Représentations Simpliciales d'une Partition de Musique

IRMA — Institut de Recherche Mathématique Avancée

Université de Strasbourg

Victoria Callet

Sous la direction de **Pierre Guillot** et **Moreno Andreatta**

CNRS

Problématique

Objectif : faire de l'Analyse Topologique des Données en musique grâce à l'**homologie persistante.**
Motivations : classification du style musical ⟶ obtenir une **signature topologique par morceau.**

Question : comment associer un complexe simplicial filtré à une partition de musique ?

Outils

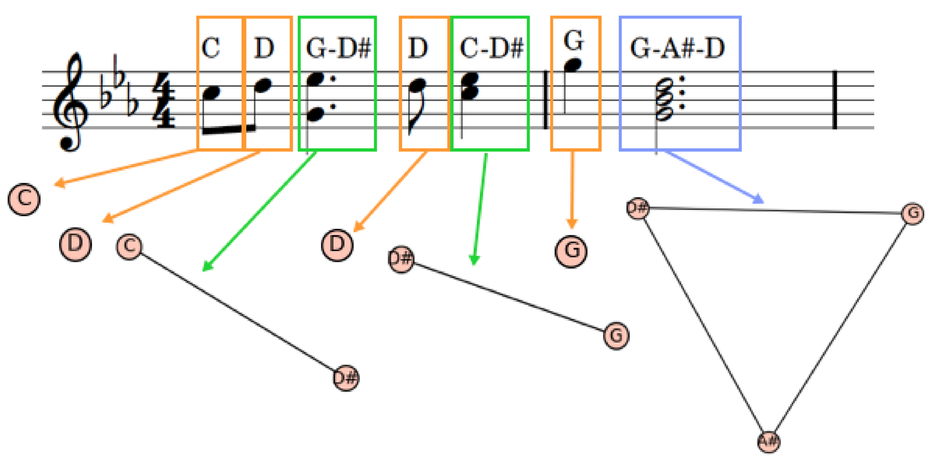
Un **fichier MIDI** est une représentation numérique d'une partition musicale : il contient des données sur chacune des notes à jouer (hauteur, durée, volume, etc.). On les obtient en convertissant des partitions de musique.

Partition de Musique $\xrightarrow{\text{MuseScore}}$ Fichier MIDI $\xrightarrow{\text{Python/Sage}}$ Complexe Simplicial

Première méthode : Complexe Simplicial par Recollement d'Accords

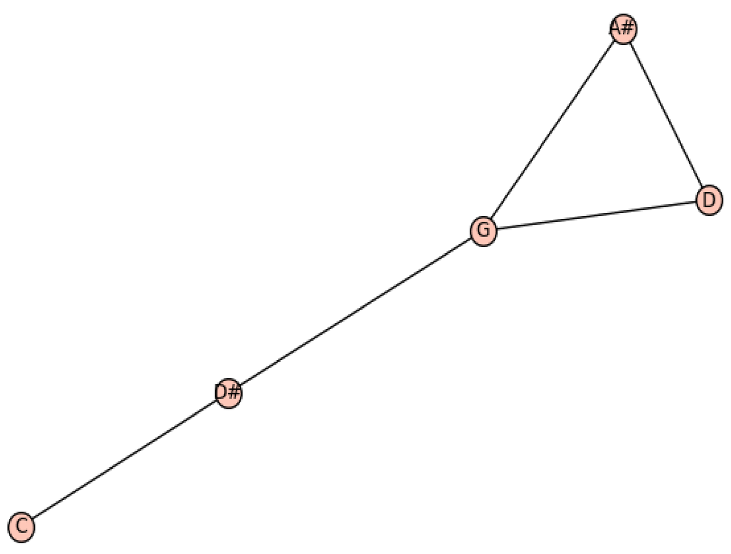
Une **partition** $\mathcal{P}$ est un ensemble de groupes de notes appelés **accords.**
Un n-accord est un groupe de n notes que l'on représente par un simplexe.
En recollant tous les simplexes de $\mathcal{P}$, on obtient un **complexe simplicial.**

Un n-accord donne un (n-1)-simplexe



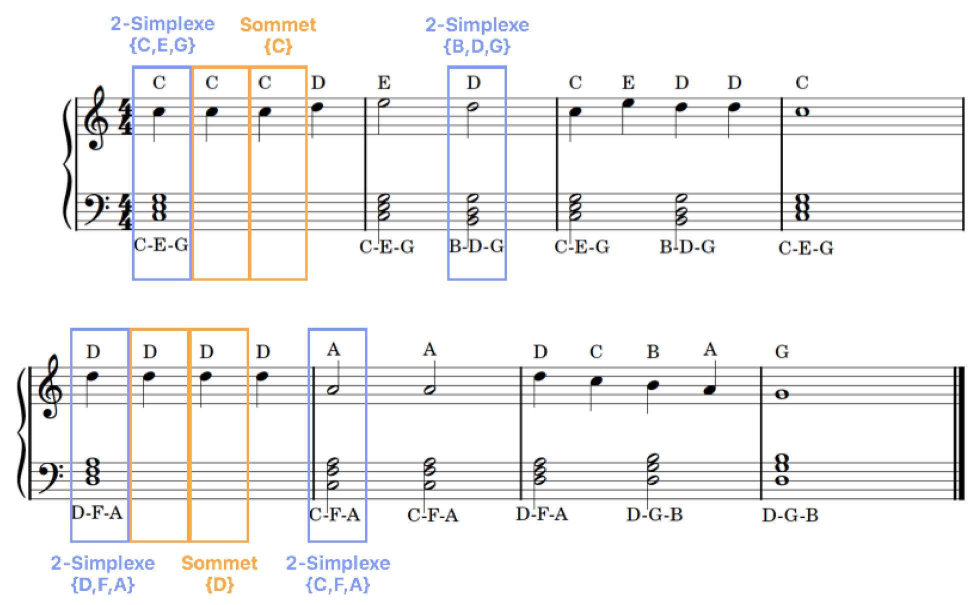
Une partition et ses groupes de notes.

Recollement

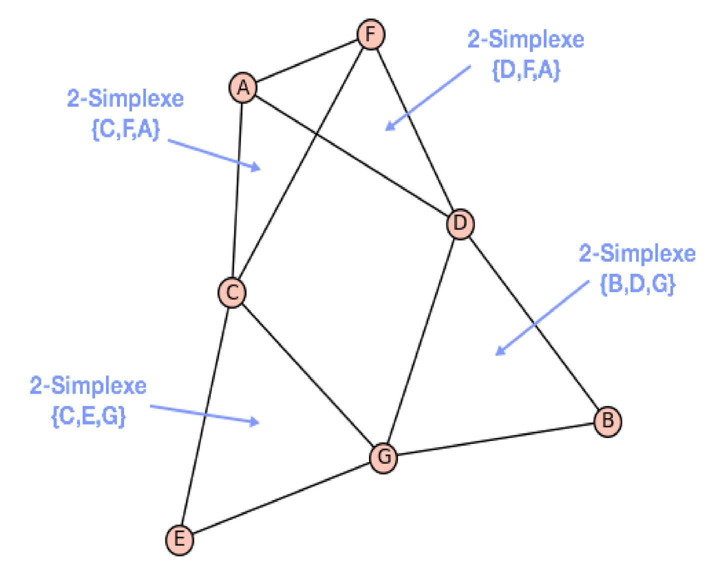


Le graphe associé par recollement.

Un exemple de partition à deux voix et son complexe simplicial construit par recollement :



Une partition "Lune"
La première voix est celle de la mélodie, composée de 1-accords (= sommets) ;
la deuxième voix est celle de l'accompagnement, composée de 3-accords (= triangles).

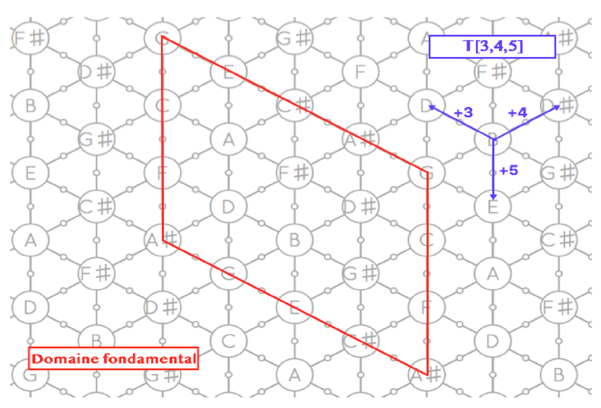


La graphe du complexe "Lune"
Complexe composé de 7 sommets (gamme de Do M) et de 4 triangles (les 4 accords C, G, Dm et Am).

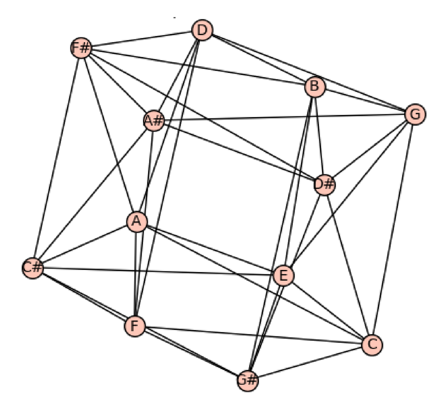
Le **Tonnetz** $\mathcal{T}[a,b,c]$ est un réseau $\mathcal{R} = \langle e_1, e_2 \rangle$ isomorphe à $\mathbb{Z}^2$, muni d'un morphisme $\varphi : \mathcal{R} \to \mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}}$ donné par

$$\varphi(e_1) = a, \quad \varphi(e_2) = b \quad \text{et} \quad \varphi(e_1 + e_2) = a + b = c \bmod 12.$$

Les entiers a, b et c représentent des **intervalles harmoniques** vérifiant $a + b + c = 0 \bmod 12$.
Il existe 12 tels Tonnetz, et on peut associer à chacun un complexe simplicial :



$\mathcal{T}[3,4,5]$ sous forme de réseau de points (via HexaChord).



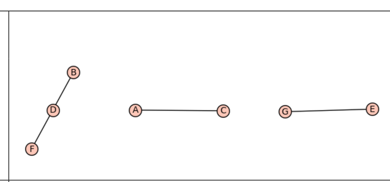
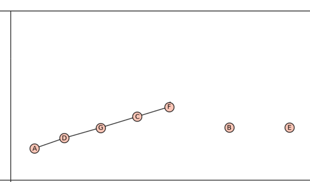
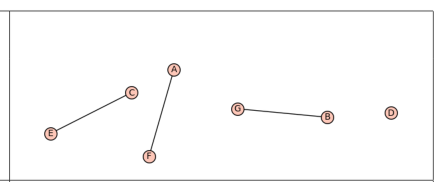
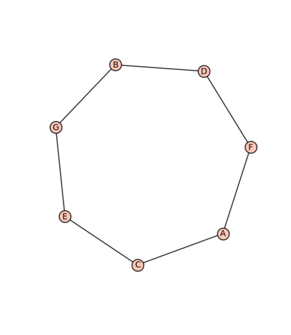
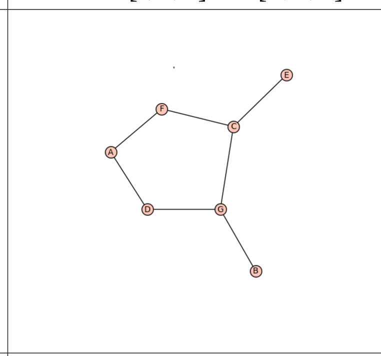
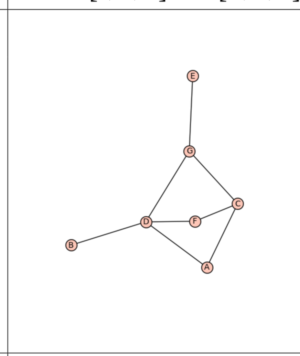
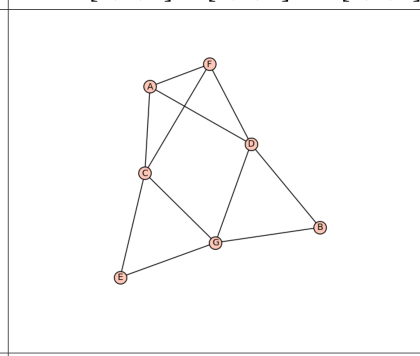
$\mathcal{T}[3,4,5]$ sous forme de complexe simplicial (tore).

Tore	Cylindre	Collier de 6 tétraèdres	2 Cylindres	2 Colliers de 3 tétraèdres	3 Tétraèdres	4 Triangles
$\mathcal{T}[1,2,9]$, $\mathcal{T}[1,3,8]$ $\mathcal{T}[2,3,7]$, $\mathcal{T}[1,4,7]$ $\mathcal{T}[3,4,5]$	$\mathcal{T}[1,1,10]$ $\mathcal{T}[2,5,5]$	$\mathcal{T}[1,5,6]$	$\mathcal{T}[2,2,8]$	$\mathcal{T}[2,4,6]$	$\mathcal{T}[3,3,6]$	$\mathcal{T}[4,4,4]$

Classification des 12 Tonnetz du plan selon leur domaine fondamental.

Intersecter les 12 Tonnetz du plan avec le complexe associé à une partition donne des informations sur la composition du morceau (tonalité, modes, etc.).

Par exemple, avec le complexe "**Lune**", on obtient 8 complexes différents :

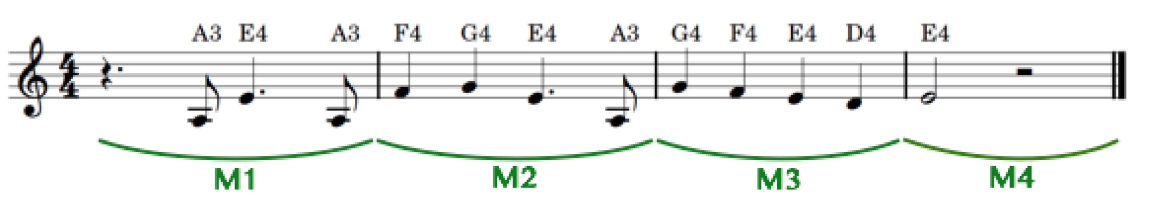
			
avec $\mathcal{T}[1,1,10]$	avec $\mathcal{T}[1,2,9]$ et $\mathcal{T}[3,3,6]$	avec $\mathcal{T}[1,5,6]$ et $\mathcal{T}[2,5,5]$	avec $\mathcal{T}[2,2,8]$, $\mathcal{T}[2,4,6]$ et $\mathcal{T}[4,4,4]$
			
avec $\mathcal{T}[1,3,8]$	avec $\mathcal{T}[1,4,7]$	avec $\mathcal{T}[2,3,7]$	avec $\mathcal{T}[3,4,5]$

- Avec $\mathcal{T}[1,1,10]$, on retrouve toutes les touches blanches qui composent la partition (gamme de Do M).
- Avec $\mathcal{T}[3,4,5]$, on retrouve le complexe **Lune** : le morceau est composé d'accords majeurs et mineurs.

En emboîtant les différentes intersections (lorsque c'est possible), on obtient une première façon de **filtrer le complexe.**

Deuxième méthode : Homologie Persistante sur les Mesures

Une **partition** est une famille $\mathcal{P} = \{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_N\}$ de sous-ensembles finis distincts de $\mathbb{R}^3$ appelés **mesures.**
$\mathcal{M}_t$ est la mesure qui commence au temps t dont un élément est une **note** de la forme (position $- t$, durée, hauteur).



$\mathcal{M}_1 = \{(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 57); (2, \frac{3}{2}, 64); (\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 57)\}$
$\mathcal{M}_2 = \{(0,1,65); (1,1,67); (2, \frac{3}{2}, 64); (\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 57)\}$
$\mathcal{M}_3 = \{(0,1,67); (1,1,65); (2,1,\mathcal{E}4 = 64); (3,1,62)\}$
$\mathcal{M}_4 = \{(0,2,64)\}$

Une partition "Pluie" et la description des ses 4 mesures distinctes.
L'unité de temps est donnée par le chiffrage : $\frac{4}{4}$ = 4 noires par mesure.
La hauteur des notes est en MidiCent : $\mathcal{A}0 = 21$, $\mathcal{C}4 = 60$, $\mathcal{C}8 = 108$.

Distance de Hausdorff sur les mesures :

Les mesures sont ensuite normalisées, puis la distance entre deux mesures M_i et M_j est donnée par :

$$d_H(M_i, M_j) = \max\left\{ \max_{x \in M_i} \min_{y \in M_j} d_1(x,y) \; ; \; \max_{y \in M_j} \min_{x \in M_i} d_1(x,y) \right\} \quad \text{avec } d_1(x,y) = \sum_i |x_i - y_i|$$

Complexe simplicial filtré sur les mesures :

On définit une famille de complexes $(\mathcal{K}_\epsilon, d_{\mathcal{H}})_\epsilon$ associée à $\mathcal{P} = \{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_N\}$ par :

- les sommets de $\mathcal{K}_\epsilon$ sont les mesures M_i
- $(k+1)$ points forment un k-simplexe s'ils sont à distance inférieure à ϵ les uns des autres (**construction de Vietoris-Rips**).

	$\mathcal{M}_1$	$\mathcal{M}_2$	$\mathcal{M}_3$	$\mathcal{M}_4$
$\mathcal{M}_1$	0	0.647	0.702	1.43
$\mathcal{M}_2$	0.647	0	0.383	1.43
$\mathcal{M}_3$	0.702	0.383	0	1.04
$\mathcal{M}_4$	1.43	1.43	0.702	0

$d_{\mathcal{H}}(\mathcal{M}_2,\mathcal{M}_3) \leq d_{\mathcal{H}}(\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2) \leq d_{\mathcal{H}}(\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_3)$
$\leq d_{\mathcal{H}}(\mathcal{M}_3,\mathcal{M}_4) \leq d_{\mathcal{H}}(\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_4) = d_{\mathcal{H}}(\mathcal{M}_2,\mathcal{M}_4)$

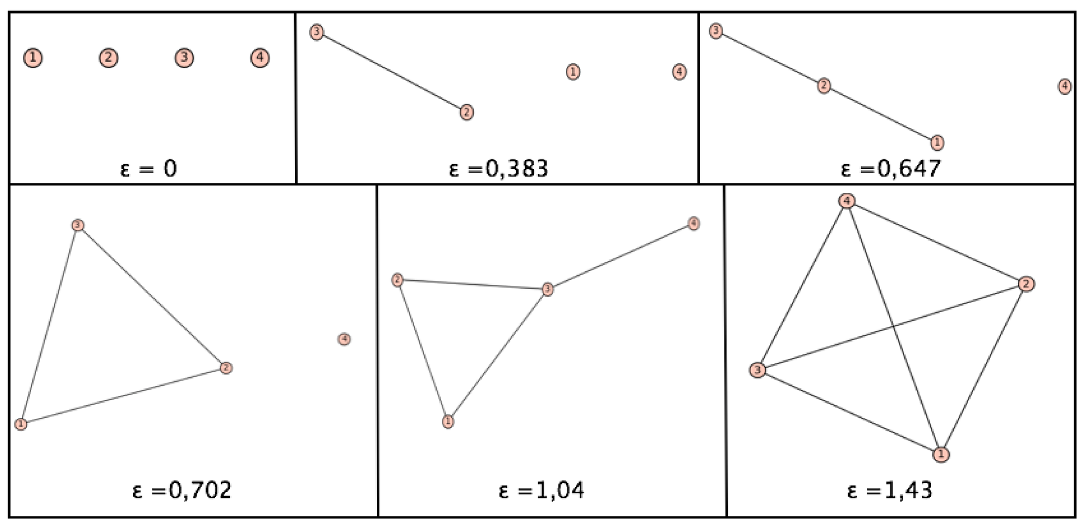
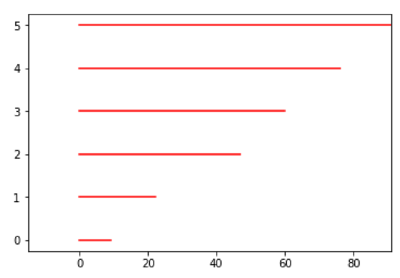


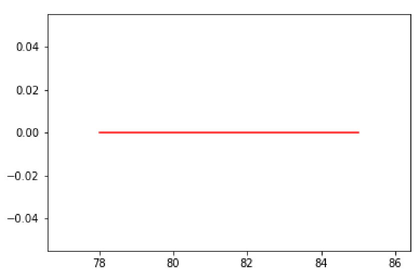
Tableau des distances de la partition "Pluie" et la filtration de Rips associée.

Le $n^{ième}$ **nombre de Betti** au temps ϵ est le nombre $\beta_n^\epsilon = \dim H_n(\mathcal{K}_\epsilon, \mathbb{K})$, où $\mathbb{K}$ est un corps.
Pour chaque n, on obtient un **code barre** sur lequel on représente les β_n^ϵ en fonction du temps ϵ.

Une partition $\mathcal{P}$ constituée de 6 mesures distinctes

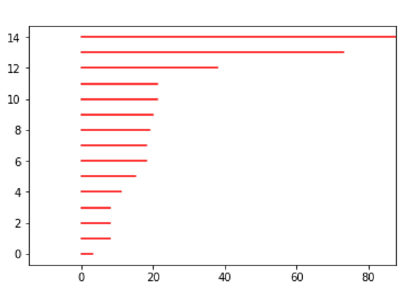


Code barre en dimension 0
6 composantes connexes au temps 0

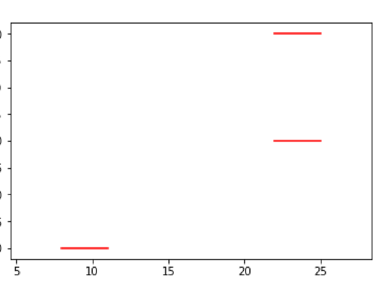


Code barre en dimension 1
Un cycle au temps 78 :
$\beta_1^\epsilon = 1$ pour $\epsilon \in [78, 85]$

Une partition $\mathcal{P}$ constituée de 15 mesures distinctes



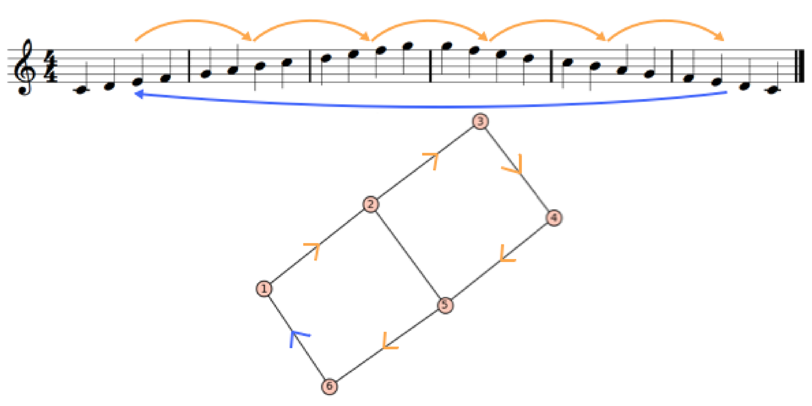
Code barre en dimension 0
15 composantes connexes au temps 0



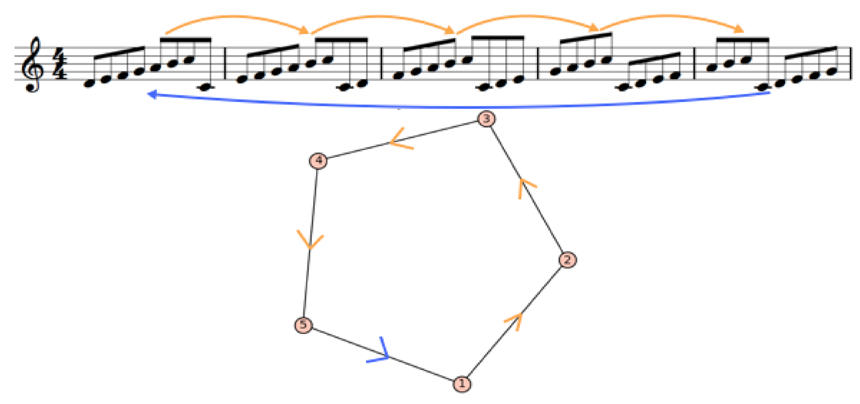
Code barre en dimension 1
$\beta_1^\epsilon = 1$ pour $\epsilon \in [8, 11]$
et $\beta_1^\epsilon = 2$ pour $\epsilon \in [22, 26]$

L'information topologique de chaque partition est ainsi contenue dans la famille de codes barres associée.

Les partitions possèdent parfois des **"graphes types"** apparaissant à un certain temps ϵ de la filtration.
On peut reconnaître sur ces graphes certains motifs musicaux, comme par exemple des **boucles** ou des **permutations** :

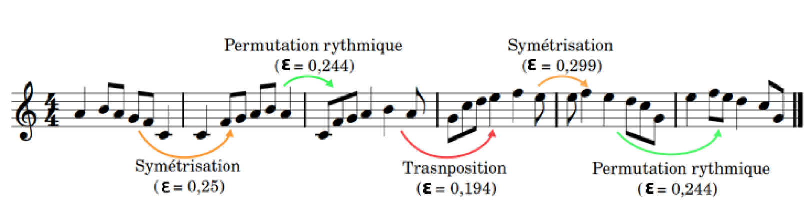


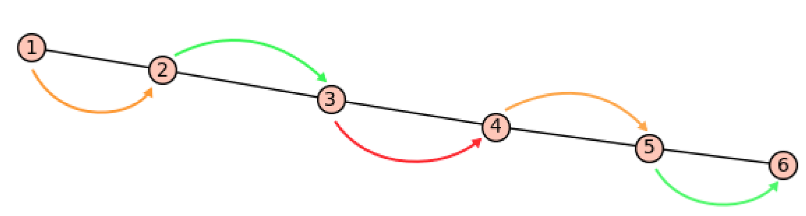
6 mesures formant 2 cycles adjacents de longueurs 4



5 mesures formant un cycle de longueur 5.

On peut aussi appliquer des **transformations** sur les mesures de telle sorte à obtenir un **chemin** :





6 mesures formant un chemin de longueur 6