Université de Strasbourg

Mémoire de deuxième année
de Master métiers de l'enseignement
parcours Agrégation de Mathématiques

Fonctions symétriques et table de caractères de $\mathfrak{S}_n$

Victoria CALLET

Mémoire rédigé sous le direction de
Monsieur Pierre GUILLOT

Années 2018 - 2019

Table des matières

1 Introduction

2 Les partitions

Les partitions constituent notre outils combinatoire de base.

2.1 Premières définitions

Définition 2.1.1. ***Partitions***
*i) Une **partition** est une suite finie ou infinie d'entiers positifs $\lambda_1, ..., \lambda_r$ tels que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_r \geq$ .... On la note $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_r, ...)$.*
*ii) Les **parties** de λ sont les entiers λ_i strictement positifs.*
*iii) La **longueur** de λ, notée $l(\lambda)$, correspond au nombre de parties.*
*iv) Le **poids** de λ, noté $|\lambda|$, est la somme $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$.*
On note $\mathscr{P}$ l'ensemble de toutes les partitions.

Dans la suite, on s'intéressera essentiellement aux partitions de n.

Définition 2.1.2. ***Partitions de*** n
Une partition λ est une partition de n si $|\lambda| = n$.
On note $\mathscr{P}_n$ l'ensemble de toutes les partitions de n.

Exemples : • $\mathscr{P}_0$ est l'unique partition de 0.
• $\mathscr{P}_3 = \{(3), (2,1), (1,1,1)\}$.

Définition 2.1.3. ***Multiplicité***
Soit λ une partition. La multiplicité de l'indice i dans λ est le nombre, noté $m_i(\lambda)$, défini par

$$m_i(\lambda) := card\{j \mid \lambda_j = i\}.$$

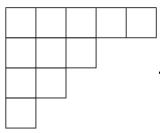
On écrit souvent $\lambda = (1^m_1, ..., r^m_r, ...)$.

2.2 Diagramme de Young

Les diagrammes de Young fournissent un moyen visuel de se représenter une partition. En effet, à chaque partition λ on peut associer un unique "dessin" que l'on notera D_λ, et qui est défini de la manière suivante :

Définition 2.2.1. ***Diagramme de Young***
Le diagramme de Young associé à une partition λ est l'ensemble, défini par

$$D_\lambda := \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq j \leq \lambda_i\}.$$

Exemple : Si $\lambda = (5,3,2,1)$, alors on a $D_\lambda =$  .

Remarque : La multiplicité de l'indice i dans une partition λ définie plus haut compte en fait le nombre de ligne contenant i boîtes.

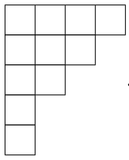
2.3 Conjugué d'une partition

A chaque partition λ, on peut associé une unique partition "duale" que l'on notera λ'.

Définition 2.3.1. ***Conjugé***
Soit λ une partition. On construit λ' en définissant chacune de ses parties :

$$\lambda'_i := \{\mathrm{j} \mid \lambda_\mathrm{j} \geq \mathrm{i}\}.$$

Exemple : Si on reprend $\lambda = (5,3,2,1)$, alors le conjugué est donné par $\lambda' = (4,3,2,1,1)$, et on a

$D'_\lambda =$  .

On remarque que le diagramme de λ' correspond au symétrique de D_λ par rapport à la diagonale principale.

Notons toute suite quelques propriétés vérifiées par λ' :

Proposition 2.3.2. *i)* $\lambda'_1 = l(\lambda)$ *et* $\lambda_1 = l(\lambda')$.
ii) $\lambda'' = \lambda$.
iii) $m_i(\lambda) = \lambda'_i - \lambda'_{i+1}$.

Démonstration. Les deux premières assertions sont évidentes. Pour la troisième, il faut comprendre le lien qui est établi entre λ et λ' : si on se réfère aux diagrammes associés, alors on voit que le nombre de lignes de λ correspond au nombre de colonnes de λ', et vice versa. Alors, si la multiplicité de l'indice i dans λ' est le nombre de lignes contenant i boîtes, c'est aussi le nombre de colonnes de λ contenant i boîtes. Ainsi, par décroissance de la suite des parties de λ, ce nombre est effectivement donné par $\lambda_i - \lambda_{i+1}$. □

2.4 Somme de partitions

Il est souvent utile de pouvoir sommer deux partitions.

Définition 2.4.1. ***Sommes et réunions***
Soient λ *et* μ *deux partitions.*
i) La somme $\lambda + \mu$ *est définie par*

$$(\lambda + \mu)_i = \lambda_i + \mu_i.$$

ii) La réunion $\lambda \cup \mu$ *est la partition qui contient entièrement* λ *et* μ.

Exemple : Pour $\lambda = (5,4,4,2)$ et $\mu = (3,3,1)$, on a
• $\lambda + \mu = (8,7,5,2)$
• $\lambda \cup \mu = (5,4,4,3,3,1)$.

Proposition 2.4.2. *Si* λ *et* μ *sont deux partitions quelconques, alors on a*

$$(\lambda \cup \mu)' = \lambda' + \mu'.$$

Démonstration. En écrivant le diagramme de $\lambda \cup \mu$, on voit bien que la longueur de la $i^{\text{ème}}$ colonne correspond à la somme de la $i^{\text{ème}}$ colonne de λ et de celle de μ, ce qui donne pour chaque colonne $(\lambda \cup \mu)'_i = \lambda'_i + \mu'_i$, et ainsi le résultat. □

2.5 Relations d'ordre sur $\mathscr{P}_n$

On peut définir deux relations d'ordre sur l'ensemble des partitions de n.

Définition 2.5.1. ***Relation d'ordre***
Soient λ *et* μ *deux partitions de* n.
i) L'ordre lexicographique inverse : on pose $L_n \subset \mathscr{P}_n \times \mathscr{P}_n$. *Alors,* $(\lambda,\mu) \in L_n$ *si* $\lambda = \mu$ *et si la première différence non nulle* $\lambda_i - \mu_i$ *est positive.*
ii) De la même façon, on pose $L'_n \subset \mathscr{P}_n \times \mathscr{P}_n$. *Alors,* $(\lambda,\mu) \in L'_n$ *si* $\lambda = \mu$ *et si la première différence non nulle* $\lambda_{n+1-i} - \mu_{n+1-i}$ *est négative.*

Exemple : Si $n = 5$, L_n range les éléments de $\mathscr{P}_n$ de la façon suivante :

$$(5), (4,1), (3,2), (3,1^2), (2^2,1), (2,1^3), (1^5).$$

Remarque : L_n et L'_n sont des ordres totaux sur sur l'ensemble $\mathscr{P}_n$.

Proposition 2.5.2. *Soient λ et μ deux partitions de $\mathscr{P}_n$ telles que $\lambda \neq \mu$. Alors,*

$$(\lambda, \mu) \in Ł'_n \Leftrightarrow (\mu', \lambda') \in L_n.$$

Démonstration. Pour le sens direct, si on suppose que $(\lambda, \mu) \in L'_n$, alors il existe $i \geq 1$ tel que $\lambda_i \leq \mu_i$, et $\lambda_i = \mu_i$ pour $j > i$. Alors, en posant $k = \lambda_i$ et en considérant les diagrammes de λ et μ ainsi que leurs conjugués, on a $\lambda'_j = \mu'_j$ pour $1 \leq j \leq k$ et $\lambda'_{k+1} < \mu'_{k+1}$, de telle sorte que $(\mu', \lambda') \in L_n$. Le sens réciproque se traite alors de façon similaire. □

3 L'anneau des fonctions symétriques

3.1 Construction de l'anneau des fonctions symétriques

On se donne un entier $n \geq 0$ et on considère l'anneau $\mathbb{Z}[X_1, ..., X_n]$ des polynômes en n variables indépendantes à coefficients entiers. On fait agir le groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations d'un ensemble à n éléments par le biais de l'action suivante :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_n \times \mathbb{Z}[X_1, ..., X_n] &\to \mathbb{Z}[X_1, ..., X_n] \\ \big(\sigma, P(X_1, ..., X_n)\big) &\mapsto P(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

Définition 3.1.1. ***Polynôme symétrique***
Un polynôme symétrique est un polynôme invariant sous l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{Z}[X_1, ..., X_n]$. On note $\Lambda_n = \mathbb{Z}[X_1, ..., X_n]^{\mathfrak{S}_n}$ le sous-anneau des polynômes symétriques, et Λ_n^k l'espace vectoriel des polynômes symétriques et homogènes de degré k.

Proposition 3.1.2. *Λ_n est un anneau gradué : $\Lambda_n = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda_n^k$.*

Démonstration. Soient k et l deux entiers positifs et P et Q deux polynômes à n variables de degré k et l respectivement. Alors, le produit PQ est un polynôme à n variables de degré kl, donc PQ appartient à Λ_n^{k+l}. □

On va maintenant définir une base sur Λ_n.

Si $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, alors on pose $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} ... X_n^{\alpha_n}$.

Définition 3.1.3. ***Fonctions monomiales***
Soit λ une partition de longueur inférieure ou égale à n. On définit m_λ le polynôme en n variables par

$$m_\lambda = m_\lambda(X_1, ..., X_n) := \sum_{\{\sigma(\alpha) | \sigma \in \mathfrak{S}_n\}} X^\alpha.$$

On appelle les polynômes m_λ les fonctions symétriques monomiales.

Exemples : • On choisit $\lambda = (1, 1, 1)$. Alors, $n = k = 3$ et $\mathfrak{S}_3 \circ \lambda = \{(1, 1, 1)\}$, d'où

$$m_{(1,1,1)} = X_1 X_2 X_3.$$

• On choisit $\lambda = (2, 1)$. Alors, $k = 3$, $n = 2$ et $\mathfrak{S}_2 \circ \lambda = \{(2, 1), (1, 2)\}$, d'où

$$m_{(2,1)} = X_1 X_2^2 + X_1^2 X_2.$$

Proposition 3.1.4. *Chaque m_λ est un polynôme symétrique. De plus, l'ensemble $\{m_\lambda \mid \lambda \text{ parcourt } \mathscr{P}_n\}$ est une $\mathbb{Z}$-base de Λ_n et l'ensemble $\{m_\lambda \mid l(\lambda) \leq n \text{ et } |\lambda| = k\}$ est une $\mathbb{Z}$-base de Λ_n^k. En particulier, si $n \geq k$, alors l'ensemble $\{m_\lambda \mid |\lambda| = k\}$ est une $\mathbb{Z}$-base de Λ_n^k.*

Démonstration. Cette proposition résulte simplement de la construction des polynômes m_λ : en effet le moyen le plus "simple" d'obtenir un polynôme symétrique est de prendre le monôme X^α et de le symétriser, et c'est exactement ce que fait m_λ. □

Dans la suite, on va vouloir généraliser les polynômes symétriques à n variables à des polynômes symétriques pouvant en avoir une infinité : c'est ce qu'on appellera les **fonctions symétriques**.

Pour cela, on se donne un entier $m \geq n$ et on définit la projection suivante :

$$\varphi : \mathbb{Z}[X_1, ..., X_m] \to \mathbb{Z}[X_1, ..., X_n]$$

qui fixe les n premières variables et envoie $X_{n+1}, ..., X_m$ sur 0. Alors, en restreignant l'application φ à l'anneau Λ_m, on définit un morphisme

$$\rho_{m,n} := \varphi_{|\Lambda_m} : \Lambda_m \to \Lambda_n.$$

Cet morphisme agit sur la base $(m_\lambda)_\lambda$ en envoyant $m_\lambda(X_1, ..., X_m)$ sur $m_\lambda(X_1, ..., X_n)$ si $l(\lambda) \leq n$ et sur 0 sinon. On obtient en particulier que $\rho_{m,n}$ est surjectif.

De façon similaire, on peut restreindre l'application φ à l'anneau Λ_m^k :

$$\rho_{m,n}^k := \varphi_{|\Lambda_m^k} : \Lambda_m^k \to \Lambda_n^k.$$

Dans ce cas, $\rho_{m,n}^k$ est toujours surjectif, mais il devient aussi bijectif dès que $m \geq n \geq k$. En effet, on impose depuis le début que $l(\lambda) \leq n$, mais comme par définition de la longueur et du poids $l(\lambda) \leq |\lambda| = k$, si on impose en plus $n \geq k$, alors la condition $l(\lambda) \leq n$ devient inutile car de toute faon réalisée. Ainsi, la base $(m_\lambda)_\lambda$ ne dépend plus du nombre de variables, mais uniquement du degré k, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple : Fixons $k = 2$. Soit $P = aX_1^2 + bX_2^2 + cX_1X_2$ un polynôme avec $n = 2$ variables. Alors, P est symétrique si et seulement $a = b$, si et seulement si

$$P = a(X_1^2 + X_2^2) + cX_1X_2 = am_{(2)} + cm_{(1,1)}.$$

Si $n = 3$, alors on pose

$$P = aX_1^2 + bX_2^2 + cX_3^2 + dX_1X_2 + eX_1X_3 + fX_2X_3,$$

et P est symétrique si et seulement si $a = b = c$ et $d = e = f$, si et seulement

$$P = a(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) + d(X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3) = am_{(2)} + dm_{(1,1)}.$$

On voit bien que dans les deux cas, la base est bien l'ensemble $\{m_\lambda \mid |\lambda| = 2\}$, et on a bien l'isomorphisme entre Λ_3^2 et Λ_2^2.

Ainsi, on ne s'intéressera dans la suite plus qu'au cas où $n \geq k$, c'est à dire au cas où les polynômes ont "suffisamment de variables". Ceci permet de noter Λ^k l'espace Λ_n^k lorsque n est assez grand. Concrètement, on peut voir Λ^k comme l'ensemble des séries formelles en $X_1, X_2, ...$ symétriques et homogènes de degré k.

Enfin, on pose

$$\Lambda = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^k,$$

l'anneau gradué qu'on appelle **anneau des fonctions symétriques**. A nouveau, pour chaque $n \geq 0$, on peut écrire la projection

$$\rho_n : \Lambda \to \Lambda_n,$$

qui envoie X_m sur 0 dès que $m > n$, et sa restriction à Λ^k est encore un isomorphisme dès que $n \geq k$. Ainsi pour toute la suite, on continuera de fixer un nombre de variables suffisamment grand (c'est à dire plus grand que le degré du polynôme considéré) pour les exemples que l'on traitera, et on pourra travailler dans Λ sans problèmes.

3.2 Des exemples de fonctions symétriques classiques

3.2.1 Les fonctions symétriques élémentaires

Définition 3.2.1. ***Fonctions élémentaires***
Soit $r \in \mathbb{N}$. La $r^{\text{ième}}$ fonction symétrique élémentaire est la somme de tous les produits de r variables distinctes X_i :

$$\begin{cases} e_0 &= 1 \\ e_r &= m_{(1^r)} = \sum\limits_{i_1<i_2<\ldots<i_r} X_{i_1}X_{i_2}...X_{i_r} \text{ pour } r \geq 1. \end{cases}$$

Exemples : • Dans Λ_2, on a $e_1 = X_1 + X_2$ et $e_2 = X_1X_2$.
• Dans Λ_3, on a $e_1 = X_1 + X_2 + X_2$ et $e_2 = X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3$.

Définition 3.2.2. *On définit pour $(e_r)_r$ la série génératrice suivante :*

$$E(t) = \sum_{k \geq 0} e_k t^k.$$

Proposition 3.2.3.

$$E(t) = \prod_{i \geq 1}(1 + X_i t).$$

On a un premier résultat lorsque le nombre de variables est fixé, que l'on généralisera par la suite :

Théorème 3.2.4. *(**Théorème fondamental des polynômes symétriques**) Si P est un polynôme symétrique à n variables à coefficients dans $\mathbb{Z}$, alors il existe un unique polynôme T à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel que*

$$P(X_1, ..., X_n) = T(e_1, ..., e_n)$$

et on a $\Lambda_n = \mathbb{Z}[e_1, ..., e_n]$.

Fixons $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ...)$ une partition de longueur quelconque et posons

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} ... \ .$$

Proposition 3.2.5. *Soit λ une partition et λ' son conjugué. Alors*

$$e_{\lambda'} = m_\lambda + \sum_\mu a_{\lambda\mu} m_\mu$$

où $a_{\lambda\mu}$ sont des entiers positifs, et on somme sur toutes les partitions μ qui sont rangées après λ selon l'ordre lexicographique inverse L_n.

Démonstration. Si m_i est la multiplicité de l'indice i dans λ', alors on a

$$e_{\lambda'} = e_{\lambda'_1} e_{\lambda'_2} ... = e_1^{m_1} e_2^{m_2} ....$$

En développant ce produit, on obtient une somme de monômes de la forme :

$$X_i^{m_i} (X_i X_j)^{m_j} (X_i X_j X_k)^{m_k} ...$$

avec $i < j < k$. D'après le point *iii)* de la propriété 2.3.2, on obtient pour le premier terme de cette somme :

$$X_1^{m_1} (X_1X_2)^{m_2} (X_1X_2X_3)^{m_3} ... = X_1^{\lambda_1} X_2^{\lambda_2} X_3^{\lambda_3} ... = X^\lambda$$

et comme $e_{\lambda'}$ est un polynôme symétrique, on voit apparaître le polynôme m_λ avec coefficient 1. De même, les autres termes formeront les m_μ, avec μ après λ dans L_n. □

Cette proposition permet de démontrer le théorème suivant, qui est une généralisation du théorème fondamental 3.2.4 :

Théorème 3.2.6. *1) L'ensemble $\{e_\lambda \mid l(\lambda) \leq n \text{ et } |\lambda| = k\}$ forme une $\mathbb{Z}$-base de Λ_n^k.*
2) $\Lambda = \mathbb{Z}[e_1, e_2, ...]$ et les e_r sont algébriquement indépendants dans $\mathbb{Z}$ (c'est à dire que les e_r ne sont pas racines d'un polynômes à plusieurs variables à coefficients dans $\mathbb{Z}$).

Démonstration. On sait d'après la proposition 3.1.4 que l'ensemble des $\{m_\lambda \mid l(\lambda) \leq n \text{ et } |\lambda| = k\}$ forme une $\mathbb{Z}$-base de Λ_n^k. D'autre part la proposition 3.2.5 montre que l'on passe de la famille des m_λ à la famille des $e_{\lambda'}$ avec une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1 : en particulier, cette matrice est inversible. Ainsi les $(e'_\lambda)_{\lambda'}$ forment une $\mathbb{Z}$-base de Λ_n^k, et il en va donc de même pour les (e_λ), ce qui montre le point 1) du théorème. Le deuxième point est une généralisation du premier qui découle simplement du fait que les $(m_\lambda)_\lambda$ forment une base de Λ_n et donc de Λ. □

3.2.2 Les fonctions symétriques complètes

Définition 3.2.7. ***Fonctions complètes***
Soit $r \in \mathbb{N}$. La $r^{\text{ième}}$ fonction symétrique complète est donnée par

$$h_r = \sum_{|\lambda|=r} m_\lambda,$$

avec en particulier $h_0 = 1$ et $h_1 = e_1$.

Exemples : On passe dans Λ_n :
- $h_1(X_1, ..., X_n) = m_{(1)} = \sum_\alpha X^\alpha = \sum_{i=1}^n X_i$
- $h_2(X_1, ..., X_n) = m_{(2)} + m_{(1,1)} = \sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{1 \leq j < k \leq n} X_j X_k$
- Plus généralement,

$$h_k = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_k \leq N} X_{i_1} X_{i_2} ... X_{i_k}.$$

Définition 3.2.8. *On définit pour $(h_r)_r$ la fonction génératrice suivante :*

$$H(t) = \sum_{r \geq 0} h_r t^r.$$

Proposition 3.2.9.

$$H(t) = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - X_i t}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} H(t) &= \sum_{k \geq 0} t^k h_k = \sum_{k \geq 0} \sum_{1 \leq i_1 \leq ... \leq i_k \leq N} (tX_{i_1})...(tX_{i_k}) \\ &= \sum_{p_1, ..., p_N \geq 0} (tX_{i_1})^{p_1} ... (tX_{i_N})^{p_N} = \prod_{i=1}^N \Big(\sum_{p \geq 0} (tX_i)^p\Big) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{1 - tX_i} \end{aligned}$$

□

Cette proposition ainsi que la 3.2.3 amène à la formule suivante,

$$H(t)E(-t) = 1$$

qui amène elle-même au corollaire :

Corollaire 3.2.10. *Pour $n \geq 1$,*

$$\sum_{r=1}^n (-1)^r e_r h_{n-r} = 0.$$

Démonstration. On a

$$H(t)E(-t) = \Big(\sum_{k \geq 0} t^k h_k\Big)\Big(\sum_{k \geq 0} (-1)^k t^k e_k\Big) = 1$$

donc en développant selon un produit de Cauchy, on trouve

$$\sum_{n \geq 0} t^n \sum_{r=0}^n (-1)^r e_r h_{n-r} = 1.$$

De plus, $e_0 h_0 = 1$, donc en identifiant les coefficients de cette série formelle on a bien

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 = & e_0 h_1 - e_1 h_0 \\ 0 = & e_0 h_2 - e_1 h_1 + e_2 h_0 \\ 0 = & e_0 h_3 - e_1 h_2 + e_2 h_1 - e_3 h_0 \\ \ldots & \end{array} \right.$$

d'où le résultat. □

D'après le théorème 3.2.6, les fonctions symétriques élémentaires sont algébriquement indépendantes sur Λ. Ceci permet de définir le morphisme d'anneau gradué suivant $\omega : \Lambda \to \Lambda$ par

$$\forall r \geq 0,\ \omega(e_r) = h_r.$$

Alors, on a la proposition suivante :

Proposition 3.2.11. *Le morphisme ω ainsi défini est une morphisme involutif ($\omega^2 = id$).*

Démonstration. On veut montrer que $\omega(h_r) = e_r$ pour tout $r \geq 0$. Puisque ω est un morphisme d'anneau et que $h_0 = e_0 = 1$, on a déjà $\omega(h_0) = e_0$. Ensuite, en utilisant le corollaire 3.2.10, on établit que

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 = & e_0 h_1 - e_1 h_0 \\ 0 = & \omega(h_0) h_1 - \omega(h_1) h_0 \end{array} \right.$$

ce qui donne $\omega(h_1) = e_1$. En procédant par récurrence forte, on trouve le résultat. □

Par cette proposition, ω est un automorphisme de Λ. Ainsi, en posant pour toute partition λ,

$$h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \ldots,$$

on obtient le théorème suivant :

Théorème 3.2.12. *1) L'ensemble $\{h_\lambda \mid l(\lambda) \leq n \text{ et } |\lambda| = k\}$ forme une $\mathbb{Z}$-base de Λ_n^k.*
2) $\Lambda_n = \mathbb{Z}[h_1, \ldots, h_n]$, $\Lambda = \mathbb{Z}[h_1, h_2, \ldots]$ et les h_r sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Z}$.

3.2.3 Les fonctions symétriques puissances ou Sommes de Newton

Définition 3.2.13. *Sommes de Newton*
Soit $k \geq 0$. La $k^{\text{ième}}$ somme de Newton ou somme de puissances est définie par

$$p_k = \sum_{i=1}^{n} X_i^k = m_{(k)} \in \Lambda_n^k.$$

On définit pour $(p_k)_k$ la fonction génératrice :

$$P(t) = \sum_{k \geq 1} p_k t^{k-1}.$$

Proposition 3.2.14. *On a les relations suivantes :*

$$P(t) = \frac{H'(t)}{H(t)} \text{ et } P(-t) = \frac{E'(t)}{E(t)}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{k \geq 1} p_k t^{k-1} = \sum_{i \geq 1} \sum_{k \geq 1} X_i^k t^{k-1} = \sum_{i \geq 1} \frac{X_i}{1 - X_i t} \\ &= \sum_{i \geq 1} \frac{d}{dt} \log \frac{1}{1 - X_i t} = \frac{d}{dt} \log \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - X_i t} = \frac{d}{dt} \log H(t) = \frac{H'(t)}{H(t)} \end{aligned}$$

et la deuxième égalité se montre exactement de la même façon. □

Cette proposition permet de démontrer les formules suivantes :

Corollaire 3.2.15. ***Formules de Newton***
Pour tout $n \geq 1$,

$$nh_n = \sum_{k=1}^{n} p_k h_{n-k}, \ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} p_k e_{n-k} = ne_n.$$

Démonstration. Nous démontrerons la première égalité, les calculs de la deuxième seront essentiellement les mêmes.

$$\begin{aligned} P(t)H(t) =& \big(\sum_{k\geq 0} p_{k+1}t^k\big)\big(\sum_{k\geq 0} h_k t^k\big) \\ =& \sum_{k\geq 0} \big(\sum_{i=1}^{k} p_{i+1}h_{k-i}\big)t^k \\ =& \sum_{i=0}^{k} p_{i+1}h_{k-i} \end{aligned}$$

D'après la proposition précédente, on a, en identifiant les coefficients :

$$\sum_{i=0}^{k} p_{i+1}h_{k-i} = (k+1)h_{k+1},$$

d'où en réarrangeant les indices

$$nh_n = \sum_{k=1}^{n} p_k h_{n-k}.$$

□

Comme pour les autres familles de fonctions symétriques, on définit pour une partition λ

$$p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \cdots$$

Théorème 3.2.16. *On pose $\Lambda_{\mathbb{Q}} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Alors, on a*

$$\Lambda_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}[p_1, p_2, ...],$$

et la famille $(p_\lambda)_\lambda$ forme une $\mathbb{Q}$-base de $\Lambda_{\mathbb{Q}}$.

Démonstration. Les formules de Newton donne que pour $n \geq 1$, les $h_1, ..., h_n$ sont des polynômes à coefficients rationnels en les $p_1, ..., p_n$. On a donc $h_n \in \mathbb{Q}[p_1, ..., p_n]$ et de même, $p_n \in \mathbb{Z}[h_1, ..., h_n] \subset \mathbb{Q}[h_1, ..., h_n]$. Finalement, on a

$$\mathbb{Q}[p_1, ..., p_n] = \mathbb{Q}[h_1, ..., h_n].$$

D'autre part, le théorème 3.2.12 donne que les h_k sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Z}$, donc ils le sont en particulier sur $\mathbb{Q}$, ce qui donne le résultat. □

Remarque : On ne trouve pas ici de $\mathbb{Z}$-base de Λ : en effet, on a (par exemple) $h_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2)$.

Nous disposons donc à présent de trois bases de Λ : $(m_\lambda)_\lambda$, (e_λ), et $(p_\lambda)_\lambda$. On peut maintenant faire le lien entre ces différentes familles en utilisant la définition suivante :

Définition 3.2.17. *Soit $\lambda \in \mathscr{P}$. Si $m_i(\lambda)$ désigne toujours le cardinal de l'ensemble $\{j \geq 1 \mid \lambda_j = i\}$, alors on pose*

$$z_\lambda = \prod_{i\geq 1} i^{m_i} m_i!.$$

Les formules suivantes sont très importantes et serviront beaucoup pour la suite :

Proposition 3.2.18.

$$h_n = \sum_{\lambda \in \mathscr{P}_n} \frac{p_\lambda}{z_\lambda} \ \textit{et} \ e_n = \sum_{\lambda \in \mathscr{P}_n} (-1)^{|\lambda| + l(\lambda)} \frac{p_\lambda}{z_\lambda}.$$

Démonstration. On commence par établir que

$$H(t) = \frac{1}{E(-t)} = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1 - X_i t} = \exp\big(-\sum_{i=1}^{N} \log(1 - X_i t)\big) = \exp\big(\sum_{i=1}^{N}\sum_{k\geq 1} \frac{(X_i t)^k}{k}\big) = \exp\big(\sum_{k\geq 1} \frac{p_k t^k}{k}\big).$$

Ensuite, pour la première identité, on développe $H(t)$:

$$H(t) = \prod_{k\geq 1}\Big(\sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!}\big(\frac{p_k t^k}{k}\big)^m\Big) = \sum_{m_1, m_2, ...\geq 0} \frac{1}{m_1! m_2! ...}\big(\frac{p_1 t}{1}\big)^{m_1}\big(\frac{p_2 t^2}{2}\big)^{m_2} ...$$

d'où finalement

$$\sum_{n\geq 0} h_n t^n = \sum_{\lambda\in\mathscr{P}} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda t^{|\lambda|}$$

d'où le résultat. La deuxième identité se démontre de la même façon. □

3.2.4 Les fonctions de Schur

Dans cette partie, on considère un **nombre fini** de variables $X_1, ..., X_n$. Pour un n-uplet $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, on pose

$$X^\alpha := X_1^{\alpha_1} ... X_n^{\alpha_n}.$$

En notant ϵ le morphisme signature, on définit le polynôme a_α :

$$a_\alpha = a_\alpha(X_1, ..., X_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma)\sigma(X^\alpha) = \sum_{\epsilon\in\mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) X_{\sigma(1)}^{\alpha_1} ... X_{\sigma(n)}^{\alpha_n}.$$

Alors, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a :

$$\sigma(a_\alpha) = \epsilon(\sigma) a_\alpha,$$

autrement dit, le polynôme a_α est **antisymétrique**. On note

$$A_n = \{P \in \mathbb{Z}[X_1, ..., X_n] \mid P(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma) P(X_1, ..., X_n)\}$$

l'ensemble des polynômes antisymétriques.

Exemples : • Pour $\alpha = (1, 2)$, on a $X^\alpha = X_1 X_2^2$ et

$$a_\alpha = X_1 X_2^2 - X_2 X_1^2.$$

• Pour $\alpha = (1, 1)$, on a $X^\alpha = X_1 X_2$ et

$$a_\alpha = X_1 X_2 - X_2 X_1 = 0.$$

Remarque : On voit en particulier que a_α est nul sauf si les coordonnées de α sont toutes deux à deux distinctes.

Dans la suite, on supposera toujours que le n-uplet qu'on se donne est strictement décroissant (c'est à dire que $\alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_n \geq 0$). Alors, si λ est une partition de longueur inférieure ou égale à n, on décomposera α de la façon suivante :

$$\alpha = \lambda + \delta,$$

où δ est le n-uplet donné par $\delta = (n - 1, n - 2, ..., 1, 0)$.

Ainsi, on obtient un autre polynôme a_α défini par :

$$a_\alpha = a_{\lambda+\delta} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma)\sigma(X^{\lambda+\delta}).$$

Proposition 3.2.19. *On a*

$$a_\alpha = \det(X_i^{\alpha_j})_{1\le i,j\le n} = \det(X_i^{\lambda_j+n-j})_{1\le i,j\le n}.$$

En particulier,

$$a_\delta = \prod_{1\le i<j\le n}(X_i - X_j).$$

Démonstration. D'après la formule classique du déterminant,

$$\det(X_i^{\lambda_j+n-j})_{1\le i,j\le n} = \begin{vmatrix} X_1^{\lambda_1+n-1} & X_1^{\lambda_2+n-2} & \cdots & X_1^{\lambda_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n^{\lambda_1+n-1} & X_n^{\lambda_2+n-2} & \cdots & X_n^{\lambda_n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n X_{\sigma(i)}^{\lambda_i+n-i} = a_\alpha$$

En particulier,

$$a_\delta = \begin{vmatrix} X_1^{n-1} & \cdots & X_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n^{n-1} & \cdots & X_n & 1 \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(X_i - X_j)$$

comme déterminant de Vandermonde. □

Par ailleurs, puisque a_α est antisymétrique, en substituant X_j à X_i pour $i < j$, on obtient 0, donc a_α est divisible (dans $\mathbb{Z}[X_1, ..., X_n]$) par chaque polynôme $X_i - X_j$ (pour $1 \le i < j \le n$). Ces polynômes étant irréductibles deux à deux, et l'anneau $\mathbb{Z}[X_1, ..., X_n]$ étant factoriel, a_α est divisible par leurs produits. Ainsi, la proposition précédente donne que a_α est divisible par a_δ dans $\mathbb{Z}[X_1, ..., X_n]$. Ceci permet alors de définir les fonctions de Schur :

Définition 3.2.20. *Fonctions de Schur*
Soit λ une partition de longueur inférieure ou égale à n. La fonction de Schur associée à λ est le quotient de $a_{\lambda+\delta}$ par a_δ, où $\delta = (n-1, ..., 1, 0)$:

$$s_\lambda = s_\lambda(X_1, ..., X_n) = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}.$$

En particulier, s_λ est un polynôme symétrique ($s_\lambda \in \Lambda_n$) et homogène de degré $|\lambda|$.

Remarque : On adopte la convention suivante que $s_\lambda = 0$ lorsque $l(\lambda) > n$.

Exemple : On fixe $n = 2$ et $\lambda = (2, 1)$. Alors, $\delta = (1, 0)$ et $\alpha = (3, 1)$. On a donc

$$a_\alpha = X_1^3X_2 - X_1X_2^3 \text{ et } a_\delta = X_1 - X_2.$$

Ainsi,

$$s_{(2,1)}(X_1, X_2) = \frac{X_1^3X_2 - X_1X_2^3}{X_1 - X_2} = X_1^2X_2 + X_1X_2^2 \in \Lambda_2.$$

Proposition 3.2.21. *La multiplication par a_δ est un isomorphisme de Λ_n vers A_n.*

Démonstration. La multiplication par a_δ d'un polynôme symétrique donne bien un polynôme antisymétrique, donc l'application est bien définie et elle vérifie bien la structure de groupe additif. D'autre part, a_δ est non nul donc le morphisme est injectif. Enfin comme $\mathbb{Z}[X_1, ..., X_n]$ est factoriel, si P est un polynôme antisymétrique, alors il est divisible par tous les $X_i - X_j$pour $i < j$ et donc par a_δ. Alors par division euclidienne, il existe $Q \in \mathbb{Z}[X_1, ..., X_n]$ tel que $a_\delta Q = P$, donc Q est symétrique et le morphisme est surjectif : c'est donc bien un isomorphisme de Λ_n dans A_n. □

Théorème 3.2.22. *1) L'ensemble $\{s_\lambda \mid l(\lambda) \le n\}$ forme une $\mathbb{Z}$-base de Λ_n.*
2) Les s_λ forment une $\mathbb{Z}$-base de Λ, et pour tout $k \ge 0$, l'ensemble $\{s_\lambda \mid |\lambda)| = k\}$ forme une $\mathbb{Z}$-base de Λ^k.

Démonstration. On remarque que l'ensemble des $\{a_{\lambda+\delta} \mid l(\lambda) \le n\}$ est une base de A_n, donc d'après la proposition précédente et puisque $a_{\lambda+\delta} = a_\delta s_\lambda$, $\{s_\lambda \mid l(\lambda) \le n\}$ est bien un base de Λ_n. □

On note un dernier lemme permettant de relier les fonctions de Schur au fonctions complètes, mais qui servira uniquement dans la toute dernière partie de ce mémoire :

Lemme 3.2.23. *Soit λ une partition de n.*

$$s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i + j})_{1 \leq i,j \leq n}.$$

En particulier, s_λ est un polynôme en les h_i.

3.3 Orthogonalité et produit scalaire sur Λ

Le but de cette partie va être de munir l'anneau Λ d'un produit scalaire. Pour cela, on se donne $\{X_1, X_2, ...\}$ et $\{Y_1, Y_2, ...\}$ deux suites finies ou infinies de variables. On note $m_\lambda(X) = m_\lambda(X_1, X_2, ...)$, $m_\lambda(Y) = m_\lambda(Y_1, Y_2, ...)$, et de même pour les autres fonctions symétriques que l'on considère. On commence par le lemme suivant :

Lemme 3.3.1. *Ce lemme consiste à donner plusieurs écritures du produit* $\prod\limits_{i,j \geq 1} \frac{1}{1 - X_i Y_j}$.

1) $\prod\limits_{i,j\geq 1} \frac{1}{1-X_iY_j} = \sum\limits_{\lambda \in \mathscr{P}} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda(X) p_\lambda(Y)$.

2) $\prod\limits_{i,j\geq 1} \frac{1}{1-X_iY_i} = \sum\limits_{\lambda \in \mathscr{P}} h_\lambda(X) m_\lambda(Y) = \sum\limits_{\lambda \in \mathscr{P}} m_\lambda(X) h_\lambda(Y)$.

3) $\prod\limits_{i,j\geq 1} \frac{1}{1-X_iY_i} = \sum\limits_{\lambda \in \mathscr{P}} s_\lambda(X) s_\lambda(Y)$.

Démonstration. 1) Pour la première formule, il suffit de développer en faisant apparaître $\frac{1}{z_\lambda}$:

$$\begin{aligned}
\prod_{i,j\geq 1} \frac{1}{1 - X_iY_j} &= \exp\big(- \sum_{i,j} \log(1 - X_iY_j)\big) \\
&= \exp\big(\sum_{i,j} \sum_{k \geq 1} \frac{(X_iY_j)^k}{k} \big) \\
&= \prod_{k \geq 1} \exp\big(\sum_{i,j} \frac{(X_iY_j)^k}{k} \big) \\
&= \prod_{k \geq 1} \exp\big(\frac{p_k(X) p_k(Y)}{k} \big) \\
&= \sum_{m_1, m_1, ... \geq 0} \frac{1}{m_k!} \big(\frac{p_k(X)p_k(Y)}{k} \big)^{m_k} \\
&= \sum_{\lambda \in \mathscr{P}} \frac{1}{z_\lambda} \prod_{k \geq 1} \big(p_k(X) p_k(Y) \big)^{m_k(\lambda)} \\
&= \sum_{\lambda \in \mathscr{P}} \frac{p_k(X)p_k(Y)}{z_\lambda}
\end{aligned}$$

2) La deuxième égalité vient de la proposition 3.2.10 :

$$\prod_{i,j\geq 1} \frac{1}{1 - X_iY_j} = \prod_{j \geq 1} H(Y_j) = \prod_{j \geq 1} \sum_{k \geq 0} h_k(X) Y_j^k = \sum_{\lambda \in \mathscr{P}} h_\lambda(X) m_\lambda(Y)$$

et ce calcul est évidemment symétrique.
3) On part du déterminant de Cauchy :

$$\det\big(\frac{1}{1 - X_iY_j} \big)_{1 \leq i,j \leq N} = \frac{\prod\limits_{1 \leq i < j \leq N} (X_i - X_j) \prod\limits_{1 \leq i < j \geq N} (Y_i - Y_j)}{\prod\limits_{i,j=1}^{N} (1 - X_iY_j)}$$

donc par définition de a_δ pour $\delta = (n-1, n-2..., 1, 0)$, on a

$$\det\big(\frac{1}{1 - X_iY_j} \big)_{1 \leq i,j \leq N} = \frac{a_\delta(X) a_\delta(Y)}{\prod\limits_{i,j=1}^{N} (1 - X_iY_j)}.$$

Ainsi, on a

$$a_\delta(X)a_\delta(Y)\prod_{i,j}^{N}\frac{1}{1-X_iY_j} = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \sum\limits_{k\geq 0} X_i^kY_1^k & \sum\limits_{k\geq 0} X_i^kY_2^k & \vdots & \sum\limits_{k\geq 0} X_i^kY_N^k \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k_1,\dots,k_N\geq 0} Y_1^{k_1}\dots Y_N^{k_N} \begin{vmatrix} X_1^{k_1} & \cdots & X_1^{k_N} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ X_i^{k_1} & \cdots & X_i^{k_N} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ X_n^{k_1} & \cdots & X_N^{k_N} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k_1,\dots,k_N\geq 0} Y_1^{k_1}\dots Y_N^{k_N} a_{(k_1,\dots,k_N)}(X)$$

$$= \sum_{\lambda\in\mathscr{P}} a_{\lambda+\delta}(X)a_{\lambda+\delta}(Y).$$

□

Définition 3.3.2. ***Produit scalaire sur*** Λ
On munit Λ d'un produit scalaire noté $\langle,\rangle$ pour lequel la famille $\{s_\lambda \mid \lambda\in\mathscr{P}\}$ est orthonormée, c'est à dire qu'on a :

$$\langle s_\lambda, s_\mu\rangle = \delta_{\lambda\mu}.$$

Remarque : Puisque l'involution ω permute les fonctions de Schur, elle préserve le produit scalaire.

On a donc défini un produit scalaire de façon à ce que les fonctions de Schur soient orthonormées pour ce dernier. Nous allons maintenant voir ce qu'il se passe pour les $(h_\lambda)_\lambda$, $(m_\lambda)_\lambda$ et $(p_\lambda)_\lambda$:

Proposition 3.3.3. *Soient λ et μ deux partitions de n. Alors, on a*

$$\langle h_\lambda, m_\mu\rangle = \delta_{\delta\mu} \text{ et } \langle p_\lambda, p_\mu\rangle = z_\lambda\delta_{\lambda\mu}.$$

Démonstration. Nous allons en fait montrer un résultat un peu plus général : si $(u_\lambda)_\lambda$ et $(v_\lambda)_\lambda$ sont deux familles de polynômes symétriques de degré n (indexées par $\mathscr{P}_n$) telles que

$$\sum_{\lambda\in\mathscr{P}_n} u_\lambda(X)v_\lambda(Y) = \prod_{i,j\geq 1}\frac{1}{1-X_iY_j},$$

alors on a $\langle u_\lambda, v_\mu\rangle = \delta_{\lambda\mu}$. Ainsi, il suffira pour conclure d'utiliser le lemme 3.3.1 afin de réexprimer le produit $\prod\limits_{i,j\geq 1}\frac{1}{1-X_iY_j}$ en fonction des h_λ, m_λ et p_λ.

Soient donc $(u_\lambda)_\lambda$ et $(v_\lambda)_\lambda$ deux familles de polynômes symétriques de degré $|\lambda| = n$. Comme les fonctions de Schur forment une $\mathbb{Z}$-base de Λ, on peut écrire

$$u_\mu = \sum_{\lambda\in\mathscr{P}_n} B_{\mu\lambda}s_\lambda \text{ et } v_\mu = \sum_{\nu\in\mathscr{P}_n} C_{\mu\nu}s_\nu.$$

Par hypothèse et d'après le lemme 3.3.1, on a

$$\sum_{\lambda\in\mathscr{P}_n} s_\lambda(X)s_\lambda(Y) = \sum_{\mu\in\mathscr{P}_n} u_\mu(X)v_\mu(Y) = \sum_{\lambda,\nu\in\mathscr{P}_n}\Big(\sum_{\mu\in\mathscr{P}_n} B_{\lambda\mu}C_{\mu\nu}\Big)s_\lambda(X)s_\nu(Y)$$

On en déduit donc que

$$\sum_{\mu\in\mathscr{P}_n} B_{\lambda\mu}C_{\mu\nu} = \delta_{\lambda\nu}$$

et ainsi que les matrices B et C sont inverses l'une de l'autre. Ceci permet finalement d'écrire que

$$\langle u_\mu, v_\rho \rangle = \sum_{\lambda,\nu \in \mathscr{P}_n} B_{\lambda\mu} C_{\rho\nu} \langle s_\lambda, s_\nu \rangle = \sum_{\lambda \in \mathscr{P}_n} C_{\rho\lambda} B_{\lambda\mu} = \delta_{\rho\mu},$$

d'où le résultat. $\square$

Finalement, nous avons construit un produit scalaire sur Λ vérifiant les trois conditions suivantes :

$$\begin{cases} \langle s_\lambda, s_\mu \rangle &= \delta_{\lambda,\mu} \\ \langle h_\lambda, m_\mu \rangle &= \delta_{\lambda,\mu} \\ \langle p_\lambda, p_\mu \rangle &= \delta_{\lambda,\mu} z_\lambda \end{cases}$$

4 Le groupe $\mathfrak{S}_n$

4.1 Représentations du groupe symétrique

4.1.1 Classes de conjugaison

Rappel : Deux éléments de $\mathfrak{S}_n$ sont dans la même orbite pour l'action de conjugaison si et seulement si les longueurs des cycles dans leurs décompositions respectives en produit de cycles à supports disjoints sont les mêmes.

Démonstration. Soient σ et σ' dans $\mathfrak{S}_n$. On écrit $\sigma = \prod_i^m c_i$ avec $c_i = (a_{i,1}, ..., a_{i,k})$ pour chaque i et les c_i sont à supports disjoints. Si il existe $\tau \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1}$, alors pour chaque cycle on a $\tau c_i \tau^{-1} = (\tau(a_{i,1}), ..., \tau(a_{i,k}))$, donc σ' est le produit de cycles disjoints et de même longueurs que les c_i. Réciproquement, si $\sigma' = \prod_i^m c'_i$ où les c'_i ont mêmes longueurs que les c_i et sont à supports disjoints, alors on peut conjuguer σ et σ' par n'importe quelle permutation τ qui envoie le support de chaque c_i sur celui de c'_i dans le bon ordre, ce qui est possible car les cycles sont à supports disjoints. $\square$

Remarque : En particulier, σ et σ^{-1} appartiennent à la même classe de conjugaison.

Pour le reste de cette partie, on fixe σ une permutation de $\mathfrak{S}_n$ et on considère sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints, mais en écrivant les cycles par ordre de décroissant de taille. Alors, en notant $\rho_1, \rho_2, ...$ les longueurs de ces cycles (avec ainsi $\rho_1 \geq \rho_2 \geq ...$), on obtient une partition de n, que l'on note

$$\rho = \rho(\sigma) = (\rho_1, \rho_2, ...).$$

On dit que ρ est le **type de cycle** de σ.

Le rappel ci-dessus montre que l'application $\sigma \mapsto \rho(\sigma)$ induit une bijection entre l'ensemble des classes de conjugaisons de $\mathfrak{S}_n$ et l'ensemble des partitions de n. En particulier, tous les éléments d'une même classe de conjugaison ont même type de cycle.

Dans la partie sur les sommes de Newton, nous avions défini (en 3.2.17), pour une partition $\lambda = ...2^{m_2}1^{m_1}$, le nombre $z_\lambda = \prod_{i \geq 1} i^{m_i} m_i!$. Alors, si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, m_i est le nombre de cycles de longueur i dans la décomposition de σ en produits de cycles à supports disjoints. Nous allons voir à travers la proposition suivante que z_λ joue en fait un rôle particulier :

Proposition 4.1.1. *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et ρ la partition de n associée. Alors, z_ρ correspond au cardinal du centralisateur $C(\sigma)$ de σ.*

Démonstration. Soit $\tau \in C(\sigma)$. Alors, τ et σ vérifient $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma$. Supposons dans un premier temps que σ est produit de cycles à supports disjoints de mêmes longueurs. Alors, puisque les classes de conjugaisons sont entièrement déterminées par la longueur des cycles dans cette décomposition, le cardinal du centralisateur est invariant sur les classes de conjugaison. On peut donc supposer, sans perte de généralité, que σ s'écrit

$$\sigma = (1, 2, ..., i)(i+1, i+2, ..., 2i)...((m-1)i+1, (m-1)i+2, ...mi).$$

Alors, on doit avoir

$$\big(\tau(1),...,\tau(i)\big)...\big(\tau((m-1)i+1),...,\tau(mi)\big) = (1,...,i)...((m-1)i+1,...,mi) \qquad (*)$$

Supposons que $\big(\tau(1),...\tau(i)\big) = (1,...,i)$. Alors, le nombre de permutations τ vérifiant cette égalité est donné par le nombre de façon de choisir $\tau(1)$, les autres images étant entièrement déterminées par l'égalité. Ainsi, puisque le cycle est de longueur i, il y a i façons de choisir $\tau(1)$, donc i permutations vérifiant cette égalité. Si maintenant $\big(\tau(i+1),...\tau(2i)\big) = (i+1,...,2i)$, alors le même raisonnement s'applique. Ainsi, en associant $\big(\tau(1),...,\tau(i)\big)$ avec $(1,...,i)$, $\big(\tau(i+1),...\tau(2i)\big)$ avec $(i+1,...,2i)$ et ainsi de suite, on a au total i^m permutations vérifiant ces choix.

On aurait aussi pu choisir d'associer les cycles différemment, par exemple $\big(\tau(1),...,\tau(i)\big)$ avec $(i+1,...,2i)$. Etant donné qu'il y a m cycles de même longueur, il y a $m!$ façon d'associer ces cycles entre eux. Alors, on obtient finalement $i^m \times m!$ permutations vérifiant (*).

Dans le cas général, on note m_i le nombre de cycles de longueur i. Il suffit alors d'appliquer le même raisonnement sur chaque bloc de cycles de mêmes longueurs, ce qui donne au final

$$\big|C(\sigma)\big| = \prod_{i\geq 1} i^{m_i} m_i!.$$

□

4.1.2 Les caractères irréductibles

On considère un groupe fini G quelconque. Par la suite nous appliquerons les résultats obtenus au groupe $\mathfrak{S}_n$.

Le but de cette partie est d'aboutir au théorème 4.1.5 qui dit que les caractères irréductibles de G sont une base orthonormées de l'espace vectoriel des fonctions centrales sur G. Pour cela, nous avons besoin de faire quelques rappels de théorie des caractères. On considère cependant acquis les définitions et résultats classiques sur les représentations, comme par exemple le lemme de Schur.

Nous noterons (π, E) une représentation, où E est un espace vectoriel de dimension finie, et χ_π le caractère associé.

Lemme 4.1.2. ***Lemme du projecteur***
On pose $p_\pi = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\pi(g)$ ***moyenne d'une représentation*** (π, E)*. Alors, on a les propriétés suivantes :*
1) p_π *est un projecteur.*
2) On note $E^G := \{x \in E \mid \pi(g)(x) = x \ \forall g \in G\}$ *l'ensemble des points fixes de* G *dans* E*. Alors*

$$E^G = \mathrm{Im}(p_\pi) = \mathrm{Ker}(p_\pi - \mathrm{Id_E}).$$

3) $Tr(p_\pi) = \dim(E^G) = \frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}\chi(g)$*.*

Démonstration. 1) Soit $g \in G$. On a

$$\pi(g)\circ p_\pi = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\pi(g)\circ\pi(h) = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\pi(gh) = \frac{1}{|G|}\sum_{h'\in G}\pi(h') = p_\pi.$$

2) • On a déjà $(p_\pi - Id_E)\circ p_\pi = 0$, donc $\mathrm{Im}(p_\pi) \subset \mathrm{Ker}(p_\pi - \mathrm{Id_E})$. De plus, si $x \in \mathrm{Im}(p_\pi)$, alors $p_\pi(x) - x = 0$, donc on a l'inclusion inverse et donc l'égalité.
• Si $x \in E^G$, alors par définition on a

$$p_\pi(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\pi(g)(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}x = x,$$

donc $E^G \subset \mathrm{Ker}(p_\pi - \mathrm{Id_E})$. De même, si $x = p_\pi(x)$, alors

$$\pi(g)(x) = \big(\pi(g)\circ p_\pi\big)(x) = p_\pi(x) = x,$$

donc $x \in E^G$ d'où finalement la double égalité.
3) Comme p_π est un projecteur, on a $\mathrm{Tr}(p_\pi) = \dim \mathrm{Im}(p_\pi) = \dim(E^G)$ d'après le point précédent. D'autre part, on a

$$\mathrm{Tr}(p_\pi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}(\pi(g)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g),$$

d'où le résultat. □

Proposition 4.1.3. *Soient (π, E) est (ρ, F) deux représentations de G. Alors,*

$$\langle \chi_\pi, \chi_\rho \rangle = \dim \mathrm{Hom}_G(E, F),$$

où $\mathrm{Hom}_G(E, F)$ *est l'ensemble des opérateurs d'entrelacements de E dans F, c'est à dire l'ensemble des applications linéaires $\theta : E \to F$ tels que $\theta \circ \pi = \rho \circ \theta$.*

Démonstration. On sait déjà que $\mathrm{Hom}_G(E, F) = \mathrm{Hom}(E, F)^G$. En effet, si $\varphi \in \mathrm{Hom}(E, F)^G$, alors par définition

$$\rho(g^{-1}) \circ \varphi \circ \pi(g) = \varphi \Leftrightarrow \varphi \circ \pi(g) = \rho(g) \circ \varphi.$$

Ainsi, $\dim \mathrm{Hom}_G(E, F) = \dim \mathrm{Hom}(E, F)^G$.

Ensuite, on va appliquer le lemme précédent à la représentation $\tau : G \to GL\big(\mathrm{Hom}(E, F)\big)$ définie en fonction de π et ρ par

$$\tau(g)(u) := \rho(g) \circ u \circ \pi(g^{-1}), \text{ pour } u \in \mathrm{Hom}(E, F) \text{ et } g \in G$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Hom}(E, F)^G = \mathrm{Tr}(p_\tau) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\tau(g) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_\pi(g)} \chi_\rho(g) = \langle \chi_\pi, \chi_\rho \rangle \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Ces deux propositions permettent de donner un premier résultat important :

Corollaire 4.1.4. *Si χ_π et χ_ρ sont deux caractères de deux représentations irréductibles (π, E) et (ρ, F), alors*

$$\langle \chi_\pi, \chi_\rho \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si E et F sont isomorphes} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. D'après la proposition précédente, $\langle \chi_\pi, \chi_\rho \rangle = \dim \mathrm{Hom}_G(E, F)$ et en appliquant le lemme de Schur, on trouve bien le résultat attendu. □

Soit $n \geq 1$. A partir de maintenant, on pose $G = \mathfrak{S}_n$, et on définit V^n l'espace vectoriel des fonctions centrales sur G, c'est à dire :

$$V^n = \{f : G \to \mathbb{R} \mid \forall s, t \in G,\ f(tst^{-1}) = f(s)\}.$$

On note les deux remarques suivantes (qui résultent simplement des définitions) :

Remarques : 1) Les fonctions centrales sont constantes sur les classes de conjugaison.
2) Un caractère est une fonction centrale.

Posons maintenant $\chi_1, \chi_2, ...$ **les caractères irréductibles** de G. On introduit alors un **produit scalaire hermitien sur** V^n, défini de la façon suivante : pour φ et ψ dans V^n, on a

$$\langle \varphi, \psi \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \varphi(\sigma) \psi(\sigma^{-1}).$$

Remarque : Nous avons déjà vu dans la partie précédente que σ et σ^{-1} appartenaient à la même classe de conjugaison. En particulier, comme les caractères sont constants sur les classes, on a

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi_1(\sigma)\chi_2(\sigma)$$

si χ_1 et χ_2 sont deux caractères de $\mathfrak{S}_n$.

Nous pouvons enfin énoncer le théorème attendu :

Théorème 4.1.5. *Les caractères irréductibles de G forment une base orthonormée de V^n.*

Pour écrire la preuve de ce théorème, nous allons utiliser le résultat suivant :

Lemme 4.1.6. *Soient $\varphi \in V^n$ et (π, E) une représentation de caractère χ. Alors,*
1) $\pi_\varphi := \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} \varphi(g^{-1})\pi(g)$ commute avec $\pi(g)$ pour tout $g \in G$.
2) Si π est irréductible, alors $\pi_\varphi = \frac{\langle \varphi, \chi \rangle_G}{\dim E} id_E$.

Démonstration. 1)

$$\begin{aligned}\pi_\varphi \circ \pi(h) =& \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g^{-1})\pi(gh) = \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} \varphi(hk^{-1}h^{-1})\pi(hk) \\ =& \pi(h) \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} \varphi(k^{-1})\pi(k) = \pi(h) \circ \pi_\varphi.\end{aligned}$$

2) Si π est irréductible, alors d'après le lemme de Schur la dimension de $\mathrm{Hom}_G(E, E)$ est 1 et de plus, π_φ est une homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{C}$. En particulier, $\mathrm{Tr}(\pi_\varphi) = \lambda \dim E$, donc

$$\lambda = \frac{\mathrm{Tr}(\pi_\varphi)}{\dim E} = \frac{1}{\dim E} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g^{-1})\chi(g) = \frac{1}{\dim E} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\varphi(g)}\chi(g) = \frac{\langle \varphi, \chi \rangle_G}{\dim E}.$$

□

Nous pouvons à présent passer à la démonstration du théorème :

Démonstration. (théorème 4.1.5)
Notons C_n le sous-espace vectoriel de V^n engendré par les caractères irréductibles de G. Le corollaire 4.1.4 donne déjà que les caractères irréductibles sont une famille orthonormée de V^n, ils sont donc linéairement indépendants. Comme $V^n = C_n \oplus C_n^\perp$, il suffit de montrer que $C_n^\perp = \{0\}$.

Soient χ un caractère irréductible et φ une fonction centrale telle que $\varphi \in C_n^\perp$. On a donc $\langle \varphi, \chi \rangle_G = 0$ et $\pi_\varphi \equiv 0$ avec les notations du lemme. Montrons donc que $\varphi \equiv 0$.

Si (π, E) est une représentation de G, alors d'après le théorème de Maschke, on a $\pi = \bigoplus\limits_{j \geq 1} (\pi_j, E_j)$ où (π_j, E_j) sont des représentations irréductibles de G. Notons $\pi_{j,\varphi}$ l'application associée à φ et π_j donnée par le lemme précédent et décomposons x dans chaque E_j : $x = \sum\limits_{j=1}^{r} x_j$, avec $x_j \in E_j$.

On a

$$\pi_\varphi(x) = \sum_{j=1}^{r} \pi_\varphi(x_j) = \sum_{j=1}^{r} \pi_{j,\varphi}(x_j) = 0$$

donc finalement π_φ est la fonction nulle pour toute représentation (et non pas seulement pour une représentation irréductible).

Ainsi, on peut appliquer ce résultat à la représentation régulière π_{reg} de G, ce qui donne que

$$\sum_{g \in G} \varphi(g^{-1})\pi_{reg}(g) = 0.$$

Mais par définition, les $\pi_{reg}(g)$ sont linéairement indépendants dans $GL(\mathbb{C}^G)$, donc en fait quelque soit $g \in G$, $\varphi(g^{-1}) = 0$, d'où $\varphi \equiv 0$. □

Remarque : Nous pouvons aussi noter que, puisque G est un groupe fini, il existe une autre base évidente des fonctions centrales. Pour toute classe de conjugaison $\mathscr{C}$, on pose $\delta_{\mathscr{C}} : G \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\delta_{\mathscr{C}}(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h \in \mathscr{C} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En effet, si pour $\varphi \in V^n$, $\varphi_{\mathscr{C}}$ désigne la valeur de φ sur la classe $\mathscr{C}$, on a

$$\varphi = \sum_{\mathscr{C}} \varphi_{\mathscr{C}} \delta_{\mathscr{C}}.$$

On appelle $(\delta_{\mathscr{C}})_{\mathscr{C}}$ la **famille des fonctions indicatrices**. En particulier, il y a autant de classes de conjugaison que de caractères irréductibles.

Nous avons ainsi deux bases de V^n, et la matrice de passage entre ces deux bases est donnée par la table de caractères de G. En effet d'après la définition des $\delta_{\mathscr{C}}$, on a pour tout i

$$\chi_i = \sum_{\mathscr{C}} \chi_i(\mathscr{C}) \delta_{\mathscr{C}}.$$

4.1.3 L'application caractéristique

Nous arrivons à la dernière partie de ce mémoire : l'objectif est d'aboutir au résultat qui dit que la matrice de passage entre les fonctions de Schur et les sommes de Newton est donnée par la table de caractère de $\mathfrak{S}_n$. Ce résultat fera l'objet du tout dernier théorème, et utilise quelques propriétés sur les représentations induites dont certains seront rappelés par la suite.

Le théorème 4.1.5 de la partie précédente nous permet d'écrire la chose suivante : si $\chi_1, \chi_2, ...$ sont les caractères irréductibles de $\mathfrak{S}_n$, alors

Pour généraliser, un peu comme nous avions procéder pour Λ_n, on pose $V = \bigoplus_{n \geq 0} V^n$ avec la convention que $V^0 = \mathbb{R}$.

Maintenant, étant donné la construction de V, on aimerait pouvoir donner à ce dernier une structure d'anneau gradué, et donc le munir d'un produit. Pour cela, nous allons utiliser la définition suivante :

Définition 4.1.7. ***Sous-groupes de Young***
Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mu = (\mu_1, ..., \mu_p)$ une suite finie d'entiers strictement positifs dont la somme est n. Il existe un morphisme injectif de groupes :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_\mu := \mathfrak{S}_{\mu_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\mu_p} &\to \mathfrak{S}_n \\ (\sigma_1, \cdots, \sigma_p) &\mapsto \sigma_1 \times \cdots \times \sigma_p \end{aligned}$$

où $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_p$ est la permutation obtenue en décomposant l'ensemble $\{1, ..., n\}$ en une réunion disjointe de blocs

$$\{1, ..., \mu_1\} \sqcup \{\mu_1 + 1, ..., \mu_1 + \mu_2\} \sqcup \cdots \sqcup \{\mu_1 + ... + \mu_{p-1} + 1, ..., \mu_1 + ... + \mu_p\}$$

et en faisant agir σ_1 sur le premier bloc, σ_2 sur le deuxième, et ainsi de suite. On identifie alors $\mathfrak{S}_\mu$ à son image, qu'on appelle sous-groupe de Young.

Nous nous servirons en fait de cette définition seulement dans le cas où $p = 2$, avec $\mu = (m, n)$: c'est l'objet de la remarque suivante :

Remarque : Si m et n sont deux entiers strictement positifs, on identifie $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n$ au sous-groupe de Young $\mathfrak{S}_{m+n}$. Ainsi, si $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ et $\tau \in \mathfrak{S}_n$, le produit $\sigma \times \tau$ est correctement défini dans $\mathfrak{S}_{m+n}$. De plus, le type de cycle de $\sigma \times \tau$ est donné par

$$\rho(\sigma \times \tau) = \rho(\sigma) \cup \rho(\tau),$$

de telle sorte que

$$p_{\rho(\sigma \times \tau)} = p_{\rho(\sigma)} p_{\rho(\tau)}$$

où p est la les sommes de Newton.

Tout ceci permet finalement de munir V d'une structure d'anneau gradué : en effet, si $\varphi \in V_m$ et $\psi \in V^n$, alors on peut définir la multiplication suivante :

$$\varphi \cdot \psi = \mathrm{ind}_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{m+n}} (\varphi \times \psi) \in V^{m+n}$$

avec $\varphi \times \psi : \mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n \to \mathbb{R}$ telle que $\big(\varphi \times \psi\big)(\sigma \times \tau) = \varphi(\sigma)\psi(\tau)$.

De plus, on peut étendre le produit scalaire défini pour V^n à V : si $\varphi, \psi \in V$, alors on peut écrire $\varphi = \sum\limits_{n \geq 0} \varphi_n$ et $\psi = \sum\limits_{n \geq 0} \psi_n$, avec $\varphi_n, \psi_n \in V^n$ et donc

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{n \geq 0} \langle \varphi_n, \psi_n \rangle_{\mathfrak{S}_n}.$$

La définition suivante constitue la clé de cette partie :

Définition 4.1.8. ***Application caractéristique***
On pose ch l'application définie de V dans $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ pour chaque $n \geq 1$ et $\varphi \in V$ par

$$ch(\varphi) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varphi(\sigma) p_{\rho(\sigma)}.$$

On dit que $ch(\varphi)$ est la caractéristique de φ, et que ch est l'application caractéristique.

Remarque : On peut aussi poser f l'application de $\mathfrak{S}_n$ dans Λ_n qui à une permutation σ lui associe $p_{\rho(\sigma)}$, ce qui permet d'écrire ch comme

$$ch(\varphi) = \langle \varphi, f \rangle_{\mathfrak{S}_n}$$

pour toute $\varphi \in V^n$.

Proposition 4.1.9. *Soit $\varphi \in V^n$. Si φ_ρ désigne la valeur prise par φ sur les éléments de $\mathfrak{S}_n$ dont le type de cycle est ρ (c'est à dire les éléments d'une même classe de conjugaison), alors on a*

$$ch(\varphi) = \sum_{|\rho| = n} \frac{1}{z_\rho} \varphi_\rho p_\rho.$$

Démonstration. On pose Cl_ρ la classe de conjugaison des éléments ayant pour type de cycle ρ. Alors, $\mathfrak{S}_n$ agit transitivement sur Cl_ρ, et le stabilisateur de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sous cette action est le centralisateur $C(\sigma)$ dont le cardinal est z_ρ d'après la proposition 4.1.1. Ainsi, par la formule des classes, on a

$$\frac{|\mathfrak{S}_n|}{|C(\sigma)|} = |Cl_\rho| \Leftrightarrow \frac{1}{z_\rho} = \frac{|Cl_\rho|}{n!}.$$

D'autre part, puisque les fonctions centrales sont constantes sur les classes de conjugaison, on a

$$ch(\varphi) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varphi(\sigma) p_{\rho(\sigma)} = \frac{1}{n!} \sum_{Cl_\rho} |Cl_\rho| \varphi_\rho p_\rho = \sum_{|\rho| = n} \frac{1}{z_\rho} \varphi_\rho p_\rho.$$

□

On a un premier résultat important :

Théorème 4.1.10. *L'application ch est un isomorphisme isométrique d'anneaux gradués de V dans $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.*

La démonstration de ce théorème utilise un résultat fondamental sur les caractères des représentations induites :

Théorème 4.1.11. ***Réciprocité de Frobenius***
Soient ψ une fonction centrale sur H et φ une fonction centrale sur G. Alors,

$$\langle \psi, Res_H^G \varphi \rangle_H = \langle Ind_H^G \psi, \varphi \rangle_G.$$

Démonstration. Cette formule se démontre par un calcul direct :

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{Ind}_H^G \psi, \varphi \rangle_G =& \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\mathrm{Ind}_h^G \psi(g)\right) \overline{\varphi(g)} \\
=& \frac{1}{|G|} \frac{1}{|H|} \sum_{g \in G} \sum_{\substack{x \in G \\ xgx^{-1} \in H}} \psi(xgx^{-1}) \overline{\varphi(g)} \\
=& \frac{1}{|G|} \frac{1}{|H|} \sum_{y \in G} \sum_{\substack{y \in H \\ y = xgx^{-1}}} \psi(y) \overline{\varphi(y)} \\
=& \frac{1}{|H|} \sum_{y \in H} \psi(y) \overline{\varphi(y)} \\
=& \langle \psi, \varphi|_H \rangle_H
\end{aligned}$$

□

Démonstration. (théorème 4.1.10)
• Montrons d'abord que ch est une isométrie : soient φ et ψ deux éléments de V^n et V^m respectivement. Alors, d'après les proposition 4.1.9 et 3.3.3, on a

$$\langle ch(\varphi), ch(\psi) \rangle = \langle \sum_{|\rho|=n} \frac{1}{z_\rho} \varphi_\rho p_\rho, \sum_{|\rho|=n} \frac{1}{z_\rho} \psi_\rho p_\rho \rangle = \sum_{|\rho|=n} \frac{1}{(z_\rho)^2} \varphi_\rho \psi_\rho \langle p_\rho, p_\rho \rangle = \sum_{|\rho|=n} \frac{1}{z_\rho} \varphi_\rho \psi_\rho = \langle \varphi, \psi \rangle_{\mathfrak{S}_n}.$$

En particulier, ch est une isométrie.

• Montrons que ch est un morphisme d'anneaux : par construction, ch est additif. Soient φ et ψ deux éléments de V^n. Alors, d'après la réciprocité de Frobenius et la remarque précédent la proposition 4.1.9, on a

$$\begin{aligned}
ch(\varphi \cdot \psi) =& \langle \mathrm{ind}_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{m+n}} (\varphi \times \psi), f \rangle_{\mathfrak{S}_{m+n}} \\
=& \langle \varphi \times \psi, \mathrm{res}_{\mathfrak{S}_{m+n}}^{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n} (f) \rangle_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n} \\
=& \frac{1}{m!n!} \sum_{(\sigma,\tau) \in \mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n} \varphi \times \psi(\sigma \times \tau) \mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_{m+n}}^{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n} f(\sigma, \tau) \\
=& \frac{1}{m!n!} \sum_{(\sigma,\tau) \in \mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n} \varphi(\sigma) \psi(\tau) f(\sigma) f(\tau) \\
=& \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \varphi(\sigma) f(\sigma) \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \psi(\tau) f(\tau) \\
=& \langle \varphi, f \rangle_{\mathfrak{S}_m} \langle \psi, f \rangle_{\mathfrak{S}_n} \\
=& ch(\varphi) \cdot ch(\psi)
\end{aligned}$$

donc ch est bien un morphisme d'anneaux.

Par ailleurs, le nombre de caractères irréductibles de $\mathfrak{S}_n$ étant égal au nombre de classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ et donc au nombre de partitions de n, on $\dim(V^n) = \dim(\Lambda^n)$, donc ch est un isomorphisme de V^n dans Λ^n pour chaque n, donc un isomorphisme de V dans Λ. □

Nous venons de montrer que ch était un isomorphisme : il existe donc pour chaque n une base, notée $(\chi^\lambda)_\lambda$, telle que $ch(\chi^\lambda) = s_\lambda$, avec $|\lambda| = n$.

Par ailleurs, on définit pour chaque $n \geq 1$, le $\mathbb{Z}$-module R^n engendré par les caractères irréductibles de $\mathfrak{S}_n$:

$$R^n = \{n_1 \chi_1 + n_2 \chi_2 + ... \mid n_i \in \mathbb{Z}\}.$$

En particulier, R^n est un sous-groupe de V^n et on pose $R := \bigoplus_{n\geq 0} R^n$ qui est un sous-anneau de V.

On pose aussi η_n le caractère trivial de $\mathfrak{S}_n$. Alors, d'après la proposition 4.1.9 mais aussi la proposition 3.2.18, on a

$$ch(\eta_n) = \sum_{|\rho|=n} \frac{1}{z_\rho} p_\rho = h_n.$$

Le théorème suivant permet enfin de faire le lien entre les χ^λ et les caractères irréductibles de $\mathfrak{S}_n$.

Théorème 4.1.12. *Les caractères irréductibles de $\mathfrak{S}_n$ sont, au signe près, les χ^λ tels que $|\lambda| = n$.*

Démonstration. Soit λ une partition de n. On commence par montrer que $\chi^\lambda \in R^n$. Pour cela, posons

$$\eta_\lambda = \eta_{\lambda_1} \cdot \eta_{\lambda_2} \cdot \ldots .$$

Alors, η_λ est bien un caractère de $\mathfrak{S}_n$ d'après la définition 4.1.7 et comme ch est un morphisme d'anneaux, on a

$$ch(\eta_\lambda) = \prod_n ch(\eta_n) = \prod_n \sum_{|\lambda|=n} \frac{p_\lambda}{z_\lambda} = \prod_n h_n = h_\lambda.$$

D'après le lemme 3.2.23, on a $s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i+j})_{1\leq i,j\leq n}$ et donc par définition de χ^λ,

$$\chi^\lambda = \det(\eta_{\lambda_{i-1+j}})_{1\leq i,j\leq n}$$

donc $\chi^\lambda \in R_n$. D'autre part, le théorème précédent donne que ch est une isométrie, et comme la famille des s_λ est orthonormée pour le produit scalaire, on a aussi

$$\langle \chi^\lambda, \chi^\mu \rangle = \langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$$

pour λ et μ deux partitions de n.

En combinant ces deux résultats, on obtient que

$$\langle \chi^\lambda, \chi^\lambda \rangle = \sum_{i\geq 1} n_i^2 \langle \chi_i, \chi_i \rangle = \sum_{i\geq 1} n_i^2 = 1$$

donc comme les n_i sont tous entiers, on a $\chi^\lambda = \pm\chi_i$ pour un i. □

Théorème 4.1.13. *La matrice de passage de la famille $(s_\lambda)_\lambda$ à la famille (p_λ) est la table de caractères de $\mathfrak{S}_n$. Autrement dit, pour chaque type de cycle ρ, on a*

$$p_\rho = \sum_{|\lambda|=n} \chi^\lambda(\rho) s_\lambda$$

avec $\chi^\lambda(\rho)$ la valeur de χ^λ sur la classe de conjugaison indexée par ρ.

Démonstration. Pour un caractère χ^λ, on a $ch_n(\chi^\lambda) = s_\lambda$. Ainsi, d'après la proposition 4.1.9, on a

$$ch_n(\chi^\lambda) = s_\lambda = \sum_{|\rho|=n} \frac{1}{z_\rho} \chi^\lambda(\rho) p_\rho. \qquad (*)$$

De plus, la proposition 3.3.3 donne que $\langle s_\lambda, p_\rho \rangle_{\Lambda^n} = \sum_{|\mu|=n} \frac{1}{z_\mu} \chi^\lambda(\mu) \langle p_\mu, p_\rho \rangle_{\Lambda^n} = \chi^\lambda(\rho)$.

Maintenant, comme les fonctions de Schur sont orthonormées pour le produit scalaire, on obtient en combinant ces deux formules

$$\langle s_\lambda, s_\rho \rangle_{\Lambda^n} = \delta_{\lambda\rho} = \sum_{|\mu|=n} \frac{1}{z_\mu} \chi^\lambda(\mu) \langle s_\rho, p_\mu \rangle_{\Lambda^n} = \sum_{|\mu|=n} \frac{1}{z_\mu} \chi^\lambda(\mu) \chi^\rho(\mu)$$

donc les matrices $\left(\frac{1}{z_\rho}\chi^\lambda(\rho)\right)_{\lambda,\rho}$ et $(\chi^\lambda(\rho))_{\rho,\lambda}$ sont inverses l'une de l'autre (à transposée près).
Finalement d'après (*), on obtient bien

$$p_\rho = \sum_{|\lambda|=n} \chi^\lambda(\rho) s_\lambda.$$

□

5 Un exemple : la table de $\mathfrak{S}_4$

$\mathscr{P}_4 = \{(4), (3,1), (2,2), (2,1,1), (1,1,1,1)\} = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5\}$

Les sommes de Newton de Λ_4 :

$p_{\rho_1} = X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 + X_4^4$

$p_{\rho_2} = X_1^4 + X_1^3X_2 + X_1X_2^3 + X_2^4 + X_1^3X_3 + X_2^3X_3 + X_1X_3^3 + X_2X_3^3 + X_3^4 + X_1^3X_4 + X_2^3X_4 + X_3^3X_4 + X_1X_4^3 + X_2X_4^3 + X_3X_4^3 + X_4^4$

$p_{\rho_3} = X_1^4 + 2X_1^2X_2^2 + X_2^4 + 2X_1^2X_3^2 + 2X_2^2X_3^2 + X_3^4 + 2X_1^2X_4^2 + 2X_2^2X_4^2 + 2X_3^2X_4^2 + X_4^4$

$p_{\rho_4} = X_1^4 + 2X_1^3X_2 + 2X_1^2X_2^2 + 2X_1X_2^3 + X_2^4 + 2X_1^3X_3 + 2X_1^2X_2X_3 + 2X_1X_2^2X_3 + 2X_2^3X_3 + 2X_1^2X_3^2 + 2X_1X_2X_3^2 + 2X_2^2X_3^2 + 2X_1X_3^3 + 2X_2X_3^3 + X_3^4 + 2X_1^3X_4 + 2X_1^2X_2X_4 + 2X_1X_2^2X_4 + 2X_2^3X_4 + 2X_1^2X_3X_4 + 2X_2^2X_3X_4 + 2X_1X_3^2X_4 + 2X_2X_3^2X_4 + 2X_3^3X_4 + 2X_1^2X_4^2 + 2X_1X_2X_4^2 + 2X_2^2X_4^2 + 2X_1X_3X_4^2 + 2X_2X_3X_4^2 + 2X_3^2X_4^2 + 2X_1X_4^3 + 2X_2X_4^3 + 2X_3X_4^3 + X_4^4$

$p_{\rho_5} = X_1^4 + 4X_1^3X_2 + 6X_1^2X_2^2 + 4X_1X_2^3 + X_2^4 + 4X_1^3X_3 + 12X_1^2X_2X_3 + 12X_1X_2^2X_3 + 4X_2^3X_3 + 6X_1^2X_3^2 + 12X_1X_2X_3^2 + 6X_2^2X_3^2 + 4X_1X_3^3 + 4X_2X_3^3 + X_3^4 + 4X_1^3X_4 + 12X_1^2X_2X_4 + 12X_1X_2^2X_4 + 4X_2^3X_4 + 12X_1^2X_3X_4 + 24X_1X_2X_3X_4 + 12X_2^2X_3X_4 + 12X_1X_3^2X_4 + 12X_2X_3^2X_4 + 4X_3^3X_4 + 6X_1^2X_4^2 + 12X_1X_2X_4^2 + 6X_2^2X_4^2 + 12X_1X_3X_4^2 + 12X_2X_3X_4^2 + 6X_3^2X_4^2 + 4X_1X_4^3 + 4X_2X_4^3 + 4X_3X_4^3 + X_4^4$

$\mathscr{P}_4 = \{(4), (3,1), (2,2), (2,1,1), (1,1,1,1)\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5\}$

Les fonctions de Schur de Λ_4 :

$s_{\lambda_1} = X_0^4 + X_0^3X_1 + X_0^2X_1^2 + X_0X_1^3 + X_1^4 + X_0^3X_2 + X_0^2X_1X_2 + X_0X_1^2X_2 + X_1^3X_2 + X_0^2X_2^2 + X_0X_1X_2^2 + X_1^2X_2^2 + X_0X_2^3 + X_1X_2^3 + X_2^4 + X_0^3X_3 + X_0^2X_1X_3 + X_0X_1^2X_3 + X_1^3X_3 + X_0^2X_2X_3 + X_0X_1X_2X_3 + X_1^2X_2X_3 + X_0X_2^2X_3 + X_1X_2^2X_3 + X_2^3X_3 + X_0^2X_3^2 + X_0X_1X_3^2 + X_1^2X_3^2 + X_0X_2X_3^2 + X_1X_2X_3^2 + X_2^2X_3^2 + X_0X_3^3 + X_1X_3^3 + X_2X_3^3 + X_3^4$

$s_{\lambda_2} = X_0^3X_1 + X_0^2X_1^2 + X_0X_1^3 + X_0^3X_2 + 2X_0^2X_1X_2 + 2X_0X_1^2X_2 + X_1^3X_2 + X_0^2X_2^2 + 2X_0X_1X_2^2 + X_1^2X_2^2 + X_0X_2^3 + X_1X_2^3 + X_0^3X_3 + 2X_0^2X_1X_3 + 2X_0X_1^2X_3 + X_1^3X_3 + 2X_0^2X_2X_3 + 3X_0X_1X_2X_3 + 2X_1^2X_2X_3 + 2X_0X_2^2X_3 + 2X_1X_2^2X_3 + X_2^3X_3 + X_0^2X_3^2 + 2X_0X_1X_3^2 + X_1^2X_3^2 + 2X_0X_2X_3^2 + 2X_1X_2X_3^2 + X_2^2X_3^2 + X_0X_3^3 + X_1X_3^3 + X_2X_3^3$

$s_{\lambda_3} = X_0^2X_1^2 + X_0^2X_1X_2 + X_0X_1^2X_2 + X_0^2X_2^2 + X_0X_1X_2^2 + X_1^2X_2^2 + X_0^2X_1X_3 + X_0X_1^2X_3 + X_0^2X_2X_3 + 2X_0X_1X_2X_3 + X_1^2X_2X_3 + X_0X_2^2X_3 + X_1X_2^2X_3 + X_0^2X_3^2 + X_0X_1X_3^2 + X_1^2X_3^2 + X_0X_2X_3^2 + X_1X_2X_3^2 + X_2^2X_3^2$

$s_{\lambda_4} = X_0^2X_1X_2 + X_0X_1^2X_2 + X_0X_1X_2^2 + X_0^2X_1X_3 + X_0X_1^2X_3 + X_0^2X_2X_3 + 3X_0X_1X_2X_3 + X_1^2X_2X_3 + X_0X_2^2X_3 + X_1X_2^2X_3 + X_0X_1X_3^2 + X_0X_2X_3^2 + X_1X_2X_3^2$

$s_{\lambda_5} = X_0X_1X_2X_3$

$$
\begin{aligned}
p_{\rho_1} &= s_{\lambda_1} - s_{\lambda_2} + s_{\lambda_4} - s_{\lambda_5} && \longrightarrow (1, -1, 0, 1, -1)\\
p_{\rho_2} &= s_{\lambda_1} - s_{\lambda_3} + s_{\lambda_5} && \longrightarrow (1,\ 0, -1,\ 0,\ 1)\\
p_{\rho_3} &= s_{\lambda_1} - s_{\lambda_2} + 2s_{\lambda_3} - s_{\lambda_4} + s_{\lambda_5} && \longrightarrow (1, -1,\ 2, -1,\ 1)\\
p_{\rho_4} &= s_{\lambda_1} + s_{\lambda_2} - s_{\lambda_4} - s_{\lambda_5} && \longrightarrow (1,\ 1,\ 0, -1, -1)\\
p_{\rho_5} &= s_{\lambda_1} + 3s_{\lambda_2} + 2s_{\lambda_3} + 3s_{\lambda_4} + s_{\lambda_5} && \longrightarrow (1,\ 3,\ 2,\ 3,\ 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c}
\\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \rho_4 & \rho_5 \end{array}\\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
-1 & 0 & -1 & 1 & 3\\
0 & -1 & 2 & 0 & 2\\
1 & 0 & -1 & -1 & 3\\
-1 & 1 & 1 & -1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$