Université de Strasbourg
Double Licence Math-Eco - 2022/2023
Algèbre linéaire S2 - Printemps 2023
Victoria Callet - *victoria.callet@math.unistra.fr*

Chapitre 1 : Espaces vectoriels

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ est un corps commutatif qui désigne généralement $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$.

1 Espaces vectoriels

1.1 Définitions et premiers exemples

Définition 1

Un **espace vectoriel** sur un corps $\mathbb{K}$ (un $\mathbb{K}$-ev) est un quadruplet $(E, +, \cdot, 0)$ où
- E un ensemble
- $0 \in E$ (élément neutre)
- $+ : E \times E \longrightarrow E$, $(x, y) \longmapsto x + y$ (loi interne additive)
- $\cdot : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$, $(\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x$ (loi externe, multiplication par un scalaire)

et qui vérifie les huit axiomes suivants, pour $x, y, z \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

i. La loi $+$ est commutative : $x + y = y + x$

ii. La loi $+$ est associative : $x + (y + z) = (x + y) + z$

iii. L'élément neutre 0 vérifie $0 + x = x + 0 = x$

iv. Pour tout $x \in E$, il existe $-x \in E$ tel que $x + (-x) = 0$ (**opposé** ou **symétrique**)

v. $1 \cdot x = x$

vi. $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot u$

vii. $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$

viii. $(\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$

Vocabulaire. Les éléments de E sont appelés des **vecteurs** et les éléments de $\mathbb{K}$ des **scalaires**. Habituellement, on note la loi $\cdot$ par une simple juxtaposition : $\lambda \cdot x = \lambda x$. De même, on omet souvent de préciser les lois d'un espace vectoriel en écrivant simplement "le $\mathbb{K}$-ev E".

Remarque. Pour différencier l'élément neutre 0 de $\mathbb{K}$ de celui de E, on note parfois $0_{\mathbb{K}}$ et 0_E.

Exemple 1. $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-ev et un $\mathbb{Q}$-ev, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-ev et un $\mathbb{R}$-ev.

Exemple 2. (*Fondamental : l'espace vectoriel* $\mathbb{K}^n$)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $\mathbb{K}^n$ est muni d'une structure de $\mathbb{K}$-ev. On écrit $x \in \mathbb{K}^n$ sous la forme d'une matrice-colonne avec ses coordonnées :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Les deux lois sont alors données par

$$x+y=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\lambda\cdot x=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x_1\\\lambda x_2\\\vdots\\\lambda x_n\end{pmatrix}.$$

Dans la suite, on se permettra souvent d'écrire $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ en ligne et non en colonne.

Exemple 3. (*Espace des matrices*)
L'espace des matrices de taille $n\times m$ est un $\mathbb{K}$-ev avec l'addition des matrices et la multiplication par un scalaire $\lambda(a_{i,j})=(\lambda a_{i,j})$. Par exemple, l'espace des matrices carrées de taille 2 à coefficients dans K défini par

$$\mathcal{M}_2(K)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\ \mid a,b,c,d\in\mathbb{K}\right\}$$

peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ en posant

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}a+a'&b+b'\\c+c'&d+d'\end{pmatrix}\\\lambda\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\lambda a&\lambda b\\\lambda c&\lambda d\end{pmatrix}\end{aligned}$$

pour la loi additive et la multiplication par un scalaire $\lambda\in K$, avec comme élément neutre la matrice nulle $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et l'opposé d'un élément $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix}-a&-b\\-c&-d\end{pmatrix}$.

Exemple 4. (*Espace des polynômes*)
L'espace $\mathbb{K}[X]=\{\sum_i a_iX^i\mid a_i\in\mathbb{K}\}$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel via les deux lois suivantes : si $P=\sum_i p_iX^i, Q=\sum_i q_iX^i\in\mathbb{K}[X]$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, alors

$$P+Q=\sum_i(p_i+q_i)X^i\text{ et }\lambda P=\sum_i\lambda p_iX^i.$$

Exemple 5. (*Espace des fonctions*)
Pour A un ensemble quelconque, on note $\mathbb{K}^A=\{f:A\longrightarrow\mathbb{K}\}$ l'ensemble des fonctions de A) valeurs dans $\mathbb{K}$. C'est un espace vectoriel pour les deux lois suivantes :

- $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
- $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$

et le neutre est la fonction nulle $0:x\longmapsto 0$. Par exemple, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $\mathbb{R}^I=\{f:I\longrightarrow\mathbb{R}\}$ l'espace vectoriel des fonctions de I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple 6. (*Espace des suites*)
On note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}=\{u_n:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{K}\}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. C'est un espaces vectoriel pour les deux lois suivantes :

- $(u+v)_n=u_n+v_n$
- $(\lambda u)_n=\lambda u_n$

et le neutre est la suite nulle $0_n=0$ pour toute entier $n\in\mathbb{N}$.

Proposition 2

Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

i. $\forall x, y, z \in E$, si $x + y = x + z$, alors $y = z$

ii. $\forall x \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, on a $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$ et $\lambda \cdot 0_E = 0_{\mathbb{K}}$

iii. $\forall x \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, si $\lambda x = 0$, alors $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0$.

Démonstration.

i. x possède un opposé noté $-x$, donc il suffit d'ajouter x dans les deux membres de l'équation.

ii. $1 = 1 + 0$ donc $1 \cdot x = 1 \cdot x + 0 \cdot x$ et $0 = 0 \cdot x$. De même, $0 = 0 + 0$ donc $\lambda(0 + 0) = \lambda 0$ et $\lambda 0 + \lambda 0 = \lambda 0$ et donc $\lambda 0 = 0$.

iii. si $\lambda x = 0$ et si $\lambda \neq 0$, alors λx possède un inverse noté $\frac{1}{\lambda}$ pour le produit : $\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda x = \frac{1}{\lambda} \cdot 0$ et donc $x = 0$. Sinon, $\lambda = 0$.

$\square$

1.2 Espaces vectoriels produits

Rappel : Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont des ensembles, alors l'**espace produit** est défini par

$$\mathcal{E} \times \mathcal{F} = \{(x, y) \mid x \in \mathcal{E}, y \in \mathcal{F}\}.$$

Par exemple, $\mathbb{R}^2$ est l'espace produit défini par $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Par ailleurs, $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ est naturellement muni d'une somme (interne) et d'un produit (externe) : pour (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ et λ un scalaire, on a

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{1}$$

$$\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1) \tag{2}$$

Proposition 3

Si E et F sont des $\mathbb{K}$-ev, alors $E \times F$ est aussi un $\mathbb{K}$-ev.

Démonstration. La structure d'espace vectoriel sur $E \times F$ est induite de la loi additive et de la multiplication par un scalaire définie par (1) et (2), l'élément neutre étant $(0_E, 0_F)$ et l'opposé d'un élément $(x, y) \in E \times F$ est $(-x, -y)$. $\square$

Corollaire 4

L'espace produit $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-ev. Par récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'espace produit $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ fois}}$ est un $\mathbb{R}$-ev.

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Définitions et premiers exemples

Définition 5

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et x et y deux éléments de E.

i. x et y sont **colinéaires** s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda y$.

ii. une **combinaison linéaire** de x et y est un vecteur $z = \lambda x + \mu y$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Définition 6

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $F \subset E$. Alors F est un **sous-espace vectoriel** de E (sev) si :

i. $0_E \in F$

ii. Pour tous $x, y \in F$, $x + y \in F$ (stable par la loi additive $+$) ;

iii. Pour tous $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot x \in F$ (stable par la multiplication par un scalaire $\cdot$).

Remarque. L'hypothèse $0_E \in F$ peut être remplacée par l'hypothèse $F \neq \emptyset$. En effet, si $F \neq \emptyset$, alors il existe $x \in F$. Or $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda x \in F$ donc en particulier pour $\lambda = -1$, $-x \in F$ et $\forall y \in F$, $x + y \in F$. De même, pour $y = -x$, $x - x = 0_E \in F$.

Proposition 7

Soient F un sev d'un $\mathbb{K}$-ev E et $w = \lambda x + \mu y$ une combinaison linéaire d'éléments de F. Alors, $w \in F$. Plus généralement, si $w = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ est une combinaison linéaire de n éléments de F, alors $w \in F$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la définition précédente. □

Vocabulaire. On dit qu'une partie F de E est un sev de E ***ssi*** $0_E \in F$ ou $F \neq \emptyset$ (point i.) et F est **stable par combinaison linéaire** (points ii. et iii.).

Proposition 8 (Fondamentale)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Si F est un sev de E, alors F est aussi un $\mathbb{K}$-ev.

Démonstration. Les caractéristiques de E comme $\mathbb{K}$-ev restent vraies sur F : l'élément neutre de F est celui de E ($0_E \in F$) et la loi additive $+$ sur F est induite par celle de E. L'action de $\mathbb{K}$ sur F est la même que celle sur E.

i. L'associativité de la loi additive dans F se déduit de l'associativité dans E.

ii. On a évidement $0 + x = x + 0 = x$, $\forall x \in F$.

iii. Pour $\lambda = -1$, alors $\forall x \in F$ on a $\lambda x \in F$ donc l'opposé de tout élément de F est aussi dans F.

iv. La loi $+$ reste commutative dans F.

v. $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot u$

vi. $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$

vii. $(\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$

viii. $1 \cdot x = x$ $\square$

Méthode : d'après la propriété précédente, pour montrer qu'un ensemble F est un $\mathbb{K}$-ev, on n'utilisera quasiment jamais la définition 1 : en effet il suffira de montrer que F est une partie d'un $\mathbb{K}$-ev E et on montrera que $0_E \in F$ (ou que $F \neq \emptyset$) et que F est bien stable par combinaison linéaire.

Exemple 7. (*Droite vectorielle*)
Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $u \in E$ non nul. L'ensemble F défini par

$$F = \{x \in E,\ \exists a \in \mathbb{K},\ x = au\}$$

est un sev de E (on dit que F est le sev de E *engendré* par le vecteur u). En effet :

i. F est non vide car par définition $u \in F$ (prendre $a = 1$)

ii. soient x et y dans F. Par définition, il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tels que $x = au$ et $y = bu$. Alors,

$$x + y = au + bu = (a + b)u \in F$$

donc F est stable par addition

iii. soient $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par définition, il existe $a \in K$ tel que $x = au$, donc

$$\lambda x = \lambda(au) = (\lambda a)u \in F$$

donc F est stable par multiplication par un scalaire.

Exemple 8. (*Plan vectoriel*)
Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $u, v \in E$ non nul. L'ensemble F défini par

$$F = \{x \in E,\ \exists a \in \mathbb{K},\ x = au + bv\}$$

est un sev de E (on dit que F est le sev de E *engendré* par les vecteurs u et v). En effet :

i. F est non vide par définition (il contient u et v).

ii. soient $x, y \in F$, alors par définition ils s'écrivent $x = au + bv$ et $y = cu + dv$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{K}$, et donc

$$x + y = (au + bv) + (cu + dv) = (a + c)u + (b + d)v \in F.$$

iii. soient $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on peut écrire $x = au + bv$ et donc

$$\lambda x = \lambda(au + bv) = (\lambda a)u + (\lambda b)v \in F$$

donc F est bien stable par combinaison linéaire.

Exemple 9. (*Hyperplan*)
L'ensemble $F = \{(u_1, \ldots, u_n) \mid \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0 \text{ où } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\mathbb{R}^n$.

i. $(0, \ldots, 0) \in F$ par définition de F.

ii. Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux éléments de F. Par définition de F, on a

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n &= 0 \\ \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n &= 0 \end{aligned}$$

et donc

$$\lambda_1(x_1 + y_1) + \ldots + \lambda_n(x_n + y_n) = 0, \text{ soit } x + y \in F.$$

iii. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in F$. A nouveau, par définition de F,

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$$

et donc

$$\lambda_1(\lambda x_1) + \ldots + \lambda_n(\lambda x_n) = 0, \text{ soit } \lambda x \in F.$$

Exemple 10. (*Noyau d'une matrice*)
Prenons $E = K^n$ et soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. L'ensemble F défini par

$$F = \{X \in E,\ AX = 0\}$$

est un sev de E appelé **noyau de** A. En effet :

i. $0_E = (0, \ldots, 0) \in F$ ($A0_E = 0$)

ii. Soient $X, Y \in F$. Vérifions que $X + Y \in F$:

$$A(X + Y) = AX + AY = 0 + 0 = 0.$$

iii. Soient $X \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Vérifions que $\lambda X \in F$:

$$A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda 0 = 0$$

donc F est bien stable par combinaison linéaire.

Exemple 11. (*Espaces de fonctions*)
Soit $E = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{[0,1]}$ l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Le sous-ensemble F de E défini par

$$F = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continue et } f(1) = 0\}$$

est un sev de E. En effet :

i. La fonction nulle (l'élément neutre ici) $f_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_0(x) = 0$ quelque soit x est continue et, par définition, $f_0(1) = 0$ donc $f_0 \in F$.

ii. Soient f et g dans F. Par définition, f et g sont continues sur $[0,1]$ et $f(1) = g(1) = 0$. Alors, $f + g$ est continue comme somme de fonctions continues et

$$(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0$$

donc $f + g \in F$.

iii. soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in F$. Alors, λf est également continue et

$$(\lambda f)(1) = \lambda f(1) = \lambda \cdot 0 = 0,$$

et donc $\lambda f \in F$.

Ainsi, $\forall f, g \in F$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda f + g \in F$ (*ie* F est stable par combinaison linéaire), et on a bien montré que F est un sev du $\mathbb{K}$-ev E.

Exemple 12. (*Contre-exemple*)
L'ensemble F défini par

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - z = 1\}$$

n'est **pas** un sev de $E = \mathbb{R}^3$. En effet, on a bien $F \subset \mathbb{R}^3$ mais $(0,0,0) = 0_{\mathbb{R}^3}$ n'appartient pas à F.

2.2 Intersections de sous-espaces vectoriels

Proposition 9

Soient F et G deux sev d'un même $\mathbb{K}$-ev E. Alors, $F \cap G$ est un sev de E.

Démonstration. F et G sont tous les deux des sev de E, donc en particulier $F, G \subset E$ et donc $F \cap G \subset E$. Ensuite, on a :

i. $0_E \in F$, $0_E \in G$ et donc $0_E \in F \cap G$.

ii. Soient $x, y \in F \cap G$. Alors, en particulier x et y sont dans F, or F est un sev de E donc par définition $x + y \in F$. De même, $x, y \in G$ et G est un sev de E donc $x + y \in G$ et ainsi $x + y \in F \cap G$.

iii. Soient $x \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors à nouveau $x \in F$ et $x \in G$ donc par définition $\lambda x \in F$ et $\lambda x \in G$ et donc $\lambda x \in F \cap G$.

$\square$

Corollaire 10

Si $F_1, \ldots, F_n$ sont des sev de E, alors $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n$ est un sev de E.

Corollaire 11

Dans $\mathbb{R}^n$, l'ensemble

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

est un sev de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 13. L'ensemble F donné par les solutions du système $\begin{cases} 2x - y + z &= 0 \\ x + y &= 0 \end{cases}$, c'est à dire défini par

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0,\ x + y = 0\}$$

est un sev de $\mathbb{R}^3$, comme intersection des deux sev $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$ et $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$.

Remarque. En général, la réunion de deux espaces vectoriels n'est pas un espace vectoriel.

$\rightarrow$ **Contre-exemple :** les deux ensembles $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $\{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ sont deux espaces vectoriels, mais leur réunion $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid xy = 0\}$ n'est pas un espace vectoriel, puisque l'élément $w = (1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$ n'est pas dans $F \cup G$. En fait, l'ensemble $F \cup G$ n'est pas stable par la somme en général.

2.3 Sous-espaces vectoriels engendrés

Proposition 12

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs de E. L'ensemble

$$\{\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}\}$$

des combinaisons linéaires de $u_1, \ldots, u_p$ est un sous-espace vectoriel de E. On le note $\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$.

Démonstration. Comme E est un $\mathbb{K}$-ev, alors par définition il est stable par combinaison linéaire. Autrement dit, tout élément de la forme $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p$ avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et $u_i \in E$ est un élément de E, et donc l'ensemble $\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$ est bien un sous-ensemble de E. De plus, on a :

i. $0_E = 0u_1 + 0u_2 + \ldots + 0u_p$ donc $0_E \in \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$.

ii. Si x et y sont deux éléments de $\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$, alors on a

$$x = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p \text{ et } y = \mu_1 u_1 + \ldots + \mu_p u_p$$

et donc $x + y = (\lambda_1 + \mu_1)u_1 + \ldots + (\lambda_p + \mu_p)u_p$ est bien un combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_p$, soit $x + y \in \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$.

iii. Si $x \in \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $x = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p$ par définition et donc

$$\lambda x = (\lambda\lambda_1)u_1 + \ldots + (\lambda\lambda_p)u_p$$

donc λx est bien une combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_p$, soit $\lambda x \in \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$.

$\square$

Définition 13

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs de E. L'ensemble

$$\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p) = \{\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}\}$$

est appelé **espace vectoriel engendré par** $u_1, \ldots, u_p$.

Exemple 14. On a vu dans la partie précédente que l'ensemble F défini par les solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y + z & = & 0 \\ x + y & = & 0 \end{array} \right.$$

est un sev de $\mathbb{R}^3$ (comme intersection de deux sev). On va voir qu'on peut l'écrire comme $\mathrm{Vect}\,(u)$ avec $u \in F$, c'est à dire qu'il s'agit du sous-espace vectoriel engendré par $u \in F$. En effet, le système nous dit que $x = -y$, donc $-3y + z = 0 \Leftrightarrow 3y = z$. On peut donc réécrire le système précédent de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y \\ y & = & y \\ z & = & 3y \end{array} \right.$$

Ainsi, un vecteur de $\mathbb{R}^3$ appartient à F s'il est de la forme $(-y, y, 3y)$, avec $y \in \mathbb{R}$, soit de la forme $y \times (-1, 1, 3)$ avec $y \in \mathbb{R}$. Notons $u = (-1, 1, 3)$. On obtient alors que l'ensemble F des solutions du système de départ est en fait donné par

$$F = \{y \times (-1, 1, 3),\ y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,(-1, 1, 3) = \mathrm{Vect}\,(u).$$

Il s'agit donc de la droite de vecteur directeur u, ou encore la **droite vectorielle engendrée par** u.

2.4 Sous-espaces vectoriels supplémentaires et somme directe

Définition 14

Soient F et G deux sev d'un même $\mathbb{K}$-ev E. La **somme** de F et G est définie par

$$F + G = \{x + y \in E \mid x \in F \text{ et } y \in G\}.$$

Proposition 15

Si F et G sont deux sev d'un même $\mathbb{K}$-ev E, alors $F + G$ est un sev de E.

Démonstration. Par définition, $F + G \subset E$. Ensuite, on a :

i. $0_E \in F$ et $0_E \in G$, donc $0_E = 0_E + 0_E \in F + G$.

ii. Soient x et y deux vecteurs de $F + G$. Comme ils sont chacun dans $F + G$, ils se décomposent sous la forme $x_1 + x_2$ et $y_1 + y_2$, où $x_1, y_1 \in F$ et $x_2, y_2 \in G$. Comme F et G sont chacun des sev, leur somme $x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$ est donc dans $F + G$.

iii. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in F + G$. L'élément x s'écrit par définition $x_1 + x_2$, avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$, et donc

$$\lambda x = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2 \in F + G.$$

$\square$

Proposition 16

Si $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$ et $G = \mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_q)$, alors $F + G = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q)$.

Démonstration. On montre le résultat par **double inclusion**.

$\subset$ Soit $w \in \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q)$. Par définition,

$$w = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p + \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_q v_q = (\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p) + (\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_q v_q)$$

donc $w \in F + G$, soit $\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q) \subset F + G$.

$\supset$ Soit $w \in F + G$. Par définition, $w = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$. Or, $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$ donc il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que $u = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p$ (u est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_p$). De même, $v = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_q v_q$ et ainsi

$$w = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p + \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_q v_q,$$

soit $w \in \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q)$ et donc $F + G \subset \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q)$, ce qui donne l'égalité.

□

Exemple 15. Soient $F = \mathrm{Vect}\,(u_1)$ avec $u_1 = (1, 0, 1)$ et $G = vect(u_2)$ avec $u_2 = (1, -1, -1)$ deux droites de $\mathbb{R}^3$. Alors, $F + G = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2)$ est le plan engendré par les deux vecteurs u_1 et u_2.

Définition 17

Soient F et G deux sev d'un même $\mathbb{K}$-ev E. On dit que F et G sont en **somme directe** dans E si tout vecteur x de E se décompose de manière **unique** sous la forme $x = y + z$, avec $y \in F$ et $z \in G$. On note alors $E = F \oplus G$. On dit aussi que F est un **supplémentaire** de G dans E, et vice-versa.

Proposition 18

Soient F et G deux sev d'un même $\mathbb{K}$-ev E.

$$E = F \oplus G \;\; \boldsymbol{ssi} \;\; E = F + G \text{ et } F \cap G = \{0\}.$$

Démonstration.

$\Rightarrow$ **(Condition nécessaire)** Supposons $E = F \oplus G$. Montrons que $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$.

i. Par hypothèse, tout vecteur $x \in E$ se décompose de manière unique sous la forme $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$ donc en particulier une telle décomposition **existe** pour tout vecteur $x \in E$, donc par définition $E = F + G$.

ii. Vérifions que $F \cap G = \{0\}$. Comme $F \cap G$ est un sev de E (cf proposition 9), il contient l'élément nul donc $\{0\} \in F \cap G$. Soit $x \in F \cap G$, il faut donc montrer que $x = 0$. Par définition, $x \in F$ et $x \in G$. De plus, $x = x + 0 = 0 + x \in F + G$ et comme par hypothèse $E = F \oplus G$, on a unicité de la décomposition donc en fait $x = 0$ et $F \cap G \subset \{0\}$, ce qui donne l'égalité $F \cap G = \{0\}$.

$\Leftarrow$ **(Condition suffisante)** Supposons $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$. Montrons que F et G sont en somme directe dans E. Soit $x \in E$: vérifions qu'il s'écrit de manière unique sous la forme $x = y + z$ avec $y \in F$ et $g \in G$. Par hypothèse, $E = F + G$ donc une telle écriture **existe**. Montrons qu'elle est unique. Supposons qu'il existe deux telles décompositions : $\left\{\begin{array}{lll} x & = & y_1 + z_1 \\ x & = & y_2 + z_2 \end{array}\right.$ avec $y_1, y_2 \in F$ et $z_1, z_2 \in G$. Alors,

$$0 = (y_1 + z_1) - (y_2 + z_2) = (y_1 - y_2) - (z_1 - z_2)$$

et donc $\overbrace{y_1 - y_2}^{\in F} = \overbrace{z_1 - z_2}^{\in G}$. Comme ils sont égaux, ils sont dans $F \cap G$. Or, par hypothèse $F \cap G = \{0\}$ donc en fait

$$y_1 - y_2 = 0 = z_1 - z_2$$

soit $y_1 = y_2$ et $z_1 = z_2$, donc finalement la décomposition est **unique** et $E = F \oplus G$.

□

Exemple 16. Dans $E = \mathbb{R}^3$, la droite vectorielle $F = \mathrm{Vect}\,(u)$ avec $u = (1, 1, 1)$ et le plan G d'équation $x + y + z = 0$ sont en somme directe :

- Montrons que $F \cap G = \{0\}$. Soit $v = (x, y, z) \in F \cap G$. Comme $v \in F$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$v = a \times (1, 1, 1) = (a, a, a)$$

et comme $v \in G$, on a $a + a + a = 3a = 0$, donc $a = 0$ et $v = 0_{\mathbb{R}^3}$, soit $F \cap G = \{0\}$.

- Montrons que $E = F + G$. Remarquons d'abord que le plan G est engendré par les deux vecteurs $v = (1, -1, 0)$ et $w = (1, 0, -1)$. En effet, un élément $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ appartient à G s'il vérifie l'équation $x + y + z = 0$, c'est à dire $x = -y - z$. Autrement dit,

$$(x, y, z) \in G \Leftrightarrow (x, y, z) = (-y - z, y, z) = y \times (-1, 1, 0) + z \times (-1, 0, 1)$$

ce qui signifie bien que $G = \text{Vect}\big((-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\big)$. Ainsi, d'après la proposition 16, on a

$$F + G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Prenons $x \in E$ de coordonnées (x_1, x_2, x_3). On cherche donc $y \in F$ et $z \in G$ tels que $x = y + z$. D'après ce qui précède, il suffit donc de trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $x = au + bv + cw$, et on aura $y = au \in F$ et $z = bv + cw \in G$. On écrit donc le système

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & 0\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

et, en inversant la matrice, on obtient l'écriture

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1/3 & 1/3 & 1/3\\1/3 & -2/3 & 1/3\\1/3 & 1/3 & -2/3\end{pmatrix}}_{A^{-1}}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

et ainsi on obtient les scalaires a, b, c

$$\left\{\begin{array}{lll} a & = & 1/3x_1 + 1/3x_2 + 1/3x_3\\ b & = & 1/3x_1 - 2/3x_2 + 1/3x_3\\ c & = & 1/3x_1 + 1/3x_2 - 2/3x_3 \end{array}\right.$$

donc on a bien écrit $x \in E$ comme somme d'un élément de F (au) et d'un élément de G $(bv + cw)$ avec a, b et c définis comme ci-dessus, ce qui signifie que $E = F + G$.