,\deg^2(P).$$

On conclut en notant que $\deg(P) \leq d \leq t/40$. □

**Démonstration du Théorème 3 :**

L'hypothèse sur $\xi$ entraîne, via (4), qu'il existe deux suites $(\mu_k)_k$ et $(\lambda_k)_k$ de réels positifs, strictement croissantes vers l'infini, et, pour tout $k \geq 1$, un nombre algébrique $\alpha_k$ de degré majoré par $n$, de mesure égale à $\mu_k$ et vérifiant

$$\log|\xi - \alpha_k| \leq -\lambda_k \, \mu_k.$$

Soient $a \geq 1$, $b \geq 1$ et $0 < c \leq 1$ des réels, $D \geq 2nb/c$ un entier et $k \geq 1$ un entier suffisamment grand pour que l'on ait $\mu_k \geq 4$ et $\lambda_k \geq 4anD$. Supposons qu'il existe un nombre algébrique $\beta$ vérifiant

$$D \leq \deg(\beta) \leq aD, \qquad \frac{\lambda_k \, \mu_k}{cD} \leq \mu(\beta) \leq b \, \frac{\lambda_k \, \mu_k}{cD}$$
$$\text{et} \qquad \log|\xi - \beta| \leq -\lambda_k \, \mu_k.$$

Le Lemme 2 conduit alors à la minoration

$$\log|\beta - \alpha_k| \geq -(\log 2) naD - nb\lambda_k \, \mu_k/(cD) - aD\mu_k,$$

qui, du fait de nos hypothèses, contredit l'estimation

$$|\beta - \alpha_k| \leq |\beta - \xi| + |\xi - \alpha_k| \leq 2 \, e^{-\lambda_k \, \mu_k}.$$

Le Théorème 3 est ainsi démontré. □

**Démonstration du Théorème 4 :**

Soient $\theta$ un nombre réel et $\kappa$ un réel positif. Du fait des égalités $\kappa_0(\theta) = \kappa_0(\theta + 1)$, on peut considérer l'ensemble $\tilde{\mathcal{F}}_\kappa := {}^R\mathcal{F}_\kappa \cap [0, 1[$. Notons $T$ la multiplication par 2 définie sur le tore $[0, 1[$, muni de la mesure de Lebesgue. L'exemple (3) page 25 du livre de Walters [21] nous assure que $T$ est ergodique. Par définition de l'ergodicité, ceci signifie que tout sous-ensemble de $[0, 1[$, mesurable et stable par $T$, est de mesure nulle ou de mesure totale. Comme $\kappa_0(T\theta) = \kappa_0(\theta)$, on a $T\tilde{\mathcal{F}}_\kappa = \tilde{\mathcal{F}}_\kappa$ et la mesure de Lebesgue de $\tilde{\mathcal{F}}_\kappa$ vaut 0 ou 1. Afin de démontrer l'existence de la constante $\tilde{\kappa}$ et de la minorer, il suffit de noter que $\mathcal{F}_{\kappa_1} \subset \mathcal{F}_{\kappa_2}$ si $\kappa_1 \geq \kappa_2$ et que le Théorème 4 assure que pour presque tout $\theta$ on a $\kappa_0(\theta) \geq 1/850$. En outre, comme pour tout $0 < \varepsilon < \kappa$ les ensembles ${}^R\mathcal{F}_\kappa$ et ${}^R\mathcal{F}'_{\kappa-\varepsilon}$ sont disjoints, on a $\kappa'_0(\theta) \geq \kappa_0(\theta)$. De plus, si $\theta$ vérifie $w^*_d(\theta) = d$ pour tout entier $d \geq 1$, il est facile de voir que $\kappa_0(\theta) \leq 1$ et $\kappa'_0(\theta) \leq 1$. Ainsi, d'après le résultat de Sprindžuk cité avant le Corollaire 1, on a $\kappa_0(\theta) \leq 1$ et $\kappa'_0(\theta) \leq 1$ pour presque tout $\theta$. Le même argument de théorie ergodique appliqué à ${}^R\mathcal{F}'_\kappa$ assure l'existence de $\tilde{\kappa}'$. □

**Démonstration du Théorème 5 :**

On peut, sans restriction, supposer que $\theta$ vérifie $|\theta| < 1/2$. Soit $H$ un entier suffisamment grand. Compte-tenu du Théorème 1 et des inégalités (4), il existe une infinité de réels algébriques $\alpha$ de degré $d$ et vérifiant

$$\frac{\log H}{d} - \log 2 \leq \log \mathrm{h}(\alpha) \leq \frac{\log H}{d} + \frac{\log(d+1)}{2d}$$

et

$$\log \frac{1}{|\theta - \alpha|} \geq (d + 1 - \eta/D) \log H.$$

Notons $\mathbf{K}$ le corps $\mathbf{Q}(\alpha)$. Comme $2 \leq [\mathbf{K}(\theta) : \mathbf{K}] \leq D$, le Théorème BM assure que, pour tout réel $a$ strictement compris entre 0 et 1, on a

$$\mu_{\text{eff}}(\theta, \mathbf{K}) \leq \frac{2\,(D + a^2)\, d}{(1 - a)^2} \left( \frac{1}{d\,(d + 1 - \eta/D)} + \frac{c_5}{a^2 \, \log H} \right),$$

où $c_5$ (de même que $c_6$ ci-dessous) désigne une constante explicite, ne dépendant que de $\theta$. A l'instar de E. Bombieri & J. Mueller [4], on choisit $a$ de l'ordre de $(\log H)^{-1/3}$, et on obtient

$$\mu_{\text{eff}}(\theta, \mathbf{K}) \leq 2\, \frac{D}{d+1} + \frac{\eta}{2} + c_6 \,(\log H)^{-1/3}.$$

Ainsi, il existe une infinité de nombres réels algébriques $\alpha$ de degré $d$ tels que

$$\mu_{\text{eff}}(\theta, \mathbf{Q}(\alpha)) \leq 2\, \frac{D}{d+1} + \eta,$$

et le Théorème 5 est démontré. □

## Références bibliographiques


[1] *A. Baker*, Linear forms in the logarithms of algebraic numbers I, II, III, IV, Mathematika **13** (1966), 204–216; **14** (1967), 102–107, 220–228; **15** (1968), 204–216.

[2] *E. Bombieri*, On the Thue-Siegel-Dyson Theorem, Acta Math. **148** (1982) 255–296.

[3] *E. Bombieri et J. Mueller*, On effective measures of irrationality for $\sqrt[r]{a/b}$ and related numbers, J. Reine Angew. Math. **342** (1983), 173–196.

[4] *E. Bombieri et J. Mueller*, Remarks on the approximation to an algebraic number by algebraic numbers, Mich. Math. J. **33** (1986), 83–93.

[5] *Y. Bugeaud et K. Győry*, Bounds for the solutions of Thue-Mahler equations and norm form equations, Acta Arith. **74** (1996), 273–292.

[6] *G. Diaz*, Une nouvelle propriété d'approximation diophantienne, C. R. Acad. Sci. Paris **324** (1997), 969–972.

[7] *N. I. Feldman*, An effective refinement of the exponent in Liouville's theorem (en russe), Izv. Akad. Nauk **35** (1971), 973–990. Egalement : Math. USSR Izv. **5** (1971), 985–1002.

[8] *M. Laurent et D. Roy*, Criteria of algebraic independence with multiplicities and interpolation determinants, Trans. Amer. Math. Soc. 351 (1999), 1845–1870.

[9] *M. Laurent et D. Roy*, Sur l'approximation algébrique en degré de transcendance un, Annales Instit. Fourier, **49** (1999), 27–55.

[10] *M. Laurent et D. Roy*, Criteria of algebraic independence with multiplicities and approximation by hypersurfaces ; preprint, rapport CICMA **06** (1998).

[11] *P. Philippon*, Une approche méthodique pour la transcendance et l'indépendance algébrique de valeurs de fonctions analytiques, J. Number Theory **64** (1997), 291–338.

[12] *K. F. Roth*, Rational approximations to algebraic numbers, Mathematika **2** (1955), 1–20.

[13] *D. Roy et M. Waldschmidt*, Quadratic relations between logarithms of algebraic numbers, Proc. Japan Acad. Ser. A **71** (1995), 151–153.

[14] *D. Roy et M. Waldschmidt*, Approximation diophantienne et indépendance algébrique de logarithmes, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **30** (1997), 753–796.

[15] *D. Roy et M. Waldschmidt*, Simultaneous approximation and algebraic independence, Ramanujan Math. J. **1** (1997), 379–430.

[16] *W. M. Schmidt*, Approximation to algebraic numbers, Monographie de l'Enseignement Mathématique **19**, Genève, 1971.

[17] *W. M. Schmidt*, Diophantine Approximation, Lecture Notes in Math. **785**, Springer, Berlin, 1980.

[18] *T. Schneider*, Introduction aux nombres transcendants, Paris, Gauthier-Villars, 1959.

[19] *V. G. Sprindžuk*, Mahler's problem in metric number theory, Amer. Math. Soc., Transl. math. monogr. **25**, Providence, R. I., 1969.

[20] *M. Waldschmidt*, Conjectures for Large Transcendence degree ; Number Theory Conference Graz, W. de Gruyter, Berlin, à paraître.

[21] *P. Walters*, Ergodic Theory – Introductory Lectures, Lecture Notes in Math. **458**, Springer, Berlin, 1975.

[22] *E. Wirsing*, Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades, J. reine angew. Math. **206** (1961), 67–77.

Yann Bugeaud
Université Louis Pasteur
U. F. R. de mathématiques
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG

e-mail : bugeaud@math.u-strasbg.fr