Analyse Topologique des Structures Musicales via l'Homologie Persistante

Victoria Callet

Doctorante en Mathématiques à l'IRMA, Strasbourg
sous la supervision de Pierre Guillot et Moreno Andreatta

victoria.callet@math.unistra.fr

Séminaire - IRIMAS, UHA, Mulhouse

12/05/2022

L'homologie persistante, c'est quoi ?

- Outil de la **théorie simpliciale**.
- **But :** Mesurer l'évolution de l'homologie simpliciale à travers le "temps".
- Entre la topologie algébrique et les mathématiques appliquées.
- Analyse Topologique des Données $\rightarrow$ **reconnaissance de forme**.
- Différents domaines d'applications : médecine, biologie, physique, **musique**,...

Introduction - Plan de l'exposé

1. Théorie simpliciale
   - Complexes simpliciaux
   - Complexes de chaînes
   - Homologie simpliciale
2. Homologie persistante
   - Filtration et persistance
   - Visualisation par les codes barres
   - Analyse topologique des données
3. Homologie persistante et analyse musicale
   - Application aux mesures d'un morceau
   - Des cycles en degré 1
   - Degré 0 et structure des morceaux

I/ Théorie simpliciale

1) Complexes simpliciaux

Définition :

Un complexe simplicial est un couple (V, K) où V est un ensemble de **sommets** et $K \subset \mathcal{P}(V)$ est un ensemble de **simplexes** tels que

- $V = \bigcup\limits_{\sigma \in K} \sigma$
- if $\sigma \in K$ et $\tau \subset \sigma$, alors $\tau \in K$.

1) Complexes simpliciaux

Définition :

Un complexe simplicial est un couple (V, K) où V est un ensemble de **sommets** et $K \subset \mathcal{P}(V)$ est un ensemble de **simplexes** tels que

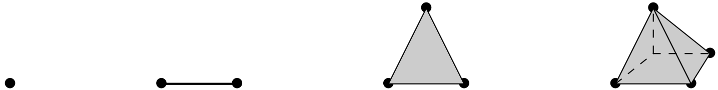
- $V = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$
- if $\sigma \in K$ et $\tau \subset \sigma$, alors $\tau \in K$.

Vocabulaire :

- Si $\sigma \in K$ est un simplexe, alors $\dim \sigma = |\sigma| - 1$
- On dit que σ est un n-**simplex** si $|\sigma| = n + 1$
- La dimension du complexe est $\dim(V, K) = \sup_{\sigma \in K} \dim \sigma$
- En général, on désigne par K le complexe simplicial (V, K).

1) Complexes simpliciaux

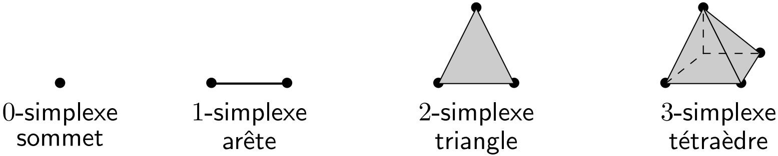
On peut toujours penser à un complexe via sa **réalisation géométrique** :



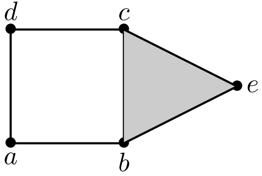
0-simplexe sommet | 1-simplexe arête | 2-simplexe triangle | 3-simplexe tétraèdre

Réalisation géométrique des n-simplexes.

On peut toujours penser à un complexe via sa **réalisation géométrique** :



Réalisation géométrique des n-simplexes.



Un complexe simplicial (V, K) de dimension 2 : l'ensemble des sommets est $V = \{a, b, c, d, e\}$ et le "plus gros simplexe" est le triangle $\{c, b, e\}$.

2) Complexes de chaînes

On considère **le corps $\mathbb{F}_2$ à deux éléments.**

Soit K un complexe simplicial.

Définition :

- Le n**ième** **groupe de chaîne** $C_n(K, \mathbb{F}_2)$ de K est le $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel sur l'ensemble des n-simplexes de K.
- Une n-**chaîne** $c \in C_n(K)$ est une *somme formelle* $c = \sum_\sigma \lambda_\sigma \sigma$ où $\lambda_\sigma \in \mathbb{F}_2$.

Notations : Quand le contexte est clair, on écrit $C_n(K)$ ou C_n pour $C_n(K, \mathbb{F}_2)$.

2) Complexes de chaînes

On considère **le corps $\mathbb{F}_2$ à deux éléments.**

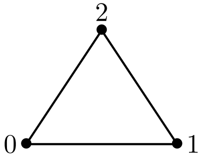
Soit K un complexe simplicial.

Définition :

- Le n**ième** **groupe de chaîne** $C_n(K, \mathbb{F}_2)$ de K est le $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel sur l'ensemble des n-simplexes de K.
- Une n-**chaîne** $c \in C_n(K)$ est une *somme formelle* $c = \sum_\sigma \lambda_\sigma \sigma$ où $\lambda_\sigma \in \mathbb{F}_2$.

Notations : Quand le contexte est clair, on écrit $C_n(K)$ ou C_n pour $C_n(K, \mathbb{F}_2)$.

L'exemple de la sphère $\mathbb{S}^1$:



Le complexe simplicial $\mathbb{S}^1$

$$
\begin{aligned}
C_0(\mathbb{S}^1) &= \mathbb{F}_2 \cdot \{0\} \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \{1\} \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \{2\} \\
C_1(\mathbb{S}^1) &= \mathbb{F}_2 \cdot \{01\} \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \{12\} \oplus \mathbb{F}_2 \cdot \{02\} \\
C_n(\mathbb{S}^1) &= 0 \text{ pour } n \geq 2 \text{ et } n < 0
\end{aligned}
$$

2) Complexes de chaînes

Définition :

L'**opérateur bord** $\partial_n : C_n(K) \to C_{n-1}(K)$ est un morphisme défini linéairement sur une chaîne c via son action sur les simplexes $\sigma = \{v_0, v_1, \dots v_n\}$ de c :

$$\partial_n \sigma = \sum_i \{v_0, v_1, \dots, \hat{v_i}, \dots, v_n\}$$

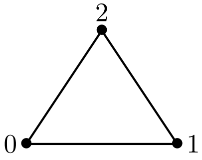
2) Complexes de chaînes

Définition :

L'**opérateur bord** $\partial_n : C_n(K) \to C_{n-1}(K)$ est un morphisme défini linéairement sur une chaîne c via son action sur les simplexes $\sigma = \{v_0, v_1, \dots v_n\}$ de c :

$$\partial_n \sigma = \sum_i \{v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n\}$$

L'exemple de la sphère $\mathbb{S}^1$:



$\mathbb{S}^1$

$$\begin{aligned} \partial_1\{01\} &= \{1\} + \{0\} \\ \partial_1\{12\} &= \{2\} + \{1\} \\ \partial_1\{02\} &= \{2\} + \{0\} \end{aligned}$$

$$\partial_1\big(\{01\} + \{12\} + \{20\}\big) = 2\big(\{0\} + \{1\} + \{2\}\big) = 0$$

2) Complexes de chaînes

Lemme : (Fondamental)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la composition suivante est nulle :

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0.$$

On a ainsi une suite de groupes de chaînes et d'opérateurs bords

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$$

telle que $\operatorname{im} \partial_{n+1} \subset \ker \partial_n$ pour tout n.

2) Complexes de chaînes

Lemme : (Fondamental)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la composition suivante est nulle :

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0.$$

On a ainsi une suite de groupes de chaînes et d'opérateurs bords

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$$

telle que $\operatorname{im} \partial_{n+1} \subset \ker \partial_n$ pour tout n.

Définition :

Un **complexe de chaîne** est un couple $\big((C_*)_*, \partial\big)$ où $(C_*)_*$ est un ensemble de groupes de chaîne et ∂ est l'opérateur bord associé.

3) Homologie simpliciale

Soit K un complexe simplicial.

Notations:

- $Z_n(K) = \ker \partial_n$ est l'ensemble des n-**cycles**
- $B_n(K) = \operatorname{im} \partial_{n+1}$ est l'ensemble des n-**bords**

Puisque $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$, on a $B_n(K) \subset Z_n(K)$ pour tout n.

3) Homologie simpliciale

Soit K un complexe simplicial.

Notations:

- $Z_n(K) = \ker \partial_n$ est l'ensemble des n-**cycles**
- $B_n(K) = \operatorname{im} \partial_{n+1}$ est l'ensemble des n-**bords**

Puisque $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$, on a $B_n(K) \subset Z_n(K)$ pour tout n.

Définition :

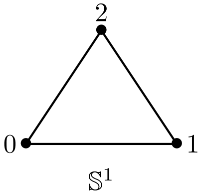
- Le $n^{\text{ième}}$ **groupe d'homologie** de K est le quotient

$$H_n(K) = {}^{Z_n(K)}/_{B_n(K)}.$$

- Le $n^{\text{ième}}$ **nombre de Betti** est le nombre $\beta_n(K) = \dim H_n(K)$.

L'exemple de $\mathbb{S}^1$:

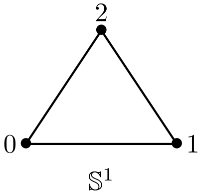
$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_0} 0$$



3) Homologie simpliciale

L'exemple de $\mathbb{S}^1$:

$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

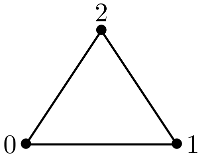


- $B_1(\mathbb{S}^1) = \operatorname{im}\partial_2 = 0$ donc $H_1(\mathbb{S}^1) = {}^{Z_1(\mathbb{S}^1)}\big/_{B_1(\mathbb{S}^1)} = \ker\partial_1$.

  $\ker\partial_1 = \mathbb{F}_2 \cdot \big(\{01\} + \{02\} + \{12\}\big)$ d'où $H_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{F}_2$ et $\beta_1(\mathbb{S}^1) = 1$.

3) Homologie simpliciale

L'exemple de $\mathbb{S}^1$:



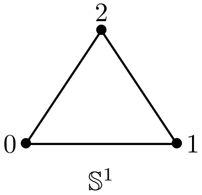
$\mathbb{S}^1$

$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

- $B_1(\mathbb{S}^1) = \operatorname{im} \partial_2 = 0$ donc $H_1(\mathbb{S}^1) = {}^{Z_1(\mathbb{S}^1)}/_{B_1(\mathbb{S}^1)} = \ker \partial_1$.
  $\ker \partial_1 = \mathbb{F}_2 \cdot (\{01\} + \{02\} + \{12\})$ d'où $H_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{F}_2$ et $\beta_1(\mathbb{S}^1) = 1$.
- $H_0(\mathbb{S}^1) = {}^{Z_0(\mathbb{S}^1)}/_{B_0(\mathbb{S}^1)}$, mais $\dim B_0(\mathbb{S}^1) = \dim \operatorname{im} \partial_1 = 2$
  $Z_0(\mathbb{S}^1) = \ker \partial_0 = C_0(\mathbb{S}^1)$ et donc $H_0(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{F}_2$ and $\beta_0(\mathbb{S}^1) = 1$.

L'exemple de $\mathbb{S}^1$:

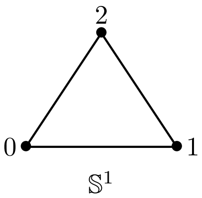
$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_0} 0$$



- $B_1(\mathbb{S}^1) = \operatorname{im} \partial_2 = 0$ donc $H_1(\mathbb{S}^1) = {}^{Z_1(\mathbb{S}^1)}\big/_{B_1(\mathbb{S}^1)} = \ker \partial_1$.
  $\ker \partial_1 = \mathbb{F}_2 \cdot \big(\{01\} + \{02\} + \{12\}\big)$ d'où $H_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{F}_2$ et $\beta_1(\mathbb{S}^1) = 1$.
- $H_0(\mathbb{S}^1) = {}^{Z_0(\mathbb{S}^1)}\big/_{B_0(\mathbb{S}^1)}$, mais $\dim B_0(\mathbb{S}^1) = \dim \operatorname{im} \partial_1 = 2$
  $Z_0(\mathbb{S}^1) = \ker \partial_0 = C_0(\mathbb{S}^1)$ et donc $H_0(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{F}_2$ and $\beta_0(\mathbb{S}^1) = 1$.
- $H_n(\mathbb{S}^1) = 0$ dans tous les autres cas.

3) Homologie simpliciale

L'exemple de $\mathbb{S}^1$:



$$0 \xrightarrow{\partial_2} C_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

- $B_1(\mathbb{S}^1) = \operatorname{im} \partial_2 = 0$ donc $H_1(\mathbb{S}^1) = {Z_1(\mathbb{S}^1)}/{B_1(\mathbb{S}^1)} = \ker \partial_1$.
  $\ker \partial_1 = \mathbb{F}_2 \cdot \left(\{01\} + \{02\} + \{12\}\right)$ d'où $H_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{F}_2$ et $\beta_1(\mathbb{S}^1) = 1$.
- $H_0(\mathbb{S}^1) = {Z_0(\mathbb{S}^1)}/{B_0(\mathbb{S}^1)}$, mais $\dim B_0(\mathbb{S}^1) = \dim \operatorname{im} \partial_1 = 2$
  $Z_0(\mathbb{S}^1) = \ker \partial_0 = C_0(\mathbb{S}^1)$ et donc $H_0(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{F}_2$ and $\beta_0(\mathbb{S}^1) = 1$.
- $H_n(\mathbb{S}^1) = 0$ dans tous les autres cas.

Généralisation : pour tous n et k, on a $H_n(\mathbb{S}^k) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } n = 0 \text{ ou } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

II/ Homologie persistante

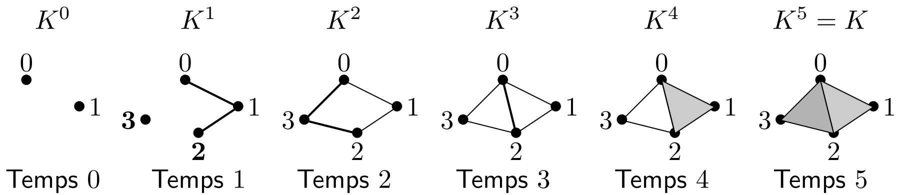
1) Filtration et persistance

Soit K un complexe simplicial.

Définition :

Une **filtration** de K est une suite croissante de sous-complexes de K :

$$\emptyset = K^{-1} \subseteq K^0 \subseteq K^1 \subseteq \ldots \subseteq K^N = K$$



On dit que K est un **complexe filtré**.

1) Filtration et persistance

$$\emptyset = K^{-1} \subseteq K^0 \subseteq K^1 \subseteq \ldots \subseteq K^N = K$$

Pour toute paire (i, p), on a $\eta^{i,p} : K^i \hookrightarrow K^{i+p}$.

1) Filtration et persistance

$$\emptyset = K^{-1} \subseteq K^0 \subseteq K^1 \subseteq \ldots \subseteq K^N = K$$

Pour toute paire (i,p), on a $\eta^{i,p} : K^i \hookrightarrow K^{i+p}$.

Pour chaque degré n, on a

$$0 \longrightarrow H_n(K^0) \xrightarrow{\eta_n^{0,1}} H_n(K^1) \xrightarrow{\eta_n^{1,1}} \ldots \xrightarrow{\eta_n^{N-2,1}} H_n(K^{N-1}) \xrightarrow{\eta_n^{N-1,1}} H_n(K)$$

1) Filtration et persistance

$$\emptyset = K^{-1} \subseteq K^0 \subseteq K^1 \subseteq \ldots \subseteq K^N = K$$

Pour toute paire (i, p), on a $\eta^{i,p} : K^i \hookrightarrow K^{i+p}$.

Pour chaque degré n, on a

$$\color{red}{0} \longrightarrow H_n(K^0) \xrightarrow{\eta_n^{0,1}} H_n(K^1) \xrightarrow{\eta_n^{1,1}} \ldots \xrightarrow{\eta_n^{N-2,1}} H_n(K^{N-1}) \xrightarrow{\eta_n^{N-1,1}} \color{red}{H_n(K)}$$

Définition :

Soit K un complexe simplicial **filtré**.

(i) Le $p^{\text{ième}}$ **groupe d'homologie persistante** de degré n associé à K^i est

$$H_n^{i,p}(K, \mathbb{F}_2) = H_n^{i,p}(K) := \operatorname{im} \eta_n^{i,p} : H_n(K^i) \to H_n(K^{i+p}).$$

(ii) Le $p^{\text{ième}}$ **nombre de Betti persistant** de degré n associé à K^i

$$\beta_n^{i,p}(K, \mathbb{F}_2) = \beta_n^{i,p}(K) := \dim H_n^{i,p}(K).$$

1) Filtration et persistance

Théorème : (Structure de l'homologie peristante)

Soit K un complexe filtré.

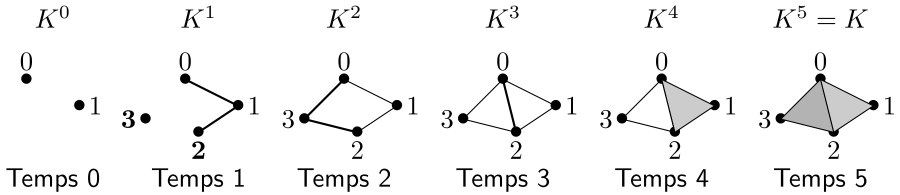
$$H_*(K) \cong \left(\bigoplus_j t^{a_j} \cdot \mathbb{F}_2[t] \right) \oplus \left(\bigoplus_l t^{b_l} \cdot {}^{\mathbb{F}_2[t]}/_{(t^{c_l})} \right)$$

1) Filtration et persistance

Théorème : (Structure de l'homologie peristante)

Soit K un complexe filtré.

$$H_*(K) \cong \left(\bigoplus_j t^{a_j} \cdot \mathbb{F}_2[t] \right) \oplus \left(\bigoplus_l t^{b_l} \cdot {}^{\mathbb{F}_2[t]}\big/_{(t^{c_l})} \right)$$



En degré 0 : $H_0(K) = \mathbb{F}_2[t] \oplus \left({}^{\mathbb{F}_2[t]}\big/_{t} \right) \oplus \left(t \cdot {}^{\mathbb{F}_2[t]}\big/_{t} \right)$

2) Visualisation par les codes barres

Soit K un complexe filtré.

$$H_*(K) \cong \left(\bigoplus_j t^{a_j} \cdot \mathbb{F}_2[t]\right) \oplus \left(\bigoplus_l t^{b_l} \cdot {}^{\mathbb{F}_2[t]}\big/_{(t^{c_l})}\right)$$

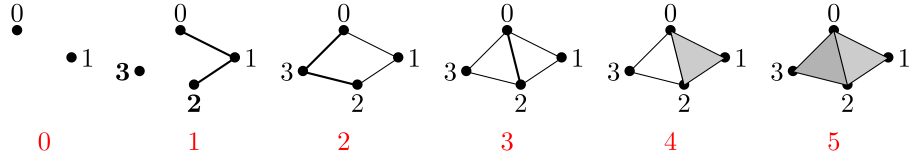
Définition :

Le **code barre** $H_*(K)$ est un graphe dont l'abscisse décrit le **temps de filtration**

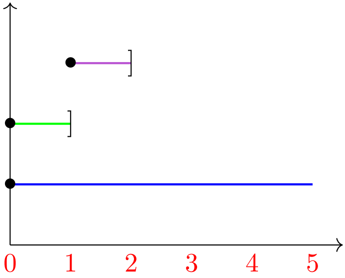
- une classe qui **naît** au temps a_j et ne **meurt jamais** est un intervalle $[a_j, \infty[$
- une classe qui **naît** au temps b_l et **meurt** au temps $b_l + c_l$ est un intervalle $[b_l, b_l + c_l]$

2) Visualisation par les codes barres

En degré 0 :



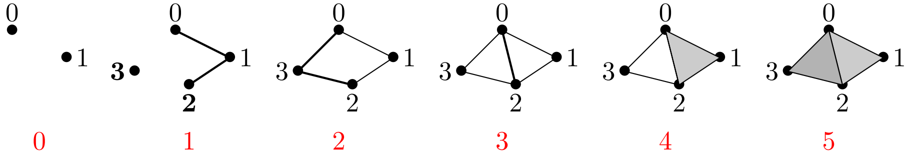
$$H_0(K) = \mathbb{F}_2[t] \oplus \left({}^{\mathbb{F}_2[t]}/_{t}\right) \oplus \left(t \cdot {}^{\mathbb{F}_2[t]}/_{t}\right)$$



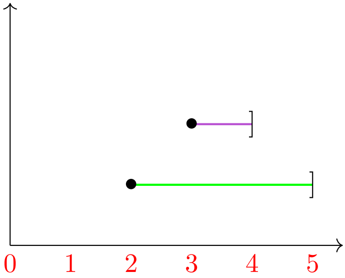
Code barre pour $H_0(K)$

2) Visualisation par les codes barres

En degré 1 **:**



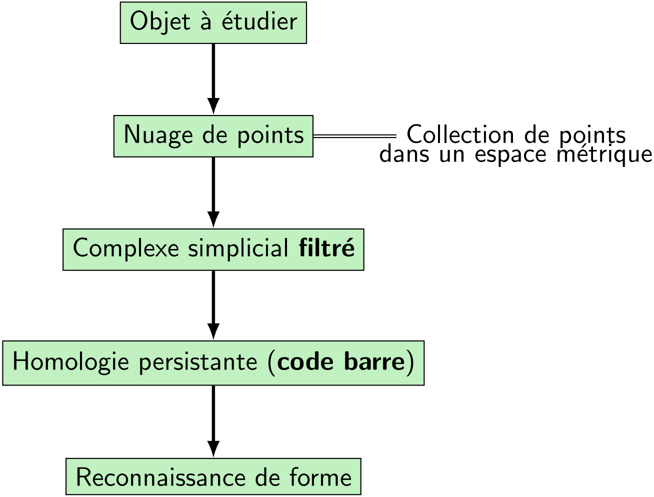
$$H_1(K) = \left(t^2 \cdot {}^{k[t]}/_{t^3}\right) \oplus \left(t^3 \cdot {}^{k[t]}/_{t}\right)$$



Code barre pour $H_1(K)$

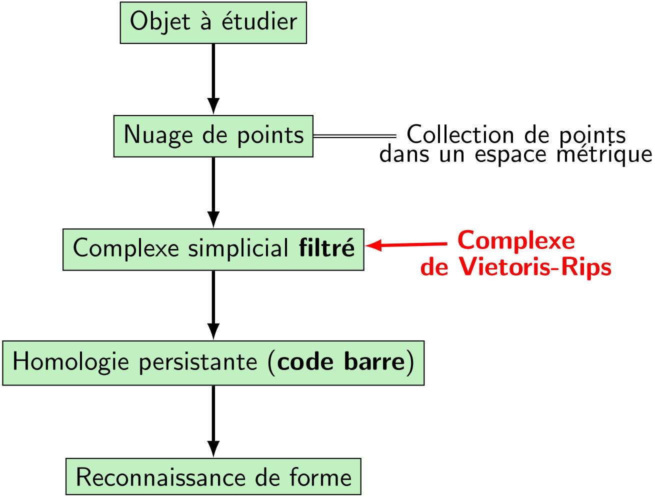
3) Analyse topologique des données

Analyse Topologique de Données (TDA) :



3) Analyse topologique des données

Analyse Topologique de Données (TDA) :



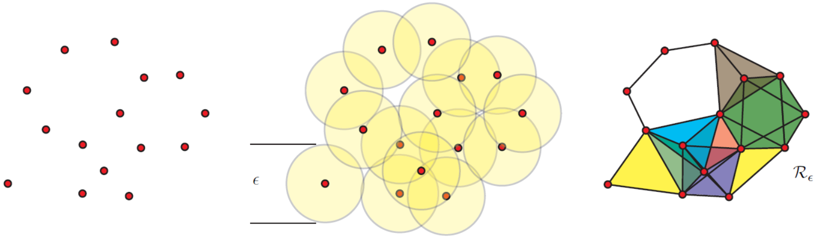
3) Analyse topologique des données

Soit $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un **nuage de points** et $\epsilon \geq 0$ un **paramètre**.

Définition :

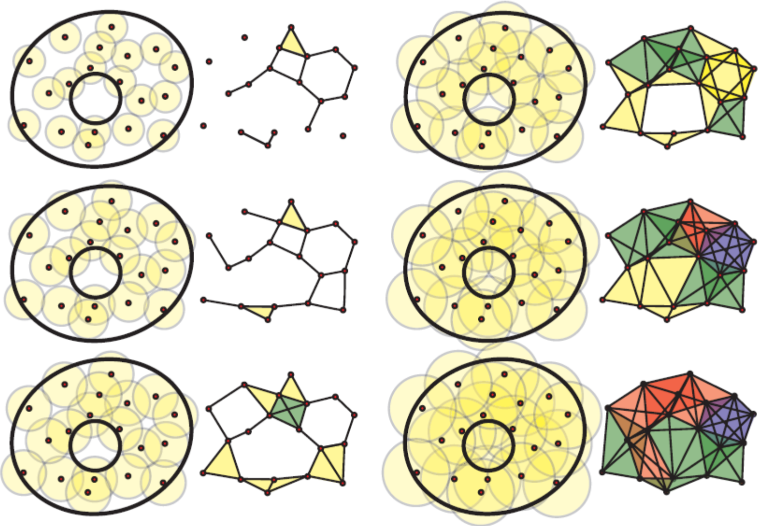
Le **complexe de Vietoris-Rips** $\mathcal{R}_\epsilon(X)$ est le complexe simplicial où :

- les sommets sont les points de $X = \{x_1, \dots, x_n\}$
- $\sigma = \{x_1, \dots, x_k\}$ est un k-simplex *ssi* $d(x_i, x_j) \leq \epsilon$ pour tout $(x_i, x_j) \in \sigma^2$.



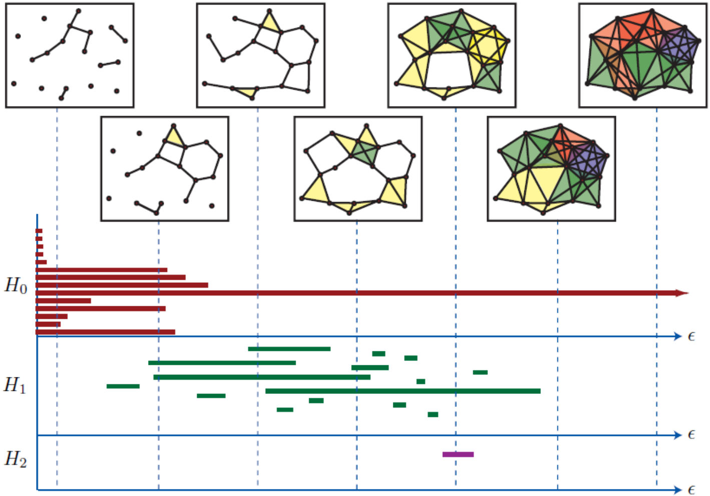
3) Analyse topologique des données

→ On obtient une **filtration de complexes** en faisant **varier le paramètre** ϵ.



3) Analyse topologique des données

→ On peut calculer l'homologie persistante et donc les **codes barres associés**.



III/ Homologie persistante et analyse musicale

Problématiques :

- Comment associer un complexe filtré à une pièce de musique ?
- Dans quelles mesures l'homologie persistante et l'analyse topologique de données peuvent être utilisées dans le contexte de l'analyse musicale ?

Homologie persistante et analyse musicale

Analyse Topologique de Données :

Objet à étudier

↓

Nuage de points

↓

Complexe simplicial filtré

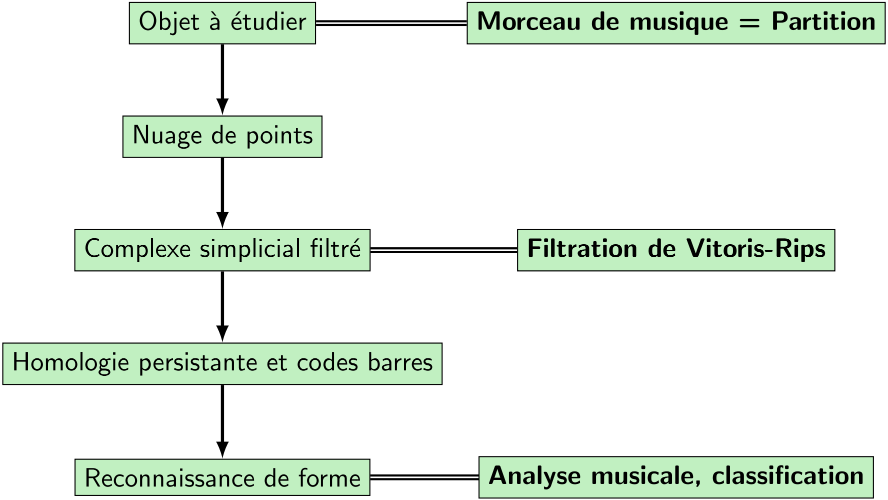
↓

Homologie persistante et codes barres

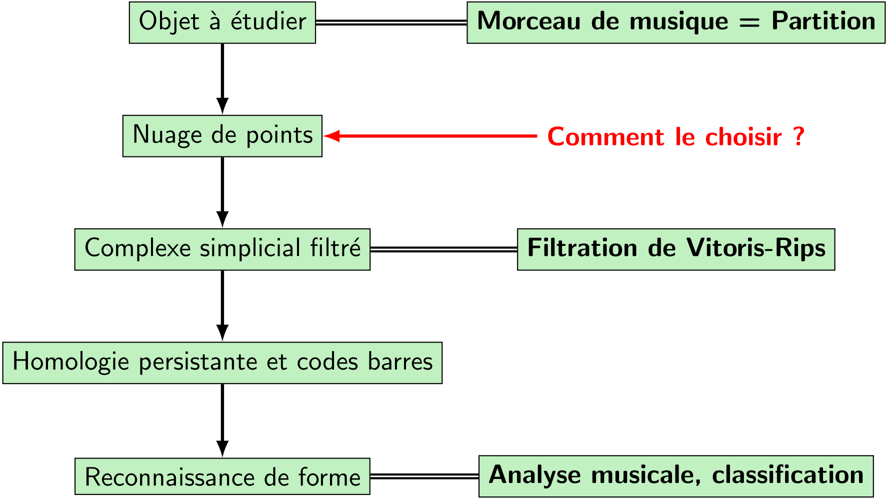
↓

Reconnaissance de forme

Analyse Topologique de Données :



Analyse Topologique de Données :



1) Application aux mesures d'un morceau

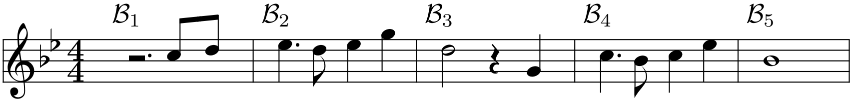
Définition :

- Une partition $\mathcal{S} = \{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_N\}$ est un ensemble fini de N sous-ensembles $\mathcal{B}_i$ de $\mathbb{R}^3$ appelés **mesures**.
- Un élément d'une mesure $\mathcal{B}_i$ est une **note** $n_i = (\text{position}, \text{durée}, \text{hauteur})$.

1) Application aux mesures d'un morceau

Définition :

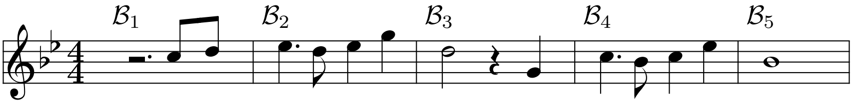
- Une partition $\mathcal{S} = \{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_N\}$ est un ensemble fini de N sous-ensembles $\mathcal{B}_i$ de $\mathbb{R}^3$ appelés **mesures**.
- Un élément d'une mesure $\mathcal{B}_i$ est une **note** $n_i = (\text{position}, \text{durée}, \text{hauteur})$.



1) Application aux mesures d'un morceau

Définition :

- Une partition $\mathcal{S} = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_N\}$ est un ensemble fini de N sous-ensembles $\mathcal{B}_i$ de $\mathbb{R}^3$ appelés **mesures**.
- Un élément d'une mesure $\mathcal{B}_i$ est une **note** $n_i = (\text{position}, \text{durée}, \text{hauteur})$.



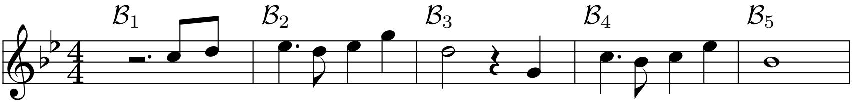
P

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_1 &= \{(3, 1/2, C_5),\ (7/2, 1/2, D_5)\} \\
\mathcal{B}_2 &= \{(0, 3/2, E_5\flat),\ (3/2, 1/2, D_5),\ (2, 1, E_5\flat),\ (3, 1, G_5)\} \\
\mathcal{B}_3 &= \{(0, 2, D_5),\ (3, 1, G_4)\} \\
\mathcal{B}_4 &= \{(0, 3/2, C_5),\ (3/2, 1/2, B_4\flat),\ (2, 1, C_5),\ (3, 1, E_5\flat)\} \\
\mathcal{B}_5 &= \{(0, 4, B_4\flat)\}
\end{aligned}
$$

1) Application aux mesures d'un morceau

Définition :

- Une partition $\mathcal{S} = \{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_N\}$ est un ensemble fini de N sous-ensembles $\mathcal{B}_i$ de $\mathbb{R}^3$ appelés **mesures**.
- Un élément d'une mesure $\mathcal{B}_i$ est une **note** $n_i = (\text{position}, \text{durée}, \text{hauteur})$.



P

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_1 &= \{(3, 1/2, C_5),\ (7/2, 1/2, D_5)\} \\
\mathcal{B}_2 &= \{(0, 3/2, E_5\flat),\ (3/2, 1/2, D_5),\ (2, 1, E_5\flat),\ (3, 1, G_5)\} \\
\mathcal{B}_3 &= \{(0, 2, D_5),\ (3, 1, G_4)\} \\
\mathcal{B}_4 &= \{(0, 3/2, C_5),\ (3/2, 1/2, B_4\flat),\ (2, 1, C_5),\ (3, 1, E_5\flat)\} \\
\mathcal{B}_5 &= \{(0, 4, B_4\flat)\}
\end{aligned}
$$

Partition $=$ **Sous-ensembles de** $\mathbb{R}^3$

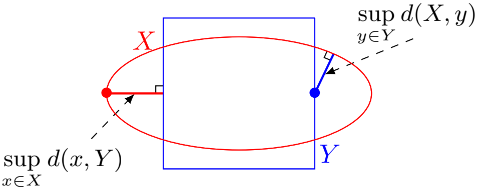
1) Application aux mesures d'un morceau

Définition : (Distance de Hausdorff)

Soient X et Y deux espaces métriques compacts munis d'une même distance d.
La **distance de Hausdorff** entre X et Y est donnée par :

$$d_H(X,Y) = \max\left\{\sup_{x\in X} d(x,Y) \ ; \ \sup_{y\in Y} d(X,y)\right\}$$

avec $d(x,Y) = \inf_{y\in Y} d(x,y)$ et $d(X,y) = \inf_{x\in X} d(x,y)$



1) Application aux mesures d'un morceau

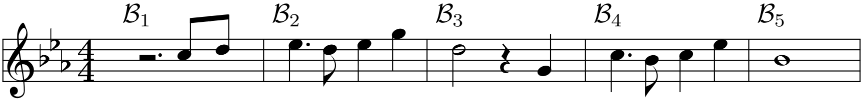
On peut appliquée la **distance de Hausdorff** à deux mesures $\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j \subset \mathbb{R}^3$, avec d_1 la distance donnée par $d_1(x, y) = \sum_i |x_i - y_j|$:

$$d_H(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j) = \max \left\{ \max_{n_i \in \mathcal{B}_i} \min_{n_j \in \mathcal{B}_j} d_1(n_i, n_j) \ ; \ \max_{n_j \in \mathcal{B}_j} \min_{n_i \in \mathcal{B}_i} d_1(n_i, n_j) \right\}$$

1) Application aux mesures d'un morceau

On peut appliquée la **distance de Hausdorff** à deux mesures $\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j \subset \mathbb{R}^3$, avec d_1 la distance donnée par $d_1(x,y) = \sum_i |x_i - y_j|$:

$$d_H(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j) = \max\left\{ \max_{n_i \in \mathcal{B}_i} \min_{n_j \in \mathcal{B}_j} d_1(n_i, n_j) \; ; \; \max_{n_j \in \mathcal{B}_j} \min_{n_i \in \mathcal{B}_i} d_1(n_i, n_j) \right\}$$

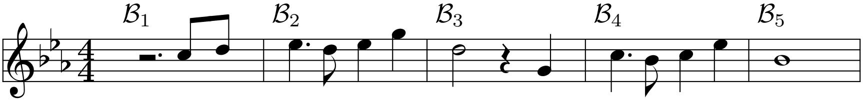


	$\mathcal{B}_1$	$\mathcal{B}_2$	$\mathcal{B}_3$	$\mathcal{B}_4$	$\mathcal{B}_5$
$\mathcal{B}_1$	0	1.07	1.16	0.987	1.82
$\mathcal{B}_2$		0	0.688	0.111	1.71
$\mathcal{B}_3$			0	0.577	1.55
$\mathcal{B}_4$				0	1.6
$\mathcal{B}_5$					0

1) Application aux mesures d'un morceau

On peut appliquée la **distance de Hausdorff** à deux mesures $\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j \subset \mathbb{R}^3$, avec d_1 la distance donnée par $d_1(x,y) = \sum_i |x_i - y_j|$:

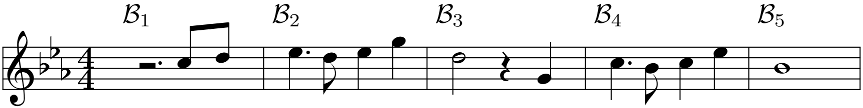
$$d_H(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j) = \max \left\{ \max_{n_i \in \mathcal{B}_i} \min_{n_j \in \mathcal{B}_j} d_1(n_i, n_j) \; ; \; \max_{n_j \in \mathcal{B}_j} \min_{n_i \in \mathcal{B}_i} d_1(n_i, n_j) \right\}$$

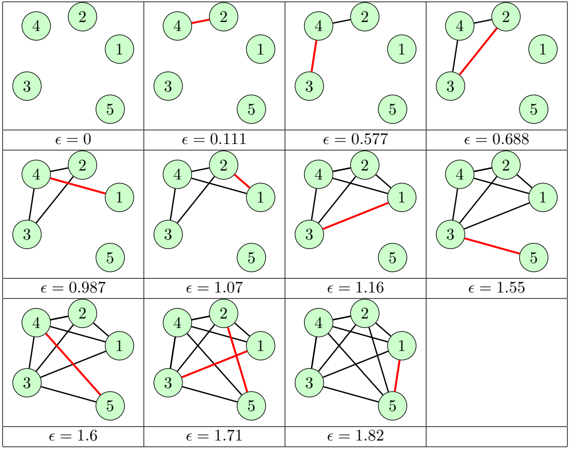


	$\mathcal{B}_1$	$\mathcal{B}_2$	$\mathcal{B}_3$	$\mathcal{B}_4$	$\mathcal{B}_5$
$\mathcal{B}_1$	0	1.07	1.16	0.987	1.82
$\mathcal{B}_2$		0	0.688	0.111	1.71
$\mathcal{B}_3$			0	0.577	1.55
$\mathcal{B}_4$				0	1.6
$\mathcal{B}_5$					0

Partition — Sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ / Distance de Hausdorff — **Nuage de points dans $\mathbb{R}^3$**

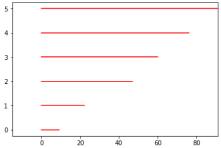
1) Application aux mesures d'un morceau



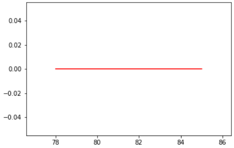


1) Application aux mesures d'un morceau

Une partition $\mathcal{S}$ avec 6 mesures distinctes.

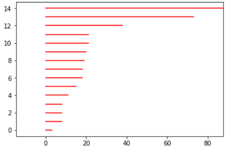


Code barre pour H_0
6 composantes à 0%

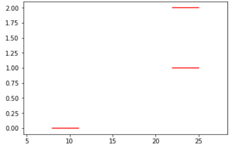


Code barre pour H_1
1 cycle à 78%

Une partition $\mathcal{S}$ avec 15 mesures distinctes.



Code barre pour H_0
15 composantes à 0%



Code barre pour H_1
3 cycles à 8% et 22%

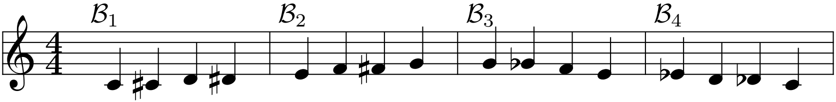
L'information topologique de chaque partition est contenue dans la famille des codes barres associée.

2) Des cycles en degré 1

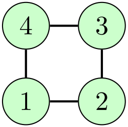
Idée : les éléments du H_1 représentent des **boucles musicales**.

2) Des cycles en degré 1

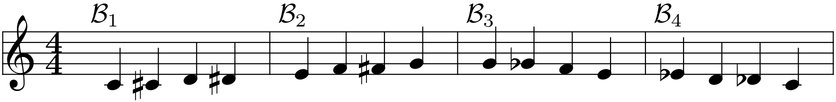
Idée : les éléments du H_1 représentent des **boucles musicales**.



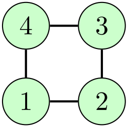
$$d_H(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_4) = d_H(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3) \approx 0.083$$
$$d_H(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = d_H(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4) \approx 0.111$$

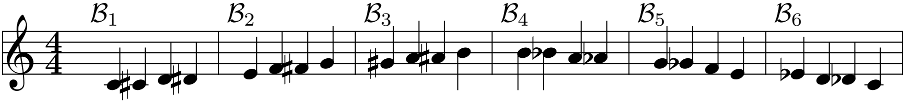


Idée : les éléments du H_1 représentent des **boucles musicales**.

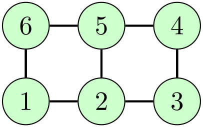


$$d_H(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_4) = d_H(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3) \approx 0.083$$
$$d_H(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = d_H(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4) \approx 0.111$$

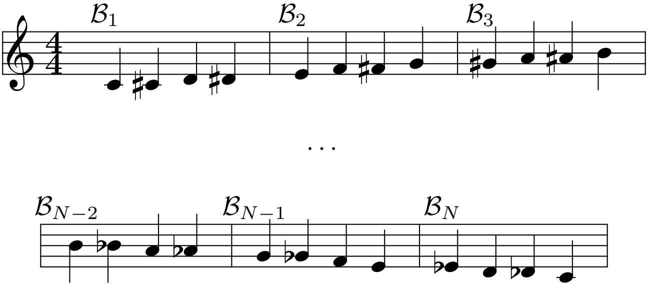


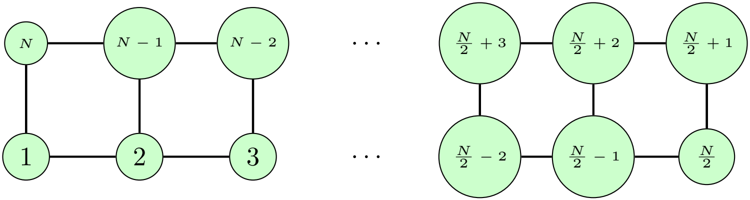


$$d_H(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_6) = d_H(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_5) = d_H(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4) \approx 0.083$$
$$d_H(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = d_H(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4) = d_H(\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_6) \approx 0.111$$

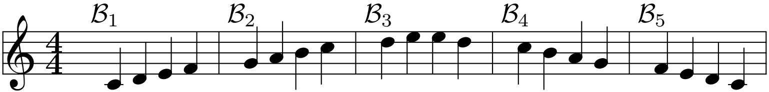


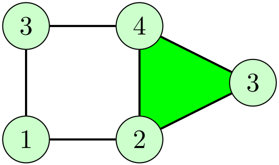
2) Des cycles en degré 1



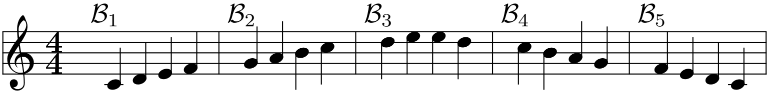


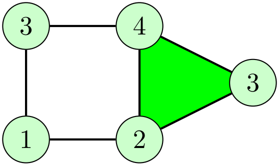
2) Des cycles en degré 1

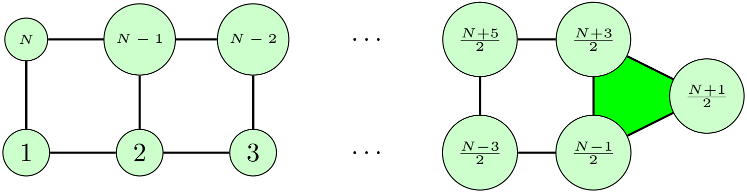




2) Des cycles en degré 1







3) Degré 0 et structure des morceaux

Idée : le H_0 donne des informations sur la **structure globale** d'une pièce grâce aux différentes **composantes connexes du complexe.**

3) Degré 0 et structure des morceaux

Idée : le H_0 donne des informations sur la **structure globale** d'une pièce grâce aux différentes **composantes connexes du complexe.**

Un morceau avec 12 mesures distinctes :

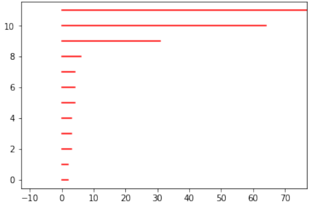
3) Degré 0 et structure des morceaux

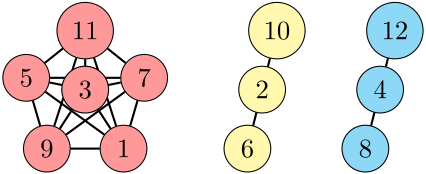
- Noires ♩
- Blanches 𝅗𝅥
- Rondes 𝅝

3) Degré 0 et structure des morceaux

- Noires
- Blanches
- Rondes

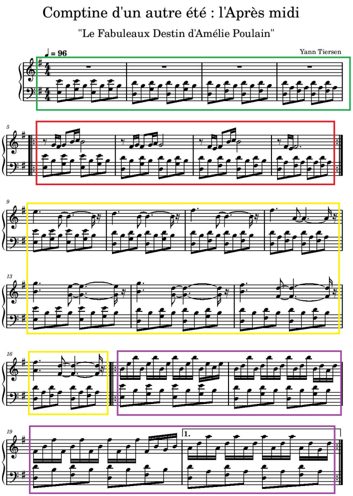
Le code barre en degré 0 et le complexe associé à 6% :

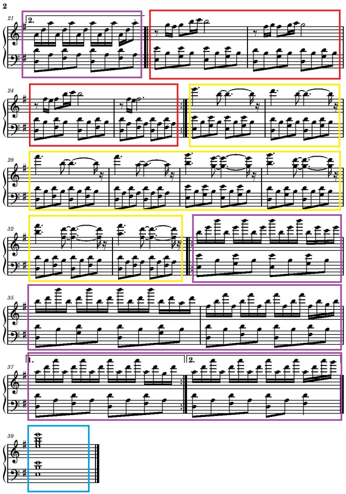




Application : Sur la bande-son du film *Le Fabuleux Destin d'Amélie Poulain*, *Comptine d'un autre été: L'Après-midi*

3) Degré 0 et structure des morceaux

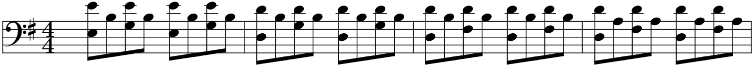




- Accompagnement
- Premier thème
- Second thème
- Troisième thème
- Conclusion

L'accompagnement, les différents thèmes et la conclusion :

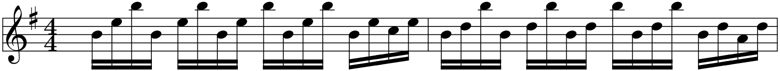
Accompagnement



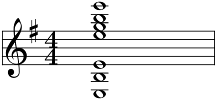
Premier thème

Second thème

Troisième thème

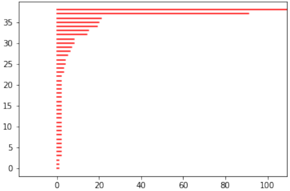


Conclusion



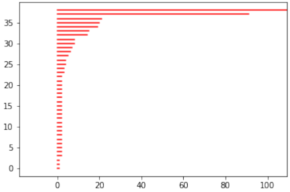
3) Degré 0 et structure des morceaux

Code barre en dimension 0 :

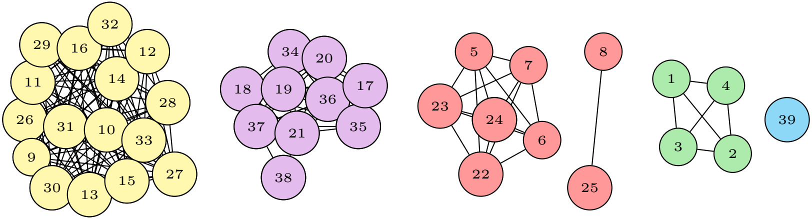


3) Degré 0 et structure des morceaux

Code barre en dimension 0 :



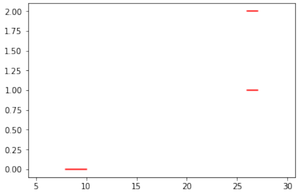
Le complexe associé à 14% :



Chaque composante caractérise un thème de la pièce.
Notre approche détecte la structure générale du morceau !

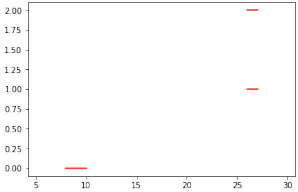
3) Degré 0 et structure des morceaux

Code barre en dimension 1 :

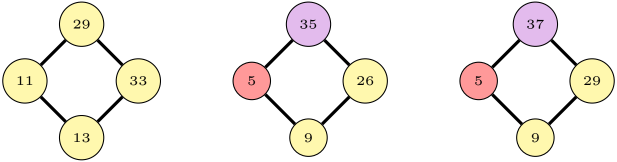


3) Degré 0 et structure des morceaux

Code barre en dimension 1 :



Les trois cycles en dimension 1 :



$\longrightarrow$ Pas d'interprétation musicale évidente de ces cycles.

Conclusion et perspectives

- Notre approche capte la structure globale d'une pièce grâce au H_0.
- Le H_1 reste encore difficile à interpréter musicalement.
- Tester notre approche sur un grand corpus musical et comparer les résultats.
- Comprendre comment et pourquoi apparaissent les cycles en dimension 1 et ce qu'ils révèlent du morceau.
- Faire de nouveaux choix de distances pour capter d'autres informations sur la pièce.

Merci pour votre attention !

Introduction - Quelques références

Louis Bigo and Moreno Andreatta.
Filtration of pitch-class sets complexes.
In *Mathematics and computation in music*, volume 11502 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 213–226. Springer, Cham, 2019.

Mattia G. Bergomi, Adriano Baratè, and Barbara Di Fabio.
Towards a topological fingerprint of music.
In *Computational topology in image context*, volume 9667 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 88–100. Springer, [Cham], 2016.

Robert Ghrist.
Barcodes: the persistent topology of data.
Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 45(1):61–75, 2008.

William A. Sethares and Ryan Budney.
Topology of musical data.
J. Math. Music, 8(1):73–92, 2014.

Afra Zomorodian and Gunnar Carlsson.
Computing persistent homology.
Discrete Comput. Geom., 33(2):249–274, 2005.