Présentation du thème :

Les algèbres clusters sont une nouvelle famille d'algèbres commutatives de nature très combinatoire. Elles ont été introduites en 2001 par Sergey Fomin et Andrei Zelevinsky dans le but de comprendre les bases canoniques des groupes quantiques, plus précisément le comportement des bases canoniques duales par rapport à la multiplication. Si ceci reste une des motivations principales, la notion d'algèbre cluster a connu un développement rapide dans des directions variées bien au delà du contexte initial et les recherches sur ce sujet se poursuivent activement.

Pour donner une vague idée, voici une description rapide, qui n'est pas une définition. On fixe un entier n appelé le rang, on se donne un ensemble de "variables" et un ensemble de n-uplets de variables qui sont les "clusters". Pour chaque cluster C et chaque variable x dans C, il existe exactement un autre cluster C' qui diffère de C par le remplacement de la variable x par une autre variable x'. Les clusters forment donc un graphe régulier de valence n.

Les algèbres clusters peuvent être de type fini ou infini, selon leur nombre de variables. Fomin et Zelevinsky ont obtenu un résultat de classification de celles qui sont de type fini. On retrouve encore une fois la célèbre liste de Killing et Cartan des diagrammes de Dynkin finis, qui classifie aussi les algèbres de Lie simples et les systèmes de racines cristallographiques.

En fait, pour les diagrammes de type A, D ou E, la combinatoire des algèbres clusters peut être interprétée en grande partie comme un nouveau développement de la relation classique entre les systèmes de racines et les représentations de carquois, dans le cadre des catégories dérivées de catégories héréditaires. Par exemple, les variables clusters sont mises en correspondance avec les objets indécomposables d'un certain quotient de la catégorie dérivée des modules sur le carquois de type ADE correspondant.

Une autre motivation pour la théorie des algèbres clusters est la notion de positivité totale. Une matrice totalement positive est une matrice carrée dont tous les mineurs sont positifs. Cette définition a été généralisée par Lusztig aux groupes de Lie semi-simples. Si une algèbre de fonctions sur une variété a une structure cluster, alors on peut définir sa partie positive comme l'ensemble des points où les variables clusters prennent des valeurs positives. Il suffit en fait de vérifier la positivité sur les variables d'un cluster arbitraire, car la positivité de toutes autres variables en résulte.

Selon une des idées majeures sous-jacentes à la théorie des algèbres clusters, ceci devrait s'appliquer à beaucoup de variétés construites de façon naturelle à partir de groupes de Lie semi-simples. A ce jour, la structure d'algèbre cluster attendue est construite pour deux familles de variétés : les doubles cellules de Bruhat et les Grassmanniennes.

Parmi les autres connections, on observe des coïncidences énumératives remarquables entre les algèbres clusters de type fini et la théorie récente des monoïdes de tresses duaux. Par ailleurs, plusieurs travaux ont muni les espaces de Teichmüller ou certaines de leurs variantes de structures clusters. Ceci ouvre un pont vers la géométrie hyperbolique.

Références :

Chercher Fomin ou Zelevinsky et cluster dans Arxiv !