Université de Strasbourg
Math-Eco - 2021/2022
Algèbre linéaire S2 - Printemps 2022
Victoria Callet - *victoria.callet@math.unistra.fr*

Chapitre 4 : Matrices et applications linéaires

Dans tout le chapitre, on considère des espaces vectoriels de **dimension finie** sur le corps $\mathbb{K}$.

1 Matrice d'une application linéaire

1.1 Une application linéaire est une matrice

Rappel. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev avec $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$. Prenons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_p)$ une base de F. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Les images par f des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ se décomposent sur les éléments de la base $\mathcal{B}'$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(e_1) & = & a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \ldots + a_{p1}e'_p \\ f(e_2) & = & a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + \ldots + a_{p2}e'_p \\ & \vdots & \\ f(e_n) & = & a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + \ldots + a_{pn}e'_p \end{array}\right.$$

Définition 1

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev avec $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$. On appelle **matrice** de f dans les bases $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_p)$ la matrice notée $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ dans la base $(e'_1, \ldots, e'_p)$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(e_1) & = & a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \ldots + a_{p1}e'_p \\ f(e_2) & = & a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + \ldots + a_{p2}e'_p \\ & \vdots & \\ f(e_n) & = & a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + \ldots + a_{pn}e'_p \end{array}\right. \iff M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

Remarques.

i. La matrice d'une application linéaire dépend clairement du choix des base $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
ii. Une application linéaire est donc **entièrement déterminée par l'image des vecteurs de base**.
iii. Si f est un endomorphisme de E, alors on prend $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ une base de E on note $M_{\mathcal{B}}(f)$.

Exemple 1. Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathbb{R}^2$. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (e'_1, e'_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Considérons $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - y, z - y) \end{array}$$

On a alors

$$\left\{\begin{array}{lcccccl} f(e_1) & = & f(1,0,0) & = & (1,0) & = & e'_1 \\ f(e_2) & = & f(0,1,0) & = & (-1,-1) & = & -e'_1 - e'_2 \\ f(e_3) & = & f(0,0,1) & = & (0,1) & = & e'_2 \end{array}\right.$$

et on obtient ainsi la matrice de f :

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions respectives n et p. On munit E d'une base $\mathcal{B}$ et F d'une base $\mathcal{B}'$. On note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. Alors, l'application qui a une application linéaire associe sa matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$

$$\begin{array}{rccc} M : & \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathcal{K}) \\ & f & \mapsto & M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \end{array}$$

est un **isomorphisme d'espaces vectoriels**. Autrement dit, **il est équivalent de se donner une application linéaire et une matrice** : à toute application linéaire est associée une matrice et à toute matrice est associée une application linéaire.

1.2 Opérations sur les applications linéaires et les matrices

1.2.1 Somme et multiplication par un scalaire

Proposition 3

Soient $f, g : E \to F$ deux applications linéaires avec $M(f)$ et $M(g)$ leurs matrices respectives dans des bases fixées. Alors, dans ces mêmes bases,

- $f + g$ a pour matrice $M(f) + M(g)$
- λf a pour matrice $\lambda M(f)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Démonstration. C'est immédiat, puisque sur les vecteurs de bases on a

$$\begin{array}{rcl} (f+g)(e_j) & = & f(e_j) + g(e_j) \\ (\lambda f)(e_j) & = & \lambda\big(f(e_j)\big) \end{array}$$

et ces deux lignes se traduisent de la même manière sur les matrices. □

1.2.2 Calcul de l'image d'un vecteur

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Si $x \in E$, alors on sait que x se décompose sur la base $\mathcal{B}$ de façon unique :

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$$

où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les **coordonnées** de x dans $\mathcal{B}$. Alors, on peut noter $X = M_{\mathcal{B}}(x)$ la **matrice coordonnées** de x dans la base $\mathcal{B}$:

$$X = M_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, X est le vecteur colonne des composantes de x dans $\mathcal{B}$.

Proposition 4

Soient $f : E \to F$ une application linéaire avec $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Notons M la matrice de f dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Si $x \in E$ est un vecteur de E et X est la matrice de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, alors la matrice Y des coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}'$ est donnée par

$$M_{\mathcal{B}'}(f(x)) = Y = MX = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\ M_{\mathcal{B}}(x).$$

Démonstration. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_p)$ une base de F. Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ celle des coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Alors, en particulier on a

$$\begin{array}{rcl} x & = & x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \\ f(x) & = & y_1 f_1 + \ldots + y_p f_p \end{array}$$

et par linéarité

$$f(x) = x_1 f(e_1) + \ldots + x_n f(e_n).$$

Notons $M = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = (m_{ij})_{j,j} \in \mathcal{M}_{p,n}$. Par définition, la $j^{\text{ième}}$ colonne de M est formée des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$. En particulier, $f(e_j)$ a pour coordonnées $(m_{1,j}, \ldots, m_{p,j})$ dans $\mathcal{B}'$, donc $f(x)$ a pour coordonnées

$$x_1 \begin{pmatrix} m_{11} \\ \vdots \\ m_{p1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} m_{12} \\ \vdots \\ m_{p2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} m_{1n} \\ \vdots \\ m_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 m_{11}+ & \ldots & +x_n m_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 mp1+ & \ldots & +x_n m_{pn} \end{pmatrix} = MX$$

Par ailleurs, $f(x)$ a aussi pour coordonnées le vecteur Y, donc en fait

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 m_{11}+ & \ldots & +x_n m_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 mp1+ & \ldots & +x_n m_{pn} \end{pmatrix} = MX$$

donc on a bien $Y = MX$ et $M_{\mathcal{B}'}(f(x)) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\ M_{\mathcal{B}}(x)$. □

Exemple 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y) = (0, 2x + y, x + 3y).$$

On a $f(1, 0) = (0, 2, 1)$ et $f(0, 1) = (0, 1, 3)$, donc dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, la matrice de f est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit u le vecteur de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Alors, $f(u) = f(1, 2) = (0, 4, 4)$. Notons Y la matrice coordonnées de $f(u)$. Alors, on retrouve ce résultat en calculant le produit matriciel

$$MX = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = Y.$$

1.2.3 Composition et produit matriciel

Proposition 5

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies avec $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F, $\mathcal{D}$ une base de G. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. Alors, $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G et sa matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ est donnée par

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = M_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)\ M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$

Démonstration. Il s'agit en fait de montrer que, pour n'importe quel $x \in E$, on a

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f)\ M_{\mathcal{B}}(x) = M_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)\ M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\ M_{\mathcal{B}}(x).$$

Soit donc $x \in E$ un vecteur quelconque dont on note $M_{\mathcal{B}}(x)$ la matrice de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Alors, en appliquant la proposition 4 successivement au vecteur $f(x) \in F$ puis au vecteur $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) M_{\mathcal{B}}(x) &= M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}\big(g \circ f(x)\big) \\ &= M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}\Big(g\big(f(x)\big)\Big) \\ &= M_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)\ M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\big(f(x)\big) \\ &= M_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g)\ M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)\ M_{\mathcal{B}}(x) \end{aligned}$$

ce qui donne bien l'égalité attendue. □

Exemple 3. On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ deux applications linéaires dont les matrices dans les bases canoniques $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de $\mathbb{R}^3$ sont données respectivement par

$$A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors, on peut décrire entièrement l'application $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dans la base $\mathcal{B}$ (c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$) en calculant le produit matriciel BA :

$$M_{\mathcal{B}}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g)\ M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

En particulier $\big(g \circ f\big)(e_1) = e_1 + 4e_2 = (1, 4)$ et $\big(g \circ f\big)(e_2) = -e_1 + 5e_2 = (-1, 5)$, donc on récupère l'expression générale de l'application $g \circ f$: pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$g \circ f(x, y) = x\big(g \circ f\big)(e_1) + y\big(g \circ f\big)(e_2) = (x - y, 4x + 5y).$$

1.2.4 Matrice d'endomorphismes

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. On rappelle qu'un **endomorphisme de** E est une application linéaire $f : E \to E$ (l'espace de départ est le même que l'espace d'arrivé). En particulier, la matrice de f (dans n'importe quelle base de E) est une matrice **carrée**, donc on peut calculer le produit de cette matrice avec elle-même, ce qui revient d'après la proposition 5 à composer l'application f avec elle-même.

Proposition 6

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E et f un endomorphisme de E. On note $M_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. On note f^k l'application f composée k fois avec elle-même : $f^k = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$. Alors, on a

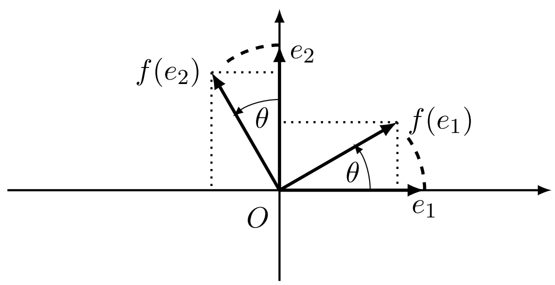
$$M_{\mathcal{B}}(f^2) = M_{\mathcal{B}}(f \circ f) = M_{\mathcal{B}}(f)\ M_{\mathcal{B}}(f)$$

et par récurrence pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$M_{\mathcal{B}}(f^k) = M_{\mathcal{B}}(\underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}) = \big(M_{\mathcal{B}}(f)\big)^k.$$

Démonstration. La première ligne découle directement de la proposition 5 et la deuxième s'obtient par une simple récurrence sur k. □

Exemple 4. On se place dans $\mathbb{R}^2$ que l'on munit de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et on considère la **rotation de centre** O **et d'angle** θ que l'on note f et qu'on représente par le schéma suivant :



En regardant le dessin, on trouve facilement les coordonnées de $f(e_1)$ et $f(e_2)$ dans la base canonique (e_1, e_2) et on obtient la matrice de f dans cette base :

$$\begin{cases} f(e_1) = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2 \\ f(e_2) = -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2 \end{cases} \iff M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Alors, la composition $f \circ f$ est donnée par

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}(f \circ f) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & -2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ 2\cos(\theta)\sin(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc en fait f^2 est la rotation de centre O et d'angle 2θ. Par récurrence, on trouve que l'application f^k est donnée par

$$M_{\mathcal{B}}(f^k) = \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix}$$

soit f^k est la rotation de centre O et d'angle $k\theta$.

1.2.5 Matrice d'isomorphismes et d'automorphismes

Proposition 7

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de **même dimension** n avec $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors, f est un isomorphisme (*ie* f est bijective) ***ssi*** la matrice $M(f)_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible. De plus,

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = \big(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\big)^{-1}.$$

Démonstration. Si f est bijective, alors l'application réciproque f^{-1} existe et par définition, $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$. En particulier, on a

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f^{-1} \circ f) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = I_n$$

et d'après la proposition 5,

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f^{-1} \circ f) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = I_n.$$

De même, en prenant $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$, on obtient

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f \circ f^{-1}) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = I_n$$

donc on a bien l'inverse à droite et à gauche, ainsi que la formule $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f^{-1}) = \big(M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)\big)^{-1}$. $\square$

Exemple 5. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'application linéaire f définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = (x + y + 3z, y + 2z, z).$$

En calculant le noyau de f, on trouve aisément que $\ker(f) = \{(0, 0, 0)\}$, donc f est injective et, comme f est un endomorphisme en dimension finie, f est bijective. On peut donc chercher l'inverse f^{-1}. Pour cela, donnons la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(1,0,0) & = & (1,0,0) \\ f(0,1,0) & = & (1,1,0) \\ f(0,0,1) & = & (3,2,1) \end{array}\right. \iff M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors, en calculant d'après la proposition précédente

$$M_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = M_{\mathcal{B}}(f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'inverse de f est donnée sur chaque vecteur de la base canonique par

$$\left\{\begin{array}{lcl} f^{-1}(e_1) & = & (1,0,0) \\ f^{-1}(e_2) & = & (-1,1,0) \\ f^{-1}(e_3) & = & (-1,-2,1) \end{array}\right.$$

donc on peut retrouver l'expression de f^{-1} pour n'importe quel $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$f^{-1}(x, y, z) = x f^{-1}(e_1) + y f^{-1}(e_2) + z f^{-1}(e_3) = (x - y - z, y - 2z, z).$$

Remarque. Attention : cette proposition 7 nous dit en particulier qu'on ne peut avoir un isomorphisme que si E et F sont de même dimensions, ce qui revient à dire que la matrice de f est **carrée** (en effet, on ne peut pas inverser une matrice qui ne serait pas carrée). En particulier, si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$ et $f : E \to F$ est un isomorphisme, alors on a obligatoirement $n = m$ et donc en fait, f est un **automorphisme** de $\mathbb{R}^n$ (f est un endomorphisme inversible).

On résume toutes les propriétés des **automorphismes** dans le théorème suivant :

Théorème 8 (Automorphisme)

Soit f un endomorphisme de E, avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et $\mathcal{B}$ une base de E. Notons $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f dans cette base. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i. f est un isomorphisme.

ii. f est injective.

iii. $\ker(f) = \{0\}$.

iv. f est surjective.

v. $\mathrm{Im}(f) = E$.

vi. A est inversible ($AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$).

vii. A est inversible à gauche ($A^{-1}A = I_n$).

viii. A est inversible à droite ($AA^{-1} = I_n$).

ix. $\det A \neq 0$.

2 Changement de base

2.1 Matrice de passage

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Prenons **deux bases de ce même espace** : $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$. Alors, les vecteurs e'_i s'écrivent comme combinaisons linéaires des vecteurs e_i (et vice versa) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} e'_1 & = & p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + \dots + p_{n1}e_n \\ e'_2 & = & p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + \dots + p_{n2}e_n \\ & \vdots & \\ e'_n & = & p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + \dots + p_{nn}e_n \end{array}\right.$$

Définition 9

On appelle **matrice de passage** de la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ à la base $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ la matrice notée $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs e'_i de $\mathcal{B}'$ exprimés dans la base $\mathcal{B}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} e'_1 & = & p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + \dots + p_{n1}e_n \\ e'_2 & = & p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + \dots + p_{n2}e_n \\ & \vdots & \\ e'_n & = & p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + \dots + p_{nn}e_n \end{array}\right. \iff P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple 6. Prenons $E=\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique. Posons e_1', e_2' et e_3' les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par

$$\begin{cases} e_1' &= (1,0,-1) \\ e_2' &= (0,1,1) \\ e_3' &= (1,0,1) \end{cases}$$

Alors, on peut vérifier que la famille (e_1',e_2',e_3') est une base de $\mathbb{R}^3$ (c'est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ qui possède trois vecteurs). Notons-la $\mathcal{B}'$. On peut exprimer les vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base canonique $\mathcal{B}$:

$$\begin{cases} e_1' &= 1e_1+0e_2-1e_3 \\ e_2' &= 0e_1+1e_2+1e_3 \\ e_3' &= 1e_1+0e_2+1e_3 \end{cases}$$

et donc la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est donnée par les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$ (en colonne), soit :

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque. La matrice de passage entre deux bases correspond en fait à la matrice de l'application identité exprimée dans ces deux bases (**attention à l'inversion de l'ordre des bases**) :

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}=M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) \quad \text{et} \quad P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}=M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E)$$

En particulier, si $\mathcal{B}''$ est une troisième base de E, alors comme $\mathrm{id}_E\circ\mathrm{id}_E=\mathrm{id}_E$, en appliquant la proposition 5, on obtient

$$M_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)=M_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E\circ\mathrm{id}_E)=M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)\ M_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E)$$

soit

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}''}=P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''}.$$

De même, id_E est un automorphisme de E avec $\mathrm{id}_E^{-1}=\mathrm{id}_E$, donc en appliquant la proposition 7, on a

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}^{-1}=\left(M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)\right)^{-1}=M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E^{-1})=M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E)=P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}.$$

En résumé, on a les deux propriétés suivantes :

Proposition 10

Soit E un $\mathbb{K}$-ev que l'on munit de trois bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$. Alors, on a les propriétés suivantes :

i. La matrice de passage est la matrice de l'application identité : $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}=M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)$.

ii. Propriété de transitivité : $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}''}=P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}''}$.

iii. Les matrices de passage sont inversibles et on a : $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}^{-1}=P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$.

2.2 Changement de base et vecteurs

Proposition 11

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie que l'on munit de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Notons $P=P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Soit $x\in E$ un élément de E de matrices coordonnées $X=M_{\mathcal{B}}(x)$ dans la base $\mathcal{B}$ et $X'=M_{\mathcal{B}'}(x)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Alors, on a

$$X'=P^{-1}X \quad \text{et} \quad X=PX'.$$

Démonstration. Puisque la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est la matrice de l'application linéaire id_E dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ (cf proposition 2.1), il suffit d'appliquer la proposition 4 :

$$PX' = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)\ M_{\mathcal{B}'}(x) = M_{\mathcal{B}}\big(\mathrm{id}_E(x)\big) = M_{\mathcal{B}}(x) = X$$

d'où $PX' = X$ et, l'autre égalité s'obtient en multipliant celle-ci par P^{-1} :

$$P^{-1}X = P^{-1}PX' = X'.$$

□

Exemple 7. Prenons $E = \mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et d'une deuxième base $\mathcal{B}' = (e_1', e_2')$ définie par

$$\begin{cases} e_1' &= (2,1) \\ e_2' &= (3,2) \end{cases}$$

Notons $x \in E$ le vecteur de matrice coordonnées $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$, soit $x = 2e_1 + 3e_2$. On cherche à déterminer ses coordonnées X' dans la base $\mathcal{B}'$. En utilisant la proposition précédente, on a

$$X' = P^{-1}X$$

où $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Puisque

$$\begin{cases} e_1' &= 2e_1 + e_2 \\ e_2' &= 3e_1 + 2e_2 \end{cases}$$

la matrice P est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

L'inverse de cette matrice est donnée par

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

donc finalement

$$X' = P^{-1}X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}'$ sont données par le vecteur $X' = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$, soit $x = -5e_1' + 4e_2'$. On peut vérifier ce résultat par un calcul direct : si on exprime les vecteurs e_1 et e_2 dans la base $\mathcal{B}'$, on obtient

$$\begin{cases} e_1 &= 2e_1' - e_2' \\ e_2 &= -3e_1' + 2e_2' \end{cases}$$

donc

$$x = 2e_1 + 3e_2 = 2(2e_1' - e_2') + 3(-3e_1' + 2e_2') = -5e_1' + 4e_2'$$

et on retrouve bien le résultat précédent.

Remarque. Dans l'exemple précédent, on a choisi d'inverser la matrice P par un calcul direct, mais on peut aussi trouver P^{-1} en exprimant les vecteurs (e_1, e_2) dans la base (e_1', e_2') et en utilisant la proposition 2.1. En effet, on a

$$\begin{cases} e_1' &= 2e_1 + e_2 \\ e_2' &= 3e_1 + 2e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 &= 2e_1' - e_2' \\ e_2 &= -3e_1' + 2e_2' \end{cases}$$

donc d'après la proposition 2.1, on retrouve bien

$$P^{-1} = P_{B'\to B} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.3 Changement de base et applications linéaires

Théorème 12 (Changement de base, cas général)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies. On munit E de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et de même on munit F de deux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire de E dans F. Notons

$$A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f), \quad A' = M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f), \quad P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}, \quad Q = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}'}.$$

Alors, on a les deux relations suivantes :

$$A' = Q^{-1}AP \quad \text{et} \quad A = QA'P^{-1}.$$

Dans ce cas, on dit que les matrices A et A' sont **équivalentes**.

Démonstration. Notons d'abord qu'il suffit en fait de montrer l'une des deux égalités, car l'autre est obtenue en multipliant à gauche et à droite par l'inverse des matrices de passage :

$$A' = Q^{-1}AP \iff QA'P^{-1} = QQ^{-1}APP^{-1} = A.$$

On va donc montrer que $A = QA'P^{-1}$. Pour cela, on doit en fait vérifier que pour n'importe quel $x \in E$ de matrice coordonnées $X = M_{\mathcal{B}}(x)$, on a l'égalité

$$AX = QA'P^{-1}X.$$

Soit donc $x \in E$ un vecteur quelconque. Notons respectivement $X = M_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = M_{\mathcal{B}'}(x)$ ses matrices coordonnées dans les base $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E. Alors, d'après les propositions 11 et 4 qu'on applique au vecteur $f(x) \in F$ de matrices coordonnées $M_{\mathcal{C}}\big(f(x)\big)$ dans la base $\mathcal{C}$ de F et $M_{\mathcal{C}'}\big(f(x)\big)$ dans la base $\mathcal{C}'$ de F, on a

$$M_{\mathcal{C}'}\big(f(x)\big) = Q^{-1}M_{\mathcal{C}}\big(f(x)\big) = Q^{-1}M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\ M_{\mathcal{B}}(x) = Q^{-1}AX.$$

De même, la proposition 4 nous donne que $X' = P^{-1}X$, donc on a aussi

$$M_{\mathcal{C}'}\big(f(x)\big) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)\ M_{\mathcal{B}'}(x) = A'X' = A'P^{-1}X.$$

Ainsi, on a

$$M_{\mathcal{C}'}\big(f(x)\big) = Q^{-1}AX = A'P^{-1}X$$

soit

$$Q^{-1}AX = A'P^{-1}X \iff AX = QA'P^{-1}X$$

donc on a bien l'égalité attendue pour n'importe quel $x \in E$. Ainsi, les deux égalités du théorèmes sont vérifiées. □

Corollaire 13 (Changement de base, endomorphisme linéaire)

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Notons

$$A = M_{\mathcal{B}}(f), \quad A' = M_{\mathcal{B}'}(f), \quad P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}.$$

Alors, on a les deux relation suivantes :

$$A' = P^{-1}AP \quad \text{et} \quad A = PA'P^{-1}.$$

Dans ce cas, on dit que les matrices A et A' sont **semblables**.

Exemple 8. Reprenons l'exemple 6, c'est à dire $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et de la base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ définie par

$$e'_1 = (1, 0, -1), \quad e'_2 = (0, 1, 1), \quad e'_3 = (1, 0, 1).$$

On avait calculé la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$:

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit maintenant $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A suivante dans la base canonique $\mathcal{B}$:

$$A = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On cherche à déterminer la matrice $A' = M_{\mathcal{B}'}(f)$ qui représente l'application f dans la base $\mathcal{B}'$. On applique pour cela le théorème 12 au cas des endomorphismes et on a la relation suivante :

$$A' = P^{-1}AP.$$

On a donc besoin de trouver la matrice P^{-1}. Pour cela, on peut soit calculer l'inverse de P en utilisant l'algorithme de Gauss, soit utiliser la proposition 2.1 et remarquer que la matrice P^{-1} est en fait donnée par

$$P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}.$$

Il s'agit donc d'écrire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$: pour cela, on doit exprimer les vecteurs e_1, e_2 et e_3 dans la base (e'_1, e'_2, e'_3). Utilisons que

$$\begin{cases} e'_1 &= e_1 - e_3 \\ e'_2 &= e_2 + e_3 \\ e'_3 &= e_1 + e_3 \end{cases}$$

donc en résolvant ce système en e_1, e_2 et e_3, on trouve que

$$\begin{cases} e_1 &= \frac{1}{2}(e'_1 + e'_3) \\ e_2 &= \frac{1}{2}(e'_1 + 2e'_2 - e'_3) \\ e_3 &= \frac{1}{2}(-e'_1 + e'_3) \end{cases}$$

donc finalement, en notant les coordonnées de e_1, e_2 et e_3 dans la base $\mathcal{B}'$ en colonne, on obtient

$$P^{-1} = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on peut donc trouver la matrice $A' = M_{\mathcal{B}'}(f)$:

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

En particulier, on a

$$f(e'_1) = 2e'_1, \quad f(e'_2) = 2e'_2, \quad f(e'_3) = 4e'_3,$$

ce qu'on peut aussi vérifier par un calcul direct.