Université de Strasbourg
Double Licence Math-Eco - 2022/2023
Algèbre linéaire S2 - Printemps 2023
Victoria Callet - *victoria.callet@math.unistra.fr*

Chapitre 3 : Applications linéaires

Dans tout le chapitre, on considère des espaces vectoriels de **dimension finie** sur le corps $\mathbb{K}$.

1 Applications linéaires

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f : E \to F$ une application de E dans F. On dit que f est une **application linéaire** si pour tous vecteurs u et v dans E et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$,

i. $f(u + v) = f(u) + f(v)$
ii. $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

On note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, et parfois simplement $\mathcal{L}(E, F)$, l'**ensemble des applications linéaires de E dans F**.

Remarque. Si $f : E \to F$ est linéaire, alors on a $f(0) = 0$. En effet, on a

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) = 2f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

Vocabulaire.

- Si f est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ ($f : E \to \mathbb{K}$), alors on dit que f est une **forme linéaire**. On note $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaires de E dans $\mathbb{K}$.
- Si f est une application linéaire de E dans E ($f : E \to E$), alors on dit que f est un **endomorphisme linéaire** de E. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes linéaires de E.

Proposition 2

Une application $f : E \to F$ est linéaire ***ssi*** $\forall u, v \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$.

Démonstration. C'est simplement une réécriture de la définition. $\square$

Exemple 1.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{id}_E : E & \to & E \\ u & \mapsto & u \end{array}$$

est une application linéaire (et un endomorphisme de E) appelée **application identité**.

Exemple 2.

$$\begin{array}{rcl} 0_E : E & \to & E \\ u & \mapsto & 0 \end{array}$$

est une application linéaire (et un endomorphisme de E) appelée **application nulle**.

Exemple 3.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (2x+y, y-z) \end{array}$$

est une application linéaire. En effet, soient (x,y,z) et (x',y',z') dans $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{array}{rcl} f\big((x,y,z)+(x',y',z')\big) & = & f(x+x', y+y', z+z') \\ & = & \big(2x+2x'+y+y', y-y'-z-z'\big) \\ & = & (2x+y, y-z)+(2x'+y', y'-z') \\ & = & f(x,y,z)+f(x',y',z') \end{array}$$

et

$$f\big(\lambda(x,y,z)\big) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (2\lambda x+\lambda y, \lambda y - \lambda z) = \big(\lambda(2x+y), \lambda(y-z)\big) = \lambda f(x,y,z)$$

donc f est bien linéaire.

Exemple 4.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x^2-y, y+z) \end{array}$$

n'est pas linéaire. En effet, si (x,y,z) et (x',y',z') sont deux éléments de $\mathbb{R}^3$, alors

$$f\big((x,y,z)+(x',y',z')\big) = \big((x+x')^2-(y+y'), y+y'+z+z'\big) = (x^2+x'^2-y-y'+2xx', y+y'+z+z')$$

et

$$f(x,y,z)+f(x',y',z') = (x+x'^2-y-y', y+y'+z+z')$$

donc f n'est pas additive. De même, on peut vérifier que f ne respecte pas la multiplication par un scalaire.

Remarque. La non-linéarité de f dans l'exemple précédent vient du terme au carré. De la même façon, une application qui renverrait un produit de ses coordonnées ne pourrait pas être linéaire. En fait, chaque composante dans l'espace d'arrivée doit être un *polynôme homogène de degré* 1 en les coordonnées.

Exemple 5. Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ les espaces vectoriels des applications $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ respectivement continues et continues de dérivées continues. Alors, l'application *dérivée*

$$\begin{array}{rccc} D: & E & \to & F \\ & f & \mapsto & f' \end{array}$$

est une application linéaire. En effet, soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{array}{rcl} D(f+g) & = & (f+g)' = f'+g' = D(f)+D(g) \\ D(\lambda f) & = & (\lambda f)' = \lambda f' = D(f) \end{array}$$

Proposition 3

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications linéaires avec E, F et G deux $\mathbb{K}$-ev, alors la composition $g \circ f : E \to G$ est linéaire.

Démonstration. Pour tout $u \in E$, on a par définition de la composition $g \circ f(u) = g\big(f(u)\big)$. Soient $u, v \in E$. Alors,

$$g \circ f(u+v) = g\big(f(u+v)\big) = g\big(f(u)+f(v)\big) = g\big(f(u)\big)+g\big(f(v)\big) = g \circ f(u) + g \circ f(v).$$

De même, soient $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors,

$$g \circ f(\lambda u) = g\big(f(\lambda u)\big) = g\big(\lambda f(u)\big) = \lambda g\big(f(u)\big) = \lambda g \circ f(v).$$

$\square$

Remarque. Soient $f : E \to F$ une application linéaire avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors, f est **entièrement déterminée par l'image des vecteurs de la base de** E. En effet, tout vecteur $x \in E$ se décompose de façon unique sur les e_i :

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$$

donc pour trouver l'image de x par f, il suffit d'utiliser la linéarité de f sur cette égalité :

$$f(x) = f(x_1 e_2 + \ldots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + \ldots + x_n f(e_n)$$

et on voit bien qu'il suffit de connaître $f(e_1), \ldots, f(e_n)$. Par exemple, si on se donne $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$\left\{ \begin{array}{lclcc} f(e_1) & = & f(1,0,0) & = & (1,2,0) \\ f(e_2) & = & f(0,1,0) & = & (0,-3,-2) \\ f(e_3) & = & f(0,0,1) & = & (0,4,3) \end{array} \right.$$

alors on peut calculer l'expression générale de f, c'est à dire donner $f(X)$ pour **n'importe quel** $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. En effet, si $X \in \mathbb{R}^3$, alors il se décompose sur la base canonique (e_1, e_2, e_3) : $X = xe_1 + ye_2 + ze_3$. En utilisant la linéarité de f, on a

$$\begin{array}{rcl} f(X) & = & xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ & = & x(1,2,0) + y(0,-3,-2) + z(0,4,3) \\ & = & (x, 2x - 3y + 4z, -2y + 3z) \end{array}$$

d'où $f(x, y, z) = (x, 2x - 3y + 4z, -2y + 3z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

En particulier, on a la proposition suivante :

Proposition 4

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies avec $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soient $f, g : E \to F$ deux applications linéaires. Alors,

$$f(x) = g(x) \text{ pour tout } x \in E \quad \textbf{\textit{ssi}} \quad f(e_i) = g(e_i) \text{ pour tout } i = 1, \ldots, n.$$

Autrement dit, deux applications sont les mêmes partout ***ssi*** elles coïncident sur les vecteurs de base.

Démonstration.

Condition nécessaire. Si on suppose que $f(x) = g(x)$ pour n'importe quel $x \in E$, alors en particulier c'est vrai pour $x = e_i \in E$, donc les applications coïncident sur les vecteurs de base.

Condition suffisante. Supposons que $f(e_i) = g(e_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Soit $x \in E$. Alors, x se décompose sur les e_i :

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$$

et on appliquer f et g à cette égalité :

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} f(x) & = & f(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) & = & x_1 f(e_1) + \ldots + x_n f(e_n) \\ g(x) & = & g(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) & = & x_1 g(e_1) + \ldots + x_n g(e_n) \end{array} \right.$$

Alors, par hypothèse

$$f(x) = x_1 f(e_1) + \ldots + x_n f(e_n) = x_1 g(e_1) + \ldots + x_n g(e_n) = g(x),$$

donc on a bien $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in E$.

$\square$

1.2 Applications linéaires en géométrie

Définition 5

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. L'**homothétie** de rapport λ est l'application

$$h_\lambda : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ u & \mapsto & \lambda u \end{array}$$

Proposition 6

Les homothéties sont des applications linéaires (et même des endomorphismes).

Démonstration. Soit h_λ une homothétie de E et soient $u, v \in E$, $a, b \in \mathbb{K}$. Alors

$$h_\lambda(au + bv) = \lambda(au + bv) = \lambda au + \lambda bv = ah_\lambda(u) + bh_\lambda(v).$$

$\square$

Remarque. Soit $u_0 \neq 0$ est un vecteur de E un $\mathbb{K}$-ev. La **translation** de vecteur u_0 définie par

$$t_{u_0} : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ u & \mapsto & u + u_0 \end{array}$$

n'est pas une application linéaire. En effet, on a par exemple

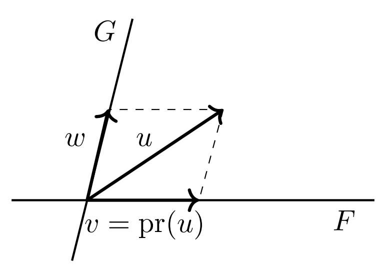
$$t_{u_0}(u + v) = (u + v) + u_0 \neq (u + u_0) + (v + u_0) = t_{u_0}(u) + t_{u_0}(v).$$

Noter également que $t_{u_0}(0) \neq 0$.

Définition 7

Soient F et G deux sev d'un même $\mathbb{K}$-ev E. Supposons que F et G soient en somme directe dans E, *ie* $E = F \oplus G$. Alors, tout vecteur $u \in E$ se décompose **de manière unique** en $u = v + w$, avec $v \in F$ et $w \in G$. La **projection sur F parallèlement à G** est l'application

$$\mathrm{pr} : \begin{array}{rcl} E & \to & F \\ u = v + w & \mapsto & v \end{array}$$



Proposition 8

Les projections sont des applications linéaires.

Démonstration. Soit $\mathrm{pr} : E \to F$ une projection sur F parallèlement à G, avec $E = F \oplus G$.

i. Soit $u_1, u_2 \in E$. Alors, il existe $v_1, v_2 \in F$ et $w_1, w_2 \in G$ tels que $u_1 = v_1 + w_1$ et $u_2 = v_2 + w_2$. On a donc

$$\mathrm{pr}(u_1 + u_2) = \mathrm{pr}\left((v_1 + w_1) + (v_2 + w_2)\right) = \mathrm{pr}\left((v_1 + v_2) + (w_1 + w_2)\right) = v_1 + v_2 = \mathrm{pr}(u_1) + \mathrm{pr}(u_2).$$

ii. Soit $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, il existe $v \in F$ et $w \in G$, tels que $u = v + w$ et donc

$$\mathrm{pr}(\lambda u) = \mathrm{pr}(\lambda v + \lambda w) = \lambda v = \lambda\, \mathrm{pr}(u).$$

□

Remarque. Si $\mathrm{pr} : E \to F$ une projection sur F parallèlement à G avec $E = F \oplus G$ et qu'on suppose que $\mathrm{pr}(u) = 0$ pour un certain $u \in E$, alors $u \in G$. En effet, u s'écrit $v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$, donc

$$\mathrm{pr}(u) = 0 \iff v = 0 \iff u = w \iff w \in G.$$

Proposition 9

Si $\mathrm{pr} : E \to F$ une projection, alors $\mathrm{pr} \circ \mathrm{pr} = \mathrm{pr}$.

Démonstration. On doit montrer que, pour tout $u \in E$,

$$\mathrm{pr}\left(\mathrm{pr}(u)\right) = \mathrm{pr}(u).$$

Soit $u \in E$. Alors, il existe $v \in F$ et $w \in G$ tels que $u = v + w$. Ainsi,

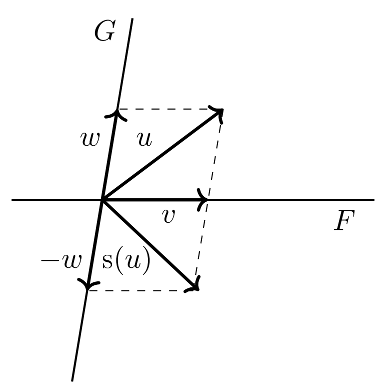
$$\mathrm{pr}\left(\mathrm{pr}(u)\right) = \mathrm{pr}(v) = v = \mathrm{pr}(u)$$

puisque $v \in F$. □

Définition 10

Soient F et G deux sev d'un même $\mathbb{K}$-ev E. Supposons que F et G soient en somme directe dans E, *ie* $E = F \oplus G$. Alors, tout vecteur $u \in E$ se décompose **de manière unique** en $u = v + w$, avec $v \in F$ et $w \in G$. La **symétrie par rapport à** F **dans la direction de** G est l'application

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{s} : & E & \to & E \\ & u = v + w & \mapsto & v - w \end{array}$$



Proposition 11

Les symétries sont des applications linéaires (et même des endomorphismes).

Démonstration. Soit $\mathrm{s} : E \to E$ un symétrie par rapport à F dans la direction de G, avec $E = F \oplus G$.

i. Soit $u_1, u_2 \in E$. Alors, il existe $v_1, v_2 \in F$ et $w_1, w_2 \in G$ tels que $u_1 = v_1 + w_1$ et $u_2 = v_2 + w_2$. On a donc

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{s}(u_1 + u_2) & = & \mathrm{s}\big((v_1 + w_1) + (v_2 + w_2)\big) \\ & = & \mathrm{s}\big((v_1 + v_2) + (w_1 + w_2)\big) \\ & = & (v_1 + v_2) - (w_1 + w_2) \\ & = & (v_1 - w_1) + (v_2 - w_2) \\ & = & \mathrm{s}(u_1) + \mathrm{s}(u_2). \end{array}$$

ii. Soit $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, il existe $v \in F$ et $w \in G$, tels que $u = v + w$ et donc

$$\mathrm{s}(\lambda u) = \mathrm{s}(\lambda v + \lambda w) = \lambda(v - w) = \lambda\, \mathrm{s}(u).$$

$\square$

Remarque. Soit $\mathrm{s} : E \to E$ un symétrie par rapport à F dans la direction de G avec $E = F \oplus G$ et soit $u = v + w \in E$ avec $v \in F$ et $w \in G$.

- Si $\mathrm{s}(u) = u$, alors $u \in F$ (en effet, dans ce cas $u = v$ et $w = 0$).
- Si $\mathrm{s}(u) = -u$, alors $u \in G$ (en effet, dans ce cas $u = w$ et $v = 0$).

Proposition 12

Si $\mathrm{s} : E \to E$ un symétrie, alors $\mathrm{s} \circ \mathrm{s} = \mathrm{id}_E$.

Démonstration. On doit montrer que, pour tout $u \in E$,

$$\mathrm{s}\big(\mathrm{s}(u)\big) = \mathrm{id}_E(u) = u.$$

Soit $u \in E$. Alors, il existe $v \in F$ et $w \in G$ tels que $u = v + w$. Ainsi,

$$\mathrm{s}\big(\mathrm{s}(u)\big) = \mathrm{s}(v - w) = \mathrm{s}(v) - \mathrm{s}(w) = v + w = u = \mathrm{id}_E(u)$$

puisque $v \in F$. $\square$

2 Image, noyau et isomorphisme

2.1 Rappels : injection, surjection et bijection

Rappel. Soit $f : E \to F$ une application de deux ensembles E et F.

i. f est **injective** si pour tous $x, y \in E$ tels que $x \neq y$, $f(x) \neq f(y)$ (tout élément de F admet **au plus** un antécédent par f dans E).

ii. f est **surjective** si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ (tout élément de F admet **au moins** un antécédent par f dans E).

iii. f est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective (tout élément de F admet **exactement** un antécédent par f dans E).

iv. Si $f : E \to F$ est bijective, alors il existe une **application inverse** ou **réciproque** $f^{-1} : F \to E$ telle que

$$\forall x \in E,\ f^{-1}\big(f(x)\big) = f\big(f^{-1}(x)\big) = x$$

et cette application est bien définie et bijective.

2.2 Applications linéaires injectives

Définition 13

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle **noyau** de f le sous-ensemble de E noté $\ker(f)$ et défini par

$$\ker(f) = \{x \in E,\ f(x) = 0\}.$$

Proposition 14

Le noyau d'une application linéaire est un espace vectoriel.

Démonstration. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Montrons que $\ker(f) \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E.

i. Comme f est linéaire, $f(0) = 0$ et donc $0 \in \ker(f)$.
ii. Soient $x, y \in \ker(f)$. Alors, $f(x+y) = f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0$ donc $x + y \in \ker(f)$.
iii. Soient $x \in \ker(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, $f(\lambda x) = \lambda f(x) = 0$ donc $\lambda x \in \ker(f)$.

□

Proposition 15

Une application linéaire $f : E \to F$ est injective ***ssi*** son noyau $\ker(f) = \{0\}$.

Démonstration.

Condition nécessaire. Supposons f injective et prenons $x \in \ker(f)$. Montrons que $x = 0$. Si $x \neq 0$, alors par hypothèse d'injectivité $f(x) \neq f(0)$ mais comme x est dans le noyau de f, $f(x) = 0$ donc le seul vecteur de $\ker(f)$ est 0 et donc $\ker(f) = \{0\}$.

Condition suffisante. Supposons $\ker(f) = \{0\}$ et montrons que f est injective. Soient $u_1 \neq u_2$ deux vecteurs de E. Si $f(u_1) = f(u_2)$, alors on aurait

$$f(u_1) - f(u_2) = 0 \iff f(u_1 - u_2) = 0 \iff u_1 - u_2 \in \ker(f)$$

donc en fait $u_1 - u_2 = 0$ soit $u_1 = u_2$. **Contradiction**. Ainsi, $f(u_1) \neq f(u_2)$ et f est bien injective.

□

Proposition 16

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev de et $f : E \to F$ une application linéaire injective. Si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille libre dans E, alors la famille $\big(f(u_1), \ldots, f(u_p)\big)$ est libre dans F.

Démonstration. Soit $\lambda_1 f(u_1) + \ldots + \lambda_p f(u_p) = 0$ une combinaison linéaire nulle des $f(u_i)$. Par linéarité de f, on a

$$f(\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p) = 0$$

donc $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p \in \ker(f) = \{0\}$ puisque f est injective, et donc

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p = 0.$$

Alors, comme la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre, on a bien $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$ donc la famille $\big(f(u_1), \ldots, f(u_p)\big)$ est libre dans F. □

Exemple 6. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z, t) = (x - y + z, 2x + 2y + 6z + 4t, -x - 2z - t).$$

Calculons le noyau de f. Par définition, on a

$$\begin{array}{rcl} \ker(f) & = & \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid f(x, y, z, t) = 0\} \\ & = & \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid (x - y + z, 2x + 2y + 6z + 4t, -x - 2z - t) = 0\} \end{array}$$

donc il s'agit de résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{ccccl} x & -y & +z & & = 0 \\ 2x & +2y & +6z & +4t & = 0 \\ -x & & -2z & -t & = 0 \end{array} \right.$$

On remarque que le système est formé de 3 équations pour 4 inconnues, donc on peut se douter qu'il admettra une infinité de solutions. près résolution du système, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{ccccl} x & -y & +z & & = 0 \\ & y & +z & +t & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & y - z \\ y & = & -z - t \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & -2z - t \\ y & = & -z - t \end{array} \right.$$

et donc

$$\begin{array}{rcl} \ker(f) & = & (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -2z - t \text{ et } y = -z - t\} \\ & = & (-2z - t, -z - t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\} \\ & = & z(-2, -1, 1, 0) + t(-1, -1, 0, 1) \mid z, t \in \mathbb{R}\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

On a donc trouvé une famille génératrice du noyau contenant deux vecteurs. De plus, on peut vérifier qu'ils sont libres dans $\mathbb{R}^4$, donc qu'il forme une base de $\ker(f)$. En particulier, $\dim \ker(f) = 2$.

2.3 Applications linéaires surjectives

Définition 17

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle **image** de f le sous-ensemble de F noté $\mathrm{Im}(f)$ ou parfois $f(E)$ et défini par

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{f(u) \mid u \in E\} = \{v \in F,\ \exists u \in U \text{ tel que } v = f(u)\}.$$

De plus, on appelle **rang** de f et on note $\mathrm{rg}(f)$ la dimension de l'image de f :

$$\dim \mathrm{Im}(f) = \mathrm{rg}(f).$$

Proposition 18

L'image d'une application linéaire est un espace vectoriel.

Démonstration. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Montrons que $\mathrm{Im}(f) \subset F$ est un sous-espace vectoriel de F.

i. $0 \in F$ et comme f est linéaire, il existe $u \in E$ $(u = 0)$ tel que $f(u) = 0$ donc $0 \in \mathrm{Im}(f)$.

ii. Soient $v_1, v_2 \in \mathrm{Im}(f)$. Alors, il existe $u_1, u_2 \in E$ tels que $v_1 = f(u_1)$ et $v_2 = f(u_2)$ donc

$$v_1 + v_2 = f(u_1) + f(u_2) = f(u_1 + u_2) \in \mathrm{Im}(f).$$

iii. Soient $v \in \mathrm{Im}(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, il existe $u \in E$ tel que $v = f(u)$ donc $\lambda v = \lambda f(u) = f(\lambda u) \in \mathrm{Im}(f)$.

□

Proposition 19

Une application linéaire $f : E \to F$ est surjective ***ssi*** son image $\mathrm{Im}(f) = F$.

Démonstration.

Condition nécessaire. Supposons f surjective et montrons que $\mathrm{Im}(f) = F$. On a déjà montré que $\mathrm{Im}(f)$ est un sev de F donc en particulier $\mathrm{Im}(f) \subset F$. Montrons l'inclusion inverse. Soit $v \in F$. Comme f est surjective, il existe $u \in E$ tel que $f(u) = v$ donc par définition $v \in \mathrm{Im}(f)$, d'où $F \subset \mathrm{Im}(f)$ et on a l'égalité.

Condition suffisante. Supposons $\mathrm{Im}(f) = F$ et soit $v \in F$. En particulier, $v \in \mathrm{Im}(f)$ donc il existe $u \in E$ tel que $f(u) = v$ donc par définition f est surjective.

□

Proposition 20

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev de et $f : E \to F$ une application linéaire surjective. Si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille génératrice de E, alors la famille $\big(f(u_1), \ldots, f(u_p)\big)$ est génératrice de F.

Démonstration. Soit $v \in F$. Comme f est surjective, il existe $u \in E$ tel que $v = f(u)$ et comme la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est génératrice, on a

$$u = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p.$$

Alors, par linéarité de f, on a

$$f(u) = v = \lambda_1 f(u_1) + \ldots + \lambda_p f(u_p)$$

donc tout vecteur de F se décompose sur les $f(u_i)$, donc la famille $\big(f(u_1), \ldots, f(u_p)\big)$ est génératrice. □

Proposition 21

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f : E \to F$ une application linéaire. Si $U = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est une partie de E, alors $f(U) = \text{Vect}\big(f(u_1), \dots, f(u_n)\big)$.
En particulier, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $E = \text{Vect}\,(e_1, \dots, e_n)$ et

$$\text{Im}(f) = f(E) = \text{Vect}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big).$$

On obtient aisément une famille génératrice de l'image de f, ce qui permet donc d'en extraire une base.

Démonstration. On montre l'égalité par double inclusion.

- $\subset$ Soit $v \in f(U)$. Alors, il existe un $u \in U$ tel que $f(u) = v$. Comme $u \in U = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$, on peut décomposer u : $u = x_1u_1 + \ldots + x_nu_n$ donc en fait $f(u) = x_1f(u_1) + \ldots + x_nf(u_n)$ donc $v \in \text{Vect}\big(f(u_1), \dots, f(u_n)\big)$ d'où $f(U) \subset \text{Vect}\big(f(u_1), \dots, f(u_n)\big)$.
- $\supset$ Soit $v \in \text{Vect}\big(f(u_1), \dots, f(u_n)\big)$, alors v est combinaison linéaire des $f(u_1), \dots, f(u_n)$. L'image d'un sev par une application linéaire est un sev, donc l'ensemble $f(U)$ est un sev de F et en particulier $v \in f(U)$ d'où l'inclusion réciproque et l'égalité.

$\square$

Exemple 7. Reprenons l'application f de l'exemple 7 : pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a

$$f(x, y, z, t) = (x - y + z, 2x + 2y + 6z + 4t, -x - 2z - t).$$

Calculons l'image de f. Par définition, on a

$$\text{Im}(f) = f(\mathbb{R}^4) = \{f(x, y, z, t) \mid (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\}.$$

De plus, d'après le lemme et la remarque précédente, on sait que

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}\,(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$$

donc on a seulement besoin de calculer l'image des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On a

$$\left\{\begin{array}{lllll} f(e_1) & = & f(1,0,0,0) & = & (1,2,-1) \\ f(e_2) & = & f(0,1,0,0) & = & (-1,2,0) \\ f(e_3) & = & f(0,0,1,0) & = & (1,6,-2) \\ f(e_4) & = & f(0,0,0,1) & = & (0,4,-1) \end{array}\right.$$

d'où

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

donc on obtient une famille génératrice de l'image de f constituée de 4 vecteurs. On peut donc en extraire une base : en faisant les calculs, on voit que la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$ est liée, donc on peut en extraire une famille libre en enlevant au moins un vecteur. A nouveau en faisant les calculs, on obtient que quelque soit le vecteur qu'on enlève, la famille de trois vecteurs restants est encore liée. En enlevant cette fois-ci deux vecteurs, par exemple $f(e_3)$ et $f(e_4)$, on obtient une famille libre à deux éléments dans $\mathbb{R}^4$, elle forme donc une base de $\text{Im}(f)$. En particulier, $\dim \text{Im}(f) = \text{rg}(f) = 2$.

Remarque. Une autre façon de voir que la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$ est liée est de calculer directement le rang de cette famille en écrivant la matrice constituée de ces 4 vecteurs, à savoir

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

et de l'**échelonner** (pivot de Gauss), de telle sorte à obtenir la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est bien de rang 2. Ainsi, on sait directement que $\dim \mathrm{Im}(f) = \mathrm{rg}(f) = 2$ donc une base de $\mathrm{Im}(f)$ sera constituée de seulement 2 vecteurs (qu'on extrait de la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$).

2.4 Isomorphismes d'espaces vectoriels

Définition 22

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f : E \to F$ une application. On dit que :

i. f est un **isomorphisme** si f est linéaire et bijective. Dans ce cas, on dit que E et F sont **isomorphes** et on note $E \cong F$.

ii. f est un **automorphisme** si f est un isomorphisme et un endomorphisme (*ie* si $E = F$).

Proposition 23

Si $f : E \to F$ est un isomorphisme, alors l'application réciproque $f^{-1} : F \to E$ est aussi un isomorphisme.

Démonstration. On sait que si f est bijective, alors f^{-1} l'est aussi. Il suffit donc de montrer qu'elle est aussi linéaire.

i. Soient $y_1, y_2 \in F$. Notons $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$ les images de y_1, y_2 par f^{-1}. Alors, on a $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$ et puisque f est linéaire,

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = y_1 + y_2.$$

Composons par f^{-1} :

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}\big(f(x_1 + x_2)\big) & = & f^{-1}(y_1 + y_2)\big) \\ x_1 + x_2 & = & f^{-1}(y_1 + y_2) \\ f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2) & = & f^{-1}(y_1 + y_2) \end{array}$$

et la dernière égalité nous donne l'additivité f^{-1}.

ii. Soient $y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. A nouveau, notons $x = f^{-1}(y)$ l'image de y par f^{-1}. Alors, la linéarité de f donne $f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda y$ et en composant par f^{-1}, on obtient

$$\lambda x = \lambda f^{-1}(y) = f^{-1}(\lambda y)$$

et on obtient la linéarité de f.

□

Théorème 24

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f : E \to F$ une application linéaire. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors, f est un isomorphisme ***ssi*** $\big(f(e_1, \ldots, f(e_n)\big)$ est une base de F.

Démonstration.

Condition nécessaire. La proposition 16 nous dit qu'une application linéaire injective transporte une famille libre sur une famille libre, et la proposition 20 nous dit qu'une application linéaire surjective transporte une famille génératrice sur une famille génératrice. Ainsi, si f est un isomorphisme, elle est bijective et donc transporte bien une base de E sur une base de F.

Condition suffisante. Supposons que $\mathcal{F} = \big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$ soit une base F et montrons que f est un isomorphisme. Par définition, f est linéaire donc il suffit de montrer qu'elle est bijective.

i. Montrons que f est injective. Soit $u \in \ker(f)$. Alors, $f(u) = 0 = f(0)$. Mais u est aussi un élément de E donc u se décompose sur la base de E : $u = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ donc

$$0 = f(u) = x_1 f(e_1) + \ldots + x_n f(e_n)$$

est une décomposition linéaire nulle des éléments de la base $\mathcal{F}$, donc en fait $x_1 = \ldots = x_n = 0$ et $u = 0$, soit $\ker(f) = \{0\}$.

ii. Montrons que f est surjective. Soit $v \in F$, et on cherche un vecteur $u \in E$ tel que $v = f(u)$. Comme $\mathcal{F}$ est une base de F, v se décompose

$$v = x_1 f(e_1) + \ldots + x_n f(e_n) = f(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n)$$

donc il suffit de prendre $u = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \in E$.

□

Proposition 25

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors, E et F sont isomorphes ***ssi*** ils sont de même dimension :

$$E \cong F \quad \textbf{\textit{ssi}} \quad \dim E = \dim F.$$

Démonstration.

Condition nécessaire. Supposons E et F isomorphes. Par définition, il existe un isomorphisme $f : E \to F$. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E avec $n = \dim E$. Alors, d'après le théorème 24, la famille $\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$ est une base de F qui compte n vecteurs, donc $\dim F = n = \dim E$.

Condition suffisante. Supposons que $\dim E = \dim F = n$. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. Construisons un isomorphisme f entre E et F. Commençons par noter f l'application définie par

$$f(e_1) = f_1, \ldots, f(e_n) = f_n.$$

Alors, f est bien définie et f est linéaire : en effet, toute application linéaire est entièrement déterminée par l'image des vecteurs de base. De plus, on sait que $\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$ est une base de F donc d'après le théorème 24, f est bijective donc c'est bien un isomorphisme et E et F sont isomorphes.

$\square$

Proposition 26

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie qui se décompose en somme directe de deux sev F et G : $E = F \oplus G$.

i. Les symétries par rapport à F dans la direction de G sont des isomorphismes.

ii. En dehors de l'identité (projection de E sur E parallèlement à $\{0\}$), les projections sur F parallèlement à G ne sont pas des isomorphismes.

Démonstration. i. Soit $\mathrm{s} : E \to E$ une symétrie. Pour tout $u = v + w \in E = F + G$, on a $\mathrm{s}(u) = v - w$. Une base de $E = F \oplus G$ est donnée par $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ où $(f_1, \dots, f_p)$ est une base de F et $(g_1, \dots, g_q)$ est une base de G. Alors,

$$\big(\mathrm{s}(f_1), \dots, \mathrm{s}(f_p), \mathrm{s}(g_1), \dots, \mathrm{s}(g_q)\big) = (f_1, \dots, f_p, -g_1, \dots, -g_q)$$

est encore une base de E donc d'après le théorème 24, s est un isomorphisme.

ii. Soit $\mathrm{pr} : E \to F$ une projection. Pour tout $u = v + w \in E = F + G$, on a $\mathrm{pr}(u) = v$. Alors, pour tout vecteur $w \in G$, on a $\mathrm{pr}(w) = 0$ donc $w \in \ker(\mathrm{pr})$ et en particulier, $G \subset \ker(\mathrm{pr})$ soit $\ker(\mathrm{pr}) \neq \{0\}$ donc pr n'est pas injective et ne peut donc pas être un isomorphisme.

$\square$

3 Applications linéaires et espaces vectoriels

3.1 Théorème du rang

Proposition 27

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors,

i. $\dim \mathrm{Im}(f) \leq \dim F$

ii. $\dim \mathrm{Im}(f) \leq \dim E$

Démonstration.

i. $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F, donc en particulier $\mathrm{Im}(f) \subset F$ et donc $\dim \mathrm{Im}(f) \leq \dim F$.

ii. Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On utilise le lemme 21 et la remarque **??**, qui nous disent que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$$

, donc $\mathrm{Im}(f)$ possède une famille génératrice de n vecteurs. On peut donc en extraire une base qui contraindra au plus n vecteurs, donc $\dim \mathrm{Im}(f) \leq n = \dim E$.

$\square$

Théorème 28 (Théorème du rang)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors,

$$\dim E = \dim \ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f).$$

Démonstration. L'espace $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E. Il admet donc un supplémentaire, notons le S. On a donc

$$\ker(f) \oplus S = E.$$

En particulier, $\dim \ker(f) + \dim S = \dim E$. De plus, notons $g : S \to F$ l'application (appelée **restreinte** de f à S)à définie par :

$$\begin{array}{rccc} g: & S & \to & \mathrm{Im}(f) \subset F \\ & u \mapsto & f(u) & \end{array}$$

Montrons que g est un isomorphisme entre S et $\mathrm{Im}(f)$, car on aura alors $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim S$.

i. Montrons que g est injective, *ie* $\ker(g) = \{0\}$. Soit $u \in S$ tel que $g(u) = 0$ ($u \in \ker(g)$). Sur l'espace S, $f = g$ donc en fait $g(u) = f(u) = 0$ donc $u \in \ker(f)$. Ainsi, $u \in \ker(f) \cap S = \{0\}$ puisque $\ker(f) \oplus S = E$, donc $u = 0$ et $\ker(g) = 0$ donc g est injective.

ii. Montrons que g est surjective, *ie* $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f)$. Par double inclusion : soit $v \in \mathrm{Im}(g)$, alors il existe $u \in S \subset E$ tel que $f(u) = v$ donc en particulier $v \in \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f)$. De même, soit $v \in \mathrm{Im}(f)$. Alors, il existe $u \in E$ tel que $v = f(u)$. Comme $u \in E = \ker \oplus S$, on a $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in \ker(f)$ et $u_2 \in S$ donc

$$v = f(u) = f(u_1) + f(u_2) = 0 + f(u_2) = g(u_2) \text{ car } u_2 \in S.$$

Ainsi, $v = g(u_2)$ donc $v \in \mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f)$, d'où l'égalité et la surjectivité de g.

Ainsi, g est bien un isomorphisme entre S et $\mathrm{Im}(f)$ donc en particulier $\dim S = \dim \mathrm{Im}(f)$. Comme $E = \ker(f) \oplus S$, on a finalement

$$\dim E = \dim \ker(f) + \dim S = \dim \ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f).$$

□

Remarque. Attention ! Ce n'est pas parce qu'on a l'égalité de dimension

$$\dim E = \dim \ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$$

que $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$! En effet, $\ker(f)$ est un sev de E mais $\mathrm{Im}(f)$ est un sev de F donc ils ne peuvent pas être en somme directe. En revanche, on sait qu'il existe un sev S de E tel que $S \cong im(f)$ et $E = \ker(f) \oplus S$, comme dans la preuve.

Exemple 8. Si on reprend l'application linéaire des exemples 6 et 7 :

$$f(x, y, z, t) = (x - y + z, 2x + 2y + 6z + 4t, -x - 2z - t) \text{ pour tout } (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$$

alors grâce au théorème du rang on peut se limiter au calcul du noyau pour connaître la dimension de l'image (et vice-versa). En effet, on a calculé que $\dim \ker(f) = 2$, donc d'après le théorème du rang

$$\dim \mathbb{R}^4 = 4 = \dim ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = 2 + \dim \mathrm{Im}(f)$$

donc on retrouve bien $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$, et on sait directement qu'une base de $\mathrm{Im}(f)$ sera constituée de seulement 2 vecteurs parmi ceux de la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$ (sans avoir besoin d'échelonner une matrice ou de résoudre un système de plus).

Théorème 29

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire.

i. Si $\dim E \neq \dim F$, alors f n'est pas bijective.

ii. Si $\dim E = \dim F$, alors f est bijective ***ssi*** f est surjective ***ssi*** f est injective.

Démonstration.

i. Supposons que $\dim E \neq \dim F$. Montrons par l'absurde que f ne peut pas être bijective. En effet, si c'était le cas, alors on aurait en particulier $\ker(f) = \{0\}$ (f injective) donc $\dim\ker(f) = 0$, mais aussi $\mathrm{Im}(f) = F$ (f surjective) donc $\dim\mathrm{Im}(f) = \dim F$. D'après le théorème du rang,

$$\dim E = \dim\ker(f) + \dim\mathrm{Im}(f) = 0 + \dim F = \dim F.$$

Contradiction. Ainsi, f n'est pas bijective.

ii. Supposons que $\dim E = \dim F$. Montrons d'abord que f est surjective ***ssi*** f est injective.

Condition nécessaire. Supposons f surjective et montrons que $\ker(f) = \{0\}$. Comme f est surjective, on a $\mathrm{Im}(f) = F$ donc $\dim\mathrm{Im}(f) = \dim F$ et donc d'après le théorème du rang,

$$\dim E = \dim\ker(f) + \dim F$$

mais comme $\dim F = \dim E$ par hypothèse, on doit avoir $\dim\ker(f) = 0$ ce qui revient à dire que $\ker(f) = \{0\}$. Ainsi, f est injective.

Condition suffisante. Supposons f injective et montrons que $\mathrm{Im}(f) = F$. Par hypothèse, on a $\dim\ker(f) = 0$ donc d'après le théorème du rang, on a

$$\dim F = \dim E = \dim\mathrm{Im}(f)$$

donc $\mathrm{Im}(f)$ est un sev de F de même dimension, donc en fait $\mathrm{Im}(f) = F$ et f est surjective.

On a donc montré que si $\dim E = \dim F$, alors si f est injective, f est surjective et donc bijective et de même, si f est surjective alors elle est injective et donc bijective. Ainsi, si $\dim E = \dim F$, on a aussi f bijective et d'après le premier point du théorème, on a l'implication réciproque (f bijective implique $\dim E = \dim F$), ce qui achève de démontrer le théorème.

□

3.2 Cas particulier : les formes linéaires

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. On rappelle qu'une **forme linéaire** sur E est une application linéaire à valeur dans le corps de base $\mathbb{K}$, *ie* $f : E \to \mathbb{K}$.

Proposition 30

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et $f : E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire non nulle.

$$\dim\mathrm{Im}(f) = 1 \text{ et } \dim\ker(f) = n - 1.$$

Démonstration. L'image de f est un sev de l'espace d'arrivée $\mathbb{K}$, et $\dim\mathbb{K} = 1$. Ainsi, les seuls sev possibles de $\mathbb{K}$ sont $\{0\}$ ou $\mathbb{K}$. Comme f est non nulle, l'image de f contient au moins un élément donc $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$, d'où $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}$ et $\dim\mathrm{Im}(f) = \dim\mathbb{K} = 1$. Ainsi, par le théorème du rang, on a

$$\dim\ker(f) = \dim E - \dim\mathrm{Im}(f) = n - 1.$$

□

Corollaire 31

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $a_1, \ldots, a_n$ des scalaires dans $\mathbb{K}$. On pose S l'ensemble des solutions de l'équation $a_1 x1 + \ldots + a_n x_n = 0$:

$$S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K} \mid a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n\}.$$

Alors, $\dim S = n - 1$.

Démonstration. Il faut voir S comme le noyau d'une forme linéaire non nulle. En effet, considérons l'application φ définie par

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E & \to & \mathbb{K} \\ & u & \mapsto & a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n \end{array}$$

où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de u dans une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. Alors, φ est une forme linéaire non nulle et par définition,

$$\begin{array}{rcl} \ker(\varphi) & = & \{u \in E, \varphi(u) = 0\} \\ & = & \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}, a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0\} \\ & = & S \end{array}$$

donc la propriété précédente nous dit que $\dim \ker(\varphi) = \dim S = n - 1$. $\square$