Université de Strasbourg
Double Licence Math-Eco - 2022/2023
Algèbre linéaire S2 - Printemps 2023
Victoria Callet - *victoria.callet@math.unistra.fr*

Chapitre 2 : Familles libres, familles génératrices, bases

Dans tout le chapitre, on se place dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1 Indépendance linéaire

1.1 Définitions et premiers exemples

Vocabulaire. On appelle **famille de vecteurs** toute collection (éventuellement infinie) de vecteurs de E. On les note généralement $(u_1, \ldots, u_n) \in E$.

Définition 1

Une famille finie de vecteurs $(u_1, \ldots, u_n)$ est **liée** s'il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que
- $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$
- $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$

Dans ce cas, on dit que les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ sont **linéairement dépendants**.

Exemple 1. Dans $\mathbb{R}^3$, la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (-1, 3, 1)$ et $u_3 = (-1, 13, 5)$ est liée puisque $2u_1 + 3u_2 - u3 = 0$ et que $(2, 3, -1) \neq (0, 0, 0)$.

Définition 2

Une famille finie de vecteurs $(u_1, \ldots, u_n)$ est **libre** si elle n'est pas liée, c'est à dire que pour toute famille de scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ et toute combinaison linéaire nulle $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$, on a $\lambda_i = 0$ pour tout i.
Dans ce cas, on dit que les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ sont **linéairement indépendants**.

Exemple 2. Dans $\mathbb{R}^3$, la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = (1, 1, -1)$, $u_2 = (0, 2, 1)$ et $u_3 = (0, 0, 5)$ est libre. En effet, supposons qu'il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$. On aurait alors

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & & & = & 0 \\ -\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 5\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

et donc on voit bien que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, soit la famille (u_1, u_2, u_3) est bien libre.

Méthode : Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs.

i. Pour montrer que cette famille est **liée**, trouver des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$, ou bien simplement montrer qu'elle n'est pas libre.
ii. Pour montrer que cette famille est **libre**, considérer une combinaison linéaire nulle $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$ et vérifier que $\lambda_i = 0$ pour tout i.

Remarques. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille libre.

i. Pour tout i, $u_i \neq 0$. En effet, supposons par exemple que $u_1 = 0$. Dans ce cas, $1u_1 + 0u_2 + \ldots + 0u_n = 0$ et$(1, 0, \ldots, 0) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ donc $u_1, \ldots, u_n$ serait liée. **Contradiction.**
ii. Pour tous $i \neq j$, $u_i \neq u_j$. En effet, supposons par exemple que $u_1 = u_2$, alors la famille serait liée. **Contradiction.**

Autrement dit, une famille libre ne peut contenir le vecteur nul ni deux fois le même vecteur.

1.2 Propriétés sur les familles libres et les familles liées

Proposition 3

Deux vecteurs u et v non nuls forment une famille libre ***ssi*** ils sont non colinéaires.

Démonstration. Soient u et v deux vecteurs non nuls d'un même espace vectoriel.

$\Rightarrow$ **Condition nécessaire.** Supposons que la famille (u, v) soit libre. Par l'absurde, supposons maintenant que u et v soient colinéaires. Alors, par définition il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $\lambda \neq 0$ tel que

$$u = \lambda v \Leftrightarrow u - \lambda v = 0.$$

On a ainsi trouvé une combinaison linéaire nulle $\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0$ de u et v, avec $\lambda_1 = 1 \neq 0$ et $\lambda_2 = \lambda \neq 0$, donc la famille (u, v) est liée, ce qui est absurde. Ainsi, u et v ne peuvent pas être colinéaires.

$\Leftarrow$ **Condition suffisante.** Supposons que u et v soient non colinéaires. Pour montrer que la famille (u, v) est libre, prenons une combinaison linéaire nulle de u et v :

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0.$$

Si $\lambda_1 \neq 0$, on peut écrire $u = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v$ et donc u et v sont colinéaires, ce qui est absurde par hypothèse. De même, si $\lambda_2 \neq 0$, on a $v = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} u$ et donc à nouveau u et v sont colinéaires. Finalement, le seul cas possible est $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, et donc la famille (u, v) est bien libre.

$\square$

Remarque. De la même façon, une famille de trois vecteurs (u, v, w) est libre s'ils sont non coplanaires, ce qui se traduit par $\det A \neq 0$, où A est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de u, v et w.

Proposition 4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

i. (x) est une famille libre de E ***ssi*** $x \neq 0$.
ii. Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
iii. Toute famille contenant une famille liée est liée.
iv. Toute famille $(u_1, \ldots, u_p)$ dont l'un des vecteurs u_i est nul est liée.

Démonstration. i. Rappelons qu'on a vu dans le chapitre 1 que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda x = 0_E$ implique $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E$. Supposons alors que la famille (x) soit libre. Alors, si $\lambda x = 0$ on a par définition $\lambda = 0$ et donc $x \neq 0$. De même, si $x \neq 0$ et si $\lambda x = 0$ est une combinaison linéaire nulle de x, alors $\lambda = 0$ et donc $(x) = 0$ est bien libre.

ii. Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille libre et $\mathcal{F}$ une sous-famille de celle-ci. Alors, à renumérotation près, on a $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_k)$ avec $k \leq p$. Si $\mathcal{F}$ était liée, alors l'un des vecteurs de $(v_1, \ldots, v_k)$ est combinaison linéaire des autres et donc par extension il existe un des vecteurs de $(u_1, \ldots, u_p)$ qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres, ce qui signifie que la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est liée. **Contradiction.**

iii. Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille liée et $(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q)$ une famille qui la contient (à renumérotation près). Alors, par définition l'un des vecteurs de $(u_1, \ldots, v_p)$ est combinaison linéaire de tous les autres, donc par extension l'un des vecteurs de $(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q)$ est combinaison linéaire de tous les autres, donc cette famille est liée.

iv. Si $(u_1, \ldots, u_p)$ contient un vecteur nul, disons u_i, alors d'après i. il contient une famille liée et donc d'après d'après iv. cette famille est aussi liée.

□

Proposition 5

La famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_n)$ est liée ***ssi*** il existe un indice $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que u_k est une combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots, u_n$, c'est à dire que l'un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire de tous les autres.

Démonstration.

⇒ **Condition nécessaire.** Supposons $(u_1, \ldots, u_n)$ liée. Alors, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ tel que $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$. En particulier, il existe $\lambda_k \in (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ non nul tel que

$$\lambda_k u_k = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_{k-1} u_{k-1} + \lambda_{k+1} u_{k+1} + \ldots + \lambda_n u_n,$$

soit en divisant par λ_k, u_k est bien combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots, u_n$.

⇐ **Condition suffisante.** Supposons qu'il existe un indice $k \in \{1, \ldots, n\}$ et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $u_k = \sum_{i \neq k} \lambda_i u_i$. Alors, on a

$$\sum_{i \neq k} (\lambda_i u_i) - u_k = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i} \lambda_i u_i = 0 \text{ avec } \lambda_k = -1$$

et en particulier $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ donc la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est bien liée.

□

Remarque. La proposition précédente nous dit que lorsqu'une famille de vecteurs est liée, alors forcément l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres. Attention, ce n'est pas forcément vrai pour n'importe lequel des vecteurs de la famille.

→ **Contre-exemple :** dans $E = \mathbb{R}^2$ et en notant $i = (1, 0)$ et $j = (0, 1)$ vecteurs "origines", si on considère $u = 2i = (2, 0)$ alors la famille (i, j, u) est liée $(u = 2i + 0j)$. Ainsi, i est combinaison linéaire de (u, j), u est combinaison linéaire de (i, j) mais j n'est pas combinaison linéaire de (i, u).

Proposition 6

Soient $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille libre et $v \in E$. Alors, v est combinaison linéaire des $u_1, \ldots, u_n$ ***ssi*** la famille $(u_1, \ldots, u_n, v)$ est liée.

Démonstration.

- $\Rightarrow$ **Condition nécessaire.** Supposons que v soit une combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$, alors il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu) \neq (0, \ldots, 0, 0)$ tels que

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n - \mu v = 0$$

et donc la famille $(u_1, \ldots, u_n, v)$ est liée.

- $\Leftarrow$ **Condition suffisante.** Supposons que la famille $(u_1, \ldots, u_n, v)$ soit liée. Par définition, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu) \neq (0, \ldots, 0, 0)$ tels que

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n + \mu v = 0 \tag{1}$$

Remarquons que $\mu \neq 0$. En effet, si $\mu = 0$ alors on aurai $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = 0$ et comme par hypothèse $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre, alors $\lambda_i = 0$ pour tout i, donc dans ce cas on aurait $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu) = (0, \ldots, 0, 0)$, ce qui est contradictoire. Ainsi, l'égalité (1) devient

$$-\mu v = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n$$

et en divisant par $\mu \neq 0$, on obtient

$$v = \left(\frac{1}{-\mu}\right)(\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n)$$

donc v est bien combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$.

$\square$

2 Base et dimension

2.1 Base d'un espace vectoriel

Définition 7

Une famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_p)$ de E est une famille **génératrice** si $E = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$, autrement dit si pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in K$ tels que $x = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p$.

Vocabulaire. Un espace vectoriel est dit de **dimension finie** s'il existe une famille génératrice **finie**. Sinon, on dit que qu'il est de **dimension infinie**.

Remarque. Une telle famille n'existe pas toujours, par exemple l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ n'admet aucune famille génératrice En effet, supposons par l'absurde que $\mathbb{R}[X]$ soit de dimension finie : alors, il existe $(P_1, \ldots, P_k)$ une famille génératrice de $\mathbb{R}[X]$. Notons $N = \max(\deg P_i,\ i = 1, \ldots, N)$ le maximum des degrés des P_i et prenons Q un polynôme de degré $N + 1$. Alors, $Q \in \mathbb{R}[X]$ donc il devrait s'écrire comme une combinaison linéaire des $(P_1, \ldots, P_k)$, mais comme $\deg P_i \leq N$ pour tout i, ceci n'est pas possible, donc $(P_1, \ldots, P_k)$ n'engendre pas $\mathbb{R}[X]$. **Contradiction**.

Exemple 3. Dans $E = \mathbb{R}^2$, la famille (u_1, u_2) avec $u_1 = (1, 0)$ et $u_2 = (0, 1)$ est une faille génératrice. En effet, tout élément $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ se décompose comme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soit $x = x_1 u_1 + x_2 u_2$. Cet exemple se généralise à $\mathbb{R}^n$: la famille $(u_1, \ldots, u_n)$, où $u_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i^{\text{ème}}\ \text{rang}}, 0, \ldots, 0)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 8

Toute famille du $\mathbb{K}$-ev E contenant une famille génératrice est elle-même génératrice.

Démonstration. Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille génératrice et $\mathcal{F}$ une famille qui la contient. Alors, à renumérotation près, on a $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q)$, avec $v_i \in E$. Soit x un élément de E. Alors, $x = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p$, mais on peut aussi écrire

$$x = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p + 0v_1 + \ldots + 0v_q$$

donc $\mathcal{F}$ est génératrice. $\square$

Définition 9

Une famille de vecteurs de E forme une **base** de E si elle est à la fois **libre** et **génératrice**.

Remarque. Là encore, une telle famille n'existe pas toujours, mais on verra par la suite que c'est le cas sous de bonnes hypothèses sur l'espace vectoriel de départ.

Exemple 4. La famille (e_1, e_2) avec $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. En effet, on a vu dans l'exemple 3 qu'elle est génératrice, montrons alors qu'elle est également libre. Soit $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$ une combinaison linéaire nulle de e_1, e_2. Alors,

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

donc (e_1, e_2) est bien une base de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 5. (*Base canonique de* $\mathbb{K}^n$)
La famille $(e_1, \ldots, e_n)$, où $e_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i^{\text{ème}} \text{ rang}}, 0, \ldots, 0)$ est une base de $\mathbb{K}^n$. En effet, on a déjà vu dans l'exemple 3 que cette famille est génératrice, montrons donc qu'elle est libre. Soit $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0$ une combinaison linéaire nulle de $e_1, \ldots, e_n$. Alors, on a

$$\begin{array}{rccc} & \lambda_1(1, 0, \ldots, 0) + \ldots + \lambda_n(0, \ldots, 0, 1) & = & (0, \ldots, 0) \\ \Longleftrightarrow & (\lambda_1, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, \ldots, 0, \lambda_n) & = & (0, \ldots, 0) \\ \Longleftrightarrow & (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) & = & (0, \ldots, 0) \end{array}$$

donc $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, d'où $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre et donc elle forme bien une base de $\mathbb{K}^n$.

Exemple 6. (*Base canonique de* $\mathbb{R}_n[X]$)
La famille $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X] = \{P = a_i X^i \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ et } \deg P \leq n\}$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. En effet, par définition tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ s'écrit $P = a_0 1 + a_1 X + \ldots a_n X^n$ donc cette famille est génératrice. Montrons qu'elle est libre : soit

$$\lambda_0 1 + \lambda_1 X + \ldots + \lambda_n X^n = 0$$

une combinaison linéaire nulle d'éléments de $\mathcal{B}$. Alors, le membre de gauche est un polynôme égal au polynôme nul, or par définition deux polynômes sont égaux ***ssi*** les coefficients de même degrés sont égaux, donc en fait $\lambda_0 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$ et la famille est bien libre, donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exemple 7. (*Base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*)
Pour $n = 2$, on note $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de tailles 2 à coefficients dans $\mathbb{K}$. Notons $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ la famille de matrices telles que

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors, toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ peut s'écrire

$$M = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4$$

donc la famille $\mathcal{B}$ est génératrice. De plus, si

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 + \lambda_4 E_4 = 0$$

est une combinaison linéaire nulle, alors

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc en fait $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, donc $\mathcal{B}$ est libre et forme donc bien une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Plus généralement, la famille de matrices $(E_1, ..., E_{n^2})$ où E_i est la matrice carrée de taille n avec tous les coefficients nuls sauf un, égal à 1 en position (i, i) forme une base de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 8. (*Base d'un sev défini par un système d'équations*)
Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + 3z = 0\}.$$

F est bien un sev comme *hyperplan* de $\mathbb{R}^3$. Cherchons donc une base de F. Pour cela, il faut réécrire l'équation $2x + y + 3z = 0$: par exemple, on peut écrire que

$$2x + y + 3z = 0 \Longleftrightarrow y = -2x - 3z$$

donc en fait un vecteur $u = (x, y, z)$ est dans F ***ssi*** $y = -2x - 3z$, ce qui revient à dire que

$$u \in F \Longleftrightarrow v = (x, -2x - 3z, z) \Longleftrightarrow v = x(1, -2, 0) + z(0, -3, 1)$$

et ainsi, les deux vecteurs $e_1 = (1, -2, 0)$ et $e_2 = (0, -3, 1)$ forment une famille génératrice de F. Il reste montrer que (e_1, e_2) est bien libre. Pour cela, on écrit une combinaison linéaire nulle de e_1 et e_2 :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0 \Longleftrightarrow (\lambda_1, -2\lambda_1 - 3\lambda_2, \lambda_2 = (0, 0, 0) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrcl} \lambda_1 & & = & 0 \\ -2\lambda_1 & -3\lambda_2 & = & 0 \\ & \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

et donc (e_1, e_2) est bien une base de F.

Proposition 10

Une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E ***ssi*** pour tout vecteur $x \in E$, il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n.$$

Autrement dit, tout vecteur x se décompose de façon unique sur les e_i.

Démonstration.

- $\Rightarrow$ **Condition nécessaire.** Supposons que $(e_1, \ldots, e_n)$ soit une base de E et prenons $x \in E$. Alors, par définition la famille est génératrice, donc il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n.$$

Montrons que cette décomposition est unique. Supposons pour cela qu'il existe $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n$ tels qu'on ait la même décomposition, *ie*

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n \\ x & = & \lambda'_1 e_1 + \ldots + \lambda'_n e_n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0 & = & x - \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n \\ 0 & = & x - \lambda'_1 e_1 + \ldots + \lambda'_n e_n \end{array}\right.$$

et en soustrayant les deux lignes, on obtient

$$0 = (\lambda_1 - \lambda'_1)e_1 + \ldots + (\lambda_n - \lambda'_n)e_n$$

mais comme la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre, on a en fait $\lambda_i = \lambda'_i$ pour tout i, d'où l'unicité de la décomposition.

- $\Leftarrow$ **Condition suffisante.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille d'éléments de E telle que tout vecteur $x \in E$ se décompose de façon unique sur les e_i. Montrons que $\mathcal{B}$ forme une base de E. La famille est génératrice par hypothèse, il suffit donc de montrer qu'elle est libre. Soit $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0$ une combinaison linéaire nulle des e_i. Alors, on peut écrire

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0 = 0e_1 + \ldots + 0e_n$$

et donc par unicité de la décomposition, tous les λ_i sont nuls et $\mathcal{B}$ est bien une base de E.

$\square$

Remarque. Cette proposition permet de définir la notion de **coordonnées** : en effet, dire par exemple que u a pour coordonnées (a, b, c) dans la base (e_1, e_2, e_3) revient à dire que u se décompose de façon unique sous la forme $u = ae_1 + be_2 + ce_3$. Remarquons que si u et v sont deux vecteurs de coordonnées respectives $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$, alors le vecteur $u + v$ a pour coordonnées $(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. En effet, par définition, on a les deux décompositions suivantes pour u et v :

$$\begin{array}{lcl} u & = & a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n \\ v & = & b_1 e_1 + \ldots + b_n e_n \end{array}$$

donc on $u + v = (a_1 + b_1)e_1 + \ldots + (a_n + b_n)e_n$.

2.2 Existence de bases en dimension finie

Dans cette partie, on va voir qu'un espace vectoriel de dimension finie admet toujours une base. Pour cela, remarquons d'abord que si E est de dimension finie, alors E possède naturellement une famille génératrice (en effet, il suffit de considérer l'ensemble de tous les vecteurs de E). De même, si $E \neq \{0\}$, alors E possède au moins un vecteur non nul x et donc au moins une famille libre, en considérant la famille (x) (cf proposition i. 4).

Théorème 11 (Existence de base)

Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel de dimensions **finie** et $\mathcal{G} = (g_1, \ldots, g_k)$ une famille génératrice de E. Considérons une famille libre $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$ de E. Alors, il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$. Autrement dit, **dans un espace vectoriel de dimension finie, il existe toujours des bases.**

Démonstration. Soit $\mathcal{G} = (g_1, \ldots, g_k)$ une famille génératrice de E. Remarquons d'abord que si tous les g_i étaient nuls, alors $\forall x \in E$ on aurait $x = 0$, ce qui n'est pas possible puisqu'on a supposé $E \neq \{0\}$. Ainsi, au moins un des g_i est non nuls et on peut supposons à reunémoration près qu'il s'agit de g_1.
Posons alors $\mathcal{L}_1 = (g_1)$. Alors, comme $g_1 \neq 0$, d'après la proposition 4, la famille $\mathcal{L}_1$ est libre. Si elle était de plus génératrice, le théorème serait démontré. Supposons donc qu'elle ne soit pas génératrice et montrons dans ce cas qu'il existe $g_* \in (g_2, \ldots, g_k)$ tel que la famille (g_1, g_*) soit libre. En effet, si ce n'était pas le cas, alors pour tout $g_* \in (g_2, \ldots, g_k)$ la famille (g_1, g_*) serait liée, et donc en particulier tout vecteur de $(g_2, \ldots, g_k)$ serait combinaison linéaire de g_1, ce qui signifie qu'il existe $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$ tels que

$$g_2 = \lambda_2 g_1, \ldots, g_k = \lambda_k g_k.$$

Alors, en particulier pour tout élément $x \in E$, on a

$$x = \alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_k g_k = \alpha_1 g_1 + (\alpha_2 \lambda_2) g_1 + \ldots + (\alpha_k \lambda_k) g_1 = \lambda g_1$$

donc tout élément $x \in E$ est combinaison linéaire de g_1, donc $\mathcal{L}_1 = (g_1)$ est génératrice. **Contradiction.**
Ainsi, la famille (g_1, g_*) est libre et, à renumérotation près, on peut supposer $g_* = g_2$ et poser $\mathcal{L}_2 = (g_1, g_2)$.
La famille $\mathcal{L}_2$ est donc libre dans E, et on montre alors de la même manière que pour $\mathcal{L}_1$ que la famille $\mathcal{L}_2$ est soit génératrice et le théorème est démontré, soit qu'elle peut être complétée en une famille libre $\mathcal{L}_3 = (g_1, g_2, g_3)$, et répéter alors ce même processus jusqu'à obtenir une famille $\mathcal{L}_n = (g_1, \ldots, g_n) \subset \mathcal{G}$ qui soit à la fois libre et génératrice. De plus, comme E est de dimension finie, on sait qu'il existe un tel n, donc on finit bien par trouver une base $\mathcal{L}_n$ de E. $\square$

Théorème 12 (Théorème de la base incomplète)

Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel de dimension finie.

i. De toute famille génératrice $\mathcal{G}$ de E, on peut extraire une base.
ii. Toute famille libre $\mathcal{L}$ de E peut être complétée de manière à former une base.

Démonstration. i. C'est la preuve du théorème d'existence des bases en dimension finie.

ii. Soit $\mathcal{L}$ est une famille libre de E. Comme E est de dimension finie, E admet une famille génératrice $\mathcal{G}$ (qui ne contient pas nécessairement $\mathcal{L}$). Notons $\mathcal{G}' = \mathcal{G} \cup \mathcal{L}$. Alors $\mathcal{G}'$ contient une famille génératrice, donc elle est elle-même génératrice (cf proposition 4). De plus, elle contient aussi une famille libre, et on peut appliquer le théorème d'existence des bases en dimension finie et ainsi la compléter de façon à en faire une base de E.

$\square$

2.3 Dimension d'un espace vectoriel

Le lemme suivant sert d'outils à la démonstration du théorème 14.

Lemme 13

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille génératrice de E constituée de n vecteurs. Si $(f_1, \ldots, f_p)$ est une famille de p vecteurs de E avec $p > n$, alors cette famille est liée. Autrement dit, dans un espace vectoriel engendré par n éléments, toute famille contenant **strictement plus** de n éléments est liée.

Démonstration. Notons $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{F}' = (f_1, \ldots, f_p)$, avec $p > n$. On doit donc montrer que $\mathcal{F}'$ est liée. Pour cela, on va montrer que la sous-famille de $(f_1, \ldots, f_n)$ de $\mathcal{F}'$ est génératrice, car dans ce cas, f_{n+1} sera combinaison linéaire des f_i pour tout $i \leq n$ et donc en particulier $(f_1, \ldots, f_{n+1}) \subset \mathcal{F}'$ est liée, donc $\mathcal{F}'$ est aussi liée (cf iii. proposition 4). Soit donc $(f_1, \ldots, f_n)$ sous-famille de $\mathcal{F}'$. Si l'un des f_i était nul, alors $\mathcal{F}'$ serait immédiatement liée (cf proposition i. 4). Supposons donc que $f_i \neq 0$ pour tout i : alors, comme $\mathcal{F}$ est génératrice, on aura

$$f_i = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n \text{ pour tout } i.$$

Or $f_i \neq 0$ donc au moins l'un des λ_k est non nul, disons λ_1. Alors, en divisant par λ_1 on obtient

$$e_1 = \frac{1}{\lambda_1} e_1 - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} e_2 + \ldots + \frac{\lambda_n}{\lambda_1} e_n\right)$$

donc tout élément $x \in E$ s'écrira comme combinaison linéaire des $f_1, e_2, \ldots, e_n$, ce qui signifie que la famille $(f_1, e_2, \ldots, e_n)$ est génératrice. De même, on peut réitérer ce processus jusqu'à remplacer tous les e_i par les f_i, et ainsi obtenir que $(f_1, \ldots, f_n)$ est génératrice, et donc la famille $\mathcal{F}'$ est bien liée. □

Théorème 14

Si E admet une base constituée de n vecteurs, alors c'est le cas pour toutes ses bases.

Démonstration. Ce théorème se déduit immédiatement du lemme précédent : en effet, soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors, $\mathcal{B}$ est génératrice donc soit $\mathcal{B}'$ contient plus de vecteurs que $\mathcal{B}'$ et donc d'après le lemme précédent elle est liée. **Contradiction.**
De même, soit $\mathcal{B}$ contient plus d'éléments que $\mathcal{B}'$ qui est génératrice, et donc $\mathcal{B}$ est liée. **Contradiction.** □

Définition 15

Si E admet une base constituée de n vecteurs, alors on dit que E est de **dimension** n.
On note $\dim_{\mathbb{K}} E = n$ (on omet parfois de préciser $\mathbb{K}$ quand le contexte le permet).

Vocabulaire.

- Par convention, la dimension de l'espace vectoriel $\{0\}$ est 0 : $\dim\big(\{0\}\big) = 0$. On a évidement $\dim_{\mathbb{K}} E = 0$ ***ssi*** $E = \{0\}$.
- Un espace vectoriel de dimension 1 est appelé une **droite vectorielle**.
- Un espace vectoriel de dimension 2 est appelé un **plan vectoriel**.
- Si E est un espace vectoriel de dimension n et F est un sev de E tel que $\dim F = n - 1$, alors F est appelé un **hyperplan** de E.
- On appelle **rang de la famille** de vecteurs $(u_1, \ldots, u_n)$ la dimension de l'espace $\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_n)$.

Exemple 9. D'après l'exemple 5, l'espace $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie avec $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$.

Exemple 10. L'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un espace vectoriel de dimension $n+1$. En effet, on a déjà vu dans l'exemple 6 que la famille $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$, et comme elle compte $n+1$ éléments, on a bien

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_n[X] = n + 1.$$

En revanche, on a vu que l'espace $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension infinie.

Remarque. La dimension d'un espace vectoriel E dépend évidemment de E mais également du corps de base $\mathbb{K}$ (c'est pourquoi on la note souvent $\dim_{\mathbb{K}}$. En effet, $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-ev est de dimension 2, car tout élément $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique comme $z = a1 + bi$, et donc la famille $(1, i)$ en est une base. En revanche, si on considère $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors il est évidemment de dimension 1. Ainsi, on a

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2 \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1.$$

Théorème 16

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

i. Toute famille ayant **plus** de n éléments est liée.
ii. Les familles ayant **moins** de n éléments ne peuvent être génératrices.
iii. Toute famille génératrice ayant **exactement** n éléments est une base.
iv. Toute famille libre ayant **exactement** n éléments est une base.

Démonstration.

i. C'est une reformulation du lemme 13.
ii. Si E possédait une famille génératrice $\mathcal{F}$ avec moins de n éléments, alors on pourra d'après le théorème 12 en extraire une base qui contiendrait donc moins de n éléments, ce qui est en contradiction avec le théorème 14.
iii. Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrices de E constituée de n éléments. Alors, à nouveau d'après le théorème 12, on peut en extraire une base de E. Mais comme toute base de E contient n élément d'après le théorème 14, cette nouvelle base contient bien n éléments : il s'agit donc de $\mathcal{G}$ elle-même.
iv. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E constituée de n éléments. Alors, d'après le 12 on peut compléter cette famille de façon à en faire une base de E. Mais comme pour iii. cette base contient n éléments par le théorème 14, il s'agit donc de $\mathcal{L}$ elle-même.

$\square$

Remarque. Les points iii. et iv. de la proposition précédente nous disent que, pour trouver une base d'un espace vectoriel E de dimension n, **il suffit de trouver une famille qui soit ou libre ou génératrice**.

Proposition 17

Soient $E_1, \ldots, E_p$ des espaces vectoriels tous de dimension finie sur le même corps $\mathbb{K}$. Alors, on a déjà vu que l'espace produit $E_1 \times \ldots \times E_p$ est un $\mathbb{K}$-ev. De plus, on a

$$\dim_{\mathbb{K}}(E_1 \times \ldots \times E_p) = \dim_{\mathbb{K}} E_1 + \ldots + \dim_{\mathbb{K}} E_p.$$

Démonstration. Notons $(a_1, \ldots, a_{n_1})$, $(b_1, \ldots, b_{n_2})$, ..., $(k_1, \ldots, k_{n_p})$ respectivement des bases de $E_1, E_2, \ldots, E_p$. Alors, on peut facilement vérifier que la famille

$$\big((a_i, 0, \ldots, 0)_{i=1,\ldots,n_1}, (0, b_i, 0, \ldots, 0)_{i=1,\ldots,n_2}, \ldots, (0, \ldots, 0, k_i)_{i=1,\ldots,n_p}\big)$$

est une base de $E_1 \times \ldots \times E_p$. $\square$

3 Sous-espaces vectoriels de dimension finie

Théorème 18

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $F \neq \{0\}$ un sev de E. Alors, F est de dimension finie et de plus, on a :

i. $\dim F \leq n$

ii. $\dim F = n$ ***ssi*** $E = F$.

Démonstration.

i. Comme $F \neq \{0\}$, il existe $x_1 \in F$ avec $x_1 \neq 0$ et on peut considérer la famille $\mathcal{L}_1 = (x_1)$ de F. Alors, $\mathcal{L}_1$ est libre et, comme pour la preuve du lemme 13, on peut compléter (x_1) en une autre famille libre de F, notée $\mathcal{L}_2 = (x_1, x_2) \supsetneq \mathcal{L}_1$, et ainsi construire une suite de familles libres de F telles que

$$\mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_2 \subsetneq \mathcal{L}_3 \subsetneq \ldots \subsetneq F$$

jusqu'à obtenir une famille libre $\mathcal{L}_k$ qui soit génératrice de F. On a ainsi l'existence d'une famille libre et génératrice de F, mais il faut également montrer que celle-ci est finie (pour avoir que $\dim F < \infty$). Or, supposons que F n'admet pas de famille génératrice finie : alors, il existerait une famille génératrice infinie dans F, mais donc dans E également, qui est de dimension finie. **Contradiction.** Ainsi, F admet une famille libre et génératrice **finie** : F est donc de dimension finie et admet une base. Par ailleurs, on a vu qu'une base de F est toujours constituée d'au plus n éléments, donc $\dim F \leq \dim F$.

ii. Si $\dim F = \dim E$, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de F constituée de n éléments. Or $F \subset E$ donc $\mathcal{B}$ est une famille de E, libre et constituée de n éléments : c'est donc une base de E (cf théorème 16. Ainsi, $\mathcal{B}$ engendre E et F, donc $E = F$. Réciproquement, si $E = F$, alors on a évidemment $\dim F = \dim E$.

□

Théorème 19

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et F, G deux sev de E de bases respectives $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_p)$ et $\mathcal{G} = (g_1, \ldots, g_q)$, avec $p, q \geq 1$ (F et G différents de $\{0\}$). Alors,

$$E = F \oplus G \ \ \textbf{\textit{ssi}} \ \ (f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q) \text{ est une base de } E.$$

Démonstration. Notons $\mathcal{B} = (f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$.

$\Rightarrow$ **Condition nécessaire.** Supposons que F et G soient en somme directe dans E (*ie* $E = F \oplus G$). Montrons que $\mathcal{B}$ est une base de E.

i. Montrons que $\mathcal{B}$ est libre : soit

$$\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_p f_p + \mu_1 g_1 + \ldots + \mu_q g_q = 0$$

une combinaison linéaire nulle des éléments de $\mathcal{B}$. Alors,

$$\underbrace{\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_p f_p}_{\in F} = \underbrace{-\mu_1 g_1 - \ldots - \mu_q g_q}_{\in G}$$

donc chaque membre de cette égalité appartient à la fois à F et à G, donc à $F \cap G$. Or par hypothèse $F \cap G = \{0\}$, donc en fait

$$\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_p f_p = 0 \ \text{ et } \ \mu_1 g_1 + \ldots + \mu_q g_q = 0$$

qui sont des combinaisons linéaires nulles d'éléments de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ respectivement, qui sont des familles libres, donc par définition

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0 \ \text{ et } \ \mu_1 = \ldots = \mu_q = 0$$

ce qui revient à dire que $\mathcal{B}$ est une famille libre.

ii. Montrons que $\mathcal{B}$ est génératrice : soit $w \in E$. Comme F et G sont en somme directe dans E, on a en particulier $E = F + G$ donc w s'écrit comme $w = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$. De plus, $\mathcal{F}$ est une base de F donc u est combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$, et de même v est combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{G}$. Ainsi, w est combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$, donc $\mathcal{B}$ est bien génératrice.

Ainsi, $\mathcal{B}$ est une base de E.

$\Leftarrow$ **Condition suffisante.** Supposons que $\mathcal{B}$ est une base de E, et montrons que $E = F \oplus G$.

i. Montrons que $F \cap G\{0\}$. Soit u un élément de l'intersection. Alors,

$$\begin{array}{lcl} u \in F & \iff & u = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_p f_p \\ u \in G & \iff & u = \mu_1 g_1 + \ldots + \mu_q g_q \end{array}$$

donc en soustrayant les deux lignes on obtient la combinaison linéaire nulle d'éléments de $\mathcal{B}$

$$\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_p f_p - \mu_1 g_1 - \ldots - \mu_q g_q = 0.$$

Or $\mathcal{B}$ est libre, donc $\lambda_1 + \ldots + \lambda_p = \mu_1 = \ldots = \mu_q = 0$, soit $u = 0$, et donc $F \cap G\{0\}$.

ii. Montrons que $E = F + G$. Soit $w \in E$. Alors, comme $\mathcal{B}$ est une base de E on a

$$w = \underbrace{\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_p f_p}_{u \in F} + \underbrace{\mu_1 g_1 + \ldots + \mu_q g_q}_{v \in G}$$

donc $w = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$, donc $E = F + G$.

Ainsi, F et G sont bien en somme directe dans E.

□

Corollaire 20

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. Alors, tout sev de E admet un supplémentaire dans E.

Démonstration. Soit F un sev de E. Prenons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_p)$ une base de F. Alors, le théorème de la base incomplète 12 nous dit qu'on peut compléter $\mathcal{F}$ en une base de E, qu'on note $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$, avec $q = n - p$ et les g_i choisis parmi les e_i. Notons $G = \mathrm{Vect}\,(g_1, \ldots, g_q)$ le sev de E engendré par les g_i. Alors, $(g_1, \ldots, g_q)$ est une famille libre de E, puisqu'elle est extraite d'une famille libre, et elle est génératrice de G par définition : $(g_1, \ldots, g_q)$ est donc une base de G. Alors, d'après le théorème précédent, $E = F \oplus G$ donc G est un supplémentaire de F dans E. □

Exemple 11. Dans $\mathbb{R}^3$, le supplémentaire d'une droite (dimension 1) est un plan (dimension 2).

Théorème 21

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et F, G deux sev de E. On a

i. $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$ (**Formule de Grassman**)

ii. $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$.

Démonstration.

i. Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de de E. Comme F et G sont tous deux sev de E, alors $F \cap G$ en aussi un : à renumérotation près, posons $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de $F \cap G$.
   - $F \cap G \subset F$ donc d'après le théorème de la base incomplète, il existe $f_1, \ldots, f_p$ des éléments de F tels que $(e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_p)$ soit une base de F. De même, $F \cap G \subset G$ donc il existe $(g_1, \ldots, g_q)$ des éléments de G tels que $(e_1, \ldots, e_k, g_1, \ldots, g_q)$ soit une base de G. En particulier, on a

$$\dim F + \dim G - \dim (F \cap G) = f + g - 2k - k = f + g + k.$$

   - Montrons maintenant que $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est une base de $F + G$.

     (a) Montrons que $\mathcal{B}$ est libre. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_p, \gamma_1, \ldots, \gamma_q$ tels que

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k + \mu_1 f_1 + \ldots + \mu_p f_p + \gamma_1 g_1 + \ldots + \gamma_q g_q = 0.$$

     Or $\gamma_1 g_1 + \ldots + \gamma_q g_q \in G$ donc $\gamma_1 g_1 + \ldots + \gamma_q g_q = 0$, soit $\gamma_1 = \ldots = \gamma_q = 0$. De même, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ et $\mu_1 = \ldots = \mu_p = 0$ et la famille $\mathcal{B}$ est libre.

     (b) Montrons que $\mathcal{B}$ est génératrice. Par définition, on a $F \subset \mathrm{Vect}\,(\mathcal{B})$ et $G \subset \mathrm{Vect}\,(\mathcal{B})$, donc par stabilité $F + G \subset \mathrm{Vect}\,(\mathcal{B})$. De même, on a clairement $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{B}) \subset F + G$ donc par double inclusion, on a l'égalité $F + G = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{B})$ et $\mathcal{B}$ est génératrice.

   Ainsi, on a montré que $\mathcal{B}$ est une base de $F + G$, donc

$$\dim (F + G) = f + k + g = \dim F + \dim G - \dim (F \cap G).$$

ii. Si $E = F \oplus G$, alors $F \cap G = \{0\}$ donc $\dim (F \cap G) = 0$ et on a l'égalité.

□

Corollaire 22

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

i. Si F et G sont deux sev de E, alors

$$E = F \oplus G \ \ \textit{\textbf{ssi}} \ \ F \cap G = \{0\} \text{ et } \dim E = \dim F + \dim G.$$

ii. Si $E_1, \ldots, E_p$ sont des sev de E, alors

$$\dim (E_1 \oplus \ldots \oplus E_p) = \dim E_1 + \ldots + E_p.$$

Démonstration. Le premier point découle directement de la formule de Grassman, car si F et G sont en somme directe alors $\dim(F \cap G) = 0$ puisque $F \cap G = \{0\}$. Le deuxième point est une récurrence sur le théorème précédent. □

Exemple 12. A la fin du chapitre 1, on a vu que la droite vectorielle $F = \mathrm{Vect}\,(u)$ avec $u = (1, 1, 1)$ et le plan G d'équation $x + y + z = 0$ sont en somme directe dans $\mathbb{R}^3$. Avec la caractérisation du corollaire précédent, la preuve est beaucoup plus rapide : en effet, une fois qu'on a montré que $F \cap G = \{0\}$ ($v = (x, y, z) \in F \cap G.$, alors $v \in F$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $v = a \times (1, 1, 1) = (a, a, a)$ et comme $v \in G$, on a $a + a + a = 3a = 0$, soit $a = 0$ et $v = 0_{\mathbb{R}^3}$, d'où $F \cap G = \{0\}$), il suffit de dire que $\dim F = 1$ et $\dim G = 2$, donc $\dim \mathbb{R}^3 = \dim F + \dim G$, et on a bien $E = F \oplus G$.