Chapitre 1

Un début en douceur

1.1 Les principaux domaines mathématiques

Les thèmes abordés par les mathématiques sont très variés, mais peuvent en gros être regroupés en grands champs. Voici ceux que tu rencontreras dans ta formation.

Algèbre C'est l'étude des opérations entre nombres, et leurs généralisations aux opérations entre objets plus abstraits. On parle alors de « structure algébrique », et on cherche à déceler celles qui au fond sont identiques même si leurs formes sont différentes de prime abord. On va rencontrer surtout l'algèbre linéaire (l'étude des espaces de vecteurs, des matrices et des systèmes d'équations), mais les structures algébriques sont partout : polynômes, groupes de symétries...

Analyse C'est la construction et l'étude des nombres réels et des quantités qui dépendent de nombres réels (fonctions). Les techniques et notions mises en jeu sont le calcul de limites, le calcul différentiel (calcul de dérivées) et son copain le calcul intégral.

Arithmétique C'est l'étude des nombres entiers et de leurs relations par opérations (addition / soustraction, multiplication / division). On parle de nombres pairs, de nombre premiers, de factorisation, de nombre rationnel... Ces notions sont généralisées à d'autres objets, par exemple les polynômes ou leurs racines.

Combinatoire C'est l'art de dénombrer (compter le nombre d'éléments) des ensembles et des sous-ensembles. Plus généralement, c'est l'étude des configurations et combinaisons d'ensembles. La combinatoire est très utile en arithmétique, en géométrie, en algèbre et surtout en probabilités.

Géométrie C'est la construction, l'étude et la mesure des figures, des courbes, des surfaces... On s'intéresse beaucoup à leur forme (taille, symétrie, courbure) et à leurs positions relatives (parallélisme, tangence, orthogonalité).

Logique C'est la construction et l'étude du discours mathématique en général, et des systèmes d'axiomes dans lesquels sont exprimés les autres champs. On se trouve à l'articulation entre mathématiques et philosophie : avant de commencer il faut choisir entre plusieurs systèmes formels n'ayant pas tous les mêmes techniques de raisonnement ou méthodes de preuves. En Licence nous embrassons sans réserve le point de vue le plus répandu, dit «classique» par opposition à d'autres courants (constructivisme, formalisme, intuitionnisme, logicisme...).

Probabilités C'est l'étude des phénomènes aléatoires. La théorie des probabilités permet d'attribuer une mesure (un nombre entre 0 et 1) à des événements qu'on attribue au hasard ou qui ont un caractère incertain. Elle utilise des concepts de la combinatoire, de la logique et de l'analyse.

Statistique La statistique a pour objet d'étude des données collectées. En se basant sur la théorie des probabilités, elle essaie de caractériser le phénomène général d'où ont été tirées les données.

Il existe d'autres grands champs : dynamique, topologie... De plus, certaines spécialités des mathématiciens professionnels sont à cheval sur plusieurs champs différents. On rencontre alors la «géométrie algébrique», la «topologie algébrique», la «dynamique combinatoire»... Tu connais à ton insu un tel hybride : la «géométrie analytique».

Géométrie analytique C'est ce que tu fais quand tu mets un repère dans le plan : en repérant la position des points du plan par des coordonnées, tu décris des objets géométriques par des nombres réels et disposes de toute la puissance de feu de l'analyse. Par exemple, trouver l'intersection de deux droites (objets géométriques) en connaissant leurs équations (objets analytiques), ou tracer le graphe d'une fonction grâce au signe de sa dérivée.

1.2 Le discours mathématique

Faire des mathématiques, c'est démontrer des relations entre objets, à partir d'axiomes ou d'hypothèses. À la page suivante on rencontre un écrit mathématique concernant le théorème de Pythagore, que nous connaissons tous, et qui va servir d'exemple pour illustrer notre propos général.

Vocabulaire.

- *Une* ***Définition*** *est un endroit où on décide de nommer des objets ou des propriétés remarquables. C'est plus commode de dire «carré» que «polygone fermé non-croisé à quatre sommets, dont toutes las arêtes ont même longueur et dont au moins un angle est droit». Le* ***nouveau terme*** *est mis en évidence (écriture en gras).*
- *Un* ***Théorème*** *est un énoncé très important, dont la connaissance est nécessaire à la poursuite de l'étude, ainsi qu'à la culture générale scientifique.*
- *Une* ***Proposition*** *est un énoncé important, contenant en général des formules ou des méthodes d'intérêt pratique.*
- *Un* ***Lemme*** *est un énoncé intermédiaire utilisé dans un raisonnement plus long, tel qu'une démonstration. En général, la conclusion n'est pas très importante (même s'il existe des lemmes célèbres).*
- *Un* ***Corollaire*** *est un énoncé découlant directement d'un résultat qui vient d'être démontré.*

Vocabulaire.

- *Une* ***preuve*** *(ou* ***démonstration****) est une succession logiquement articulée d'arguments, qui part des* ***hypothèses*** *et explique pourquoi la* ***conclusion*** *en découle grâce aux* ***propriétés*** *déjà connues. On doit faire apparaître clairement comment les hypothèses sont utilisées.*
- *Ces propriétés expriment des relations entre objets, et ont elles-mêmes déjà été prouvées. Ultimement elles sont donc conséquences des axiomes choisis.*
- *Un* ***axiome*** *(ou* ***postulat****) est une «vérité première» : une relation entre objets dont la vérité ne se démontre pas, mais en laquelle on décide de croire. Il faut bien partir de quelque part : on ne peut rien démontrer à partir de rien. Par exemple, l'égalité $X = X$ pour tout objet X est prise comme vérité première. Il y en a d'autres. De même, certains termes ne peuvent être rigoureusement définis, comme la notion d'ensemble ou celle de point en géométrie.*

L'objet des mathématiques porte sur la véracité des assertions (phrases mathématiques). En logique classique, une assertion est soit vraie («V», ou «1» en informatique) soit fausse («F», ou «0» en informatique), jamais les deux à la fois. Les règles de déduction entre assertions vraies et fausses sont données par la **table de vérité** de l'implication. Les tables associées aux conjonctions logiques «ET» et «OU» sont aussi présentées ci-dessous.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Remarque. De la table de vérité de l'implication on peut établir la constat suivant : il est impossible que du «faux» soit une conséquence du «vrai». C'est le principe de la *démonstration par l'absurde*.

Vocabulaire. *Une même assertion peut être exprimée sous des formes très variées. À titre d'exemple, toutes les phrases suivantes ont exactement la même signification mathématique. On a mis en évidence les* ***connecteurs logiques*** *permettant de distinguer l'hypothèse de la conclusion. Parfois ces connecteurs sont implicites dans la structure de la phrase.*

- *«**Si** le triangle ABC est rectangle en A **alors** $BC^2 = AB^2 + AC^2$.»*
- *«**Supposons que** le triangle ABC soit rectangle en A. **Alors** $BC^2 = AB^2 + AC^2$.»*
- *«**Lorsque** le triangle ABC est rectangle en A, l'égalité $BC^2 = AB^2 + AC^2$ est vérifiée.»*
- *«Prenons un triangle ABC. **Pour que** $BC^2 = AB^2 + AC^2$ **il suffit que** ABC soit rectangle en A.»*
- *«Pour tout triangle ABC rectangle en A, on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$.»*
- *«La relation $BC^2 = AB^2 + AC^2$ est vraie dans un triangle ABC **pour peu qu**'il soit rectangle en A.»*

Attention. *L'énoncé suivant, bien qu'il soit vrai, ne signifie pas la même chose que le précédent. C'est sa* ***réciproque****.*

«Prenons un triangle ABC non dégénéré en A. Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors ABC est rectangle en A.»

Définition.

1. Un triangle ABC est **dégénéré** en A si $A = B$ ou $A = C$.
2. Un triangle ABC non dégénéré en A est **rectangle** en A si l'angle $\widehat{BAC}$ mesure $\frac{\pi}{2}$.

Théorème de Pythagore. *Soit ABC un triangle du plan euclidien. Si le triangle est rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.*

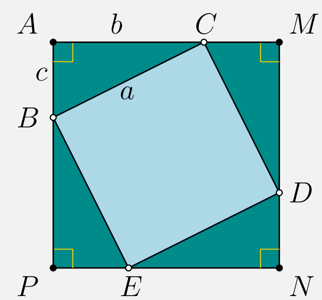
Décortiquons cet énoncé, en disant qui est qui.

Objets La longueur des côtés AB, BC et BC d'un triangle

Hypothèses Le triangle ABC est rectangle en A

Conclusion La relation $BC^2 = AB^2 + AC^2$ est vraie

On peut *faire l'expérience* que ce théorème est vrai : nous dessinons 1000 triangles rectangles puis nous en mesurons leurs côtés AB, AC et BC. L'égalité $BC^2 = AB^2+AC^2$ sera vérifiée à tous les coups. En physique, cette confirmation expérimentale serait bien suffisante. En mathématiques, nous ne pouvons pas nous en satisfaire. En effet, la procédure expérimentale ne garantit pas que la formule est exacte *vraiment tout le temps* : peut-être que, pour le 1001-ème triangle qui sera tracé, cela ne marchera pas. Ou pour le suivant...
Pour affirmer le théorème de Pythagore, il faut être capable d'en fournir une *preuve générale*. Donnons-en une.



Démonstration. On définit les longueurs $a := BC$, $b := AC$ et $c := AB$. On forme le quadrilatère $AMNP$ obtenu en disposant deux copies CMD et DNE de ABC comme sur la figure : on aligne les points A, C, M (ce qui est possible puisque $A \neq C$), puis M, D, N. On construit le point P sur la droite (NE) de sorte que $EP = c$. Assurons-nous que le dessin ne nous trompe pas.

Lemme 1. *$AMNP$ est un carré de côté $b + c$. De plus, le triangle PBE est une copie de ABC.*

Démonstration. Par construction $(AM) \perp (MN)$ et $(MN) \perp (NP)$. De plus $AM = MN = NP = b + c$. Donc $AMNP$ est un carré. Comme ABC est rectangle en A il s'ensuit $B \in [A,P]$. Par construction $EP = c$. Puisque $AP = b + c$ et $AB = c$ alors $BP = b$. Enfin, PBE est rectangle en P, donc PBE est une copie de ABC. □

Lemme 2. *$BCDE$ est un carré de côté a.*

Démonstration. La longueur des côtés du quadrilatère $BCDE$ sont égales à a. Pour obtenir la conclusion, il suffit donc de montrer que l'angle $\widehat{BCD}$ est droit. La somme des angles $\widehat{ACB}$, $\widehat{CBA}$ et $\widehat{BAC}$ du triangle ABC vaut π. Comme $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$ par hypothèse (triangle rectangle en A) l'égalité $\widehat{ACB} + \widehat{CBA} = \frac{\pi}{2}$ s'ensuit. Par ailleurs $\widehat{DCM} = \widehat{CBA}$, puisque CMD est une copie de ABC. Mais A, C et M sont alignés, donc $\widehat{ACB} + \widehat{BCD} + \widehat{DCM} = \pi$. Par suite $\widehat{BCD} = \frac{\pi}{2}$. □

Les triangles ABC, DCM, EDN, EPB et le carré $BCDE$ n'empiètent pas les uns sur les autres, et mis tous ensemble ils forment le carré $AMNP$. On peut donc utiliser l'additivité de l'aire :

$$\mathrm{Aire}(AMNP) = 4 \times \mathrm{Aire}(ABC) + \mathrm{Aire}(BCDE) .$$

Notons en effet que l'aire de tous les triangles est la même (puisqu'ils sont tous des copies de ABC). Déterminons pour finir la valeur de chacun des termes à partir des propriétés géométriques connues :

(aire d'un carré) $\mathrm{Aire}(AMNP) = (b + c)^2 = b^2 + 2bc + c^2$ et $\mathrm{Aire}(BCDE) = a^2$

(aire d'un triangle) $\mathrm{Aire}(ABC) = \frac{bc}{2}$ car le triangle est rectangle en A

On en déduit l'égalité attendue :

$$b^2 + 2bc + c^2 = 4 \times \frac{bc}{2} + a^2 \iff b^2 + c^2 = a^2 .$$

□

Il est tout aussi important de connaître les hypothèses d'un énoncé que sa conclusion ! On ouvre rarement la bonne porte avec la mauvaise clef…

Poursuivons notre exemple pour illustrer cette mise en garde.

Commençons pas établir un corollaire du théorème de Pythagore.

Définition. Un triangle ABC est **équilatéral** si tous ses côtés ont même longueur.

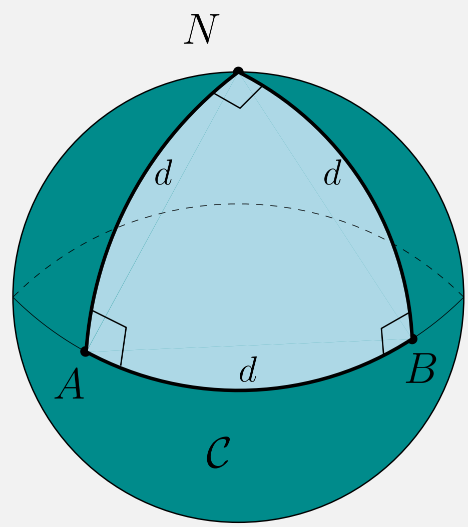
Corollaire. *Dans le plan euclidien, il n'y a aucun triangle à la fois rectangle et équilatéral.*

Démonstration. Supposons qu'un tel triangle existe. Si nous arrivons à déduire logiquement une contradiction à partir de cette hypothèse, c'est qu'elle est fausse (démonstration par l'absurde). Considérons le réel x donné par la longueur de chacun des côtés. D'après le théorème de Pythagore on a

$$x^2 = x^2 + x^2 ,$$

soit encore $x^2 = 0$. La seule solution est $x = 0$, donc le triangle doit être dégénéré en A, B et C. Mais cette éventualité est interdite par la définition de triangle rectangle en A : c'est une contradiction. □

Finalement, nous allons illustrer l'importance du choix des hypothèses et des axiomes. Tout ce qui précède sous-entend les axiomes de la *géométrie euclidienne*. Si on change légèrement ces axiomes pour placer l'étude sur une sphère (comme c'est le cas à la surface de la Terre), alors on obtient un résultat bien différent.



Proposition. *Sur une sphère, on peut dessiner un triangle à la fois rectangle et équilatéral.*

Remarque. Bien sûr on ne peut pas tracer de droite euclidienne sur une sphère, puisque c'est une surface courbe. Par contre on sait tous ce que signifie «aller tout droit» à la surface de la Terre ! On parlera quand même de **ligne droite** (le terme savant est **géodésique**). De même, on est bien capable de mesurer des angles entre lignes droites.

Démonstration de la Proposition. Pour prouver cette proposition il suffit d'exhiber un exemple d'un tel triangle. Nous faisons référence à la figure ci-contre. On choisit un cercle équatorial $\mathcal{C}$ sur la sphère, et on place un point N qui est à égale distance de tous les points de l'équateur (on l'appelle «pôle nord»). Partant du pôle nord on se déplace en ligne droite jusqu'à atteindre l'équateur en un point A, parcourant ainsi une distance $d > 0$. Puis on se dirige vers l'est (ayant tourné d'un angle mesurant $\frac{\pi}{2}$) et on parcourt en ligne droite la distance d. On atteint alors le point B. Par construction NAB est un triangle rectangle en A (en fait en tous ses sommets !) et chacun de ses côtés mesure d : il est équilatéral. □

La seule hypothèse qui change entre le corollaire et la proposition est le type d'espace dans lequel on fait de la géométrie : soit un plan euclidien (courbure nulle), soit une sphère (courbure positive). À la surface d'une sphère le cinquième postulat d'Euclide («étant donnée une ligne droite Δ et un point $A \notin \Delta$, il existe une et une seule ligne droite parallèle à Δ et passant par A») n'est pas vérifié. En effet, sur une sphère il n'existe pas deux lignes droites distinctes qui soient parallèles : elles s'intersectent forcément. En changeant ce cinquième postulat on donne naissance à deux autres géométries : la **géométrie sphérique** («il n'existe pas de parallèle à Δ passant par A») de courbure positive et la **géométrie hyperbolique** («par A passe une infinité de droites parallèle à Δ») de courbure négative.

1.3 Ensembles usuels de nombres

Ici nous expliquons à un niveau informel comment construire les ensembles de nombres. Certaines constructions seront vues plus en détail en Algèbre, d'autres en Analyse au second semestre.

1.3.1 $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$: entiers

- À partir des axiomes de Peano on construit un ensemble infini, noté $\mathbb{N}$, contenant un plus petit élément, noté 0, et tous les éléments successifs, notés 1, 2, 3 *etc*. On parle de l'ensemble des **entiers naturels**.
  L'existence d'un ensemble infini est donc purement axiomatique : c'est une *croyance*, qui n'a d'ailleurs rien d'évident (je n'ai jamais croisé d'ensemble infini dans la rue) et qui est –très marginalement– rejetée par certains mathématiciens.
- On construit l'ensemble $\mathbb{Z}$ des **entiers** (relatifs) en ajoutant pour chaque entier n son **opposé** noté $-n$. Par définition, l'opposé de n est tel que

$$n + (-n) = 0 .$$

1.3.2 $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$: décimaux et rationnels

- On fabrique l'ensemble $\mathbb{Q}$ des **rationnels** en formant les fractions d'entiers notées $\frac{p}{q}$ avec $p,\ q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0$. Par définition, la fraction $\frac{p}{q}$ vérifie

$$q \times \frac{p}{q} = p .$$

  Si $p \neq 0$ le rationnel $\frac{q}{p}$ est l'**inverse** du rationnel $\frac{p}{q}$.
- Un sous-ensemble important de $\mathbb{Q}$ est l'ensemble $\mathbb{D}$ des **décimaux**, c'est-à-dire les rationnels de la forme $\frac{p}{10^n}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. L'écriture décimale de ces nombres ne contient qu'un nombre fini de décimales non nulles.

1.3.3 $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$: réels et complexes

- La droite réelle $\mathbb{R}$ est, par opposition aux ensembles précédents, un objet beaucoup plus difficile à concevoir. Cette construction sera approfondie au second semestre. Pour faire vite, un **nombre réel** est une écriture décimale pouvant contenir une infinité de chiffres après la virgule. La plupart des subtilités provient du fait que

$$0,9999\ldots = 1 .$$

- L'ensemble des **nombres complexes** $\mathbb{C}$ est constitué des nombres de la forme $a+\mathrm{i}b$ avec $a,\ b \in \mathbb{R}$, et i est un objet abstrait satisfaisant l'identité

$$\mathrm{i}^2 + 1 = 0 .$$

  On les étudiera plus en détail au chapitre 3.

1.3.4 Sous-ensembles usuels

En général il est commode de mettre en indice une propriété afin de sélectionner certains éléments. Pas besoin de faire une dissertation démesurée, quelques exemples suffiront. Cette notation n'est pas standard, mais elle est suffisamment explicite pour que tout le monde la comprenne.

Exemple 1.1.

1. L'ensemble des réels positifs (que tu connais sous la forme $\mathbb{R}_+$) va s'écrire ici $\mathbb{R}_{\geq 0}$. De même on rencontrera $\mathbb{R}_{>0}$ au lieu de $\mathbb{R}_+^*$.
2. L'ensemble des entiers non nuls s'écrira $\mathbb{Z}_{\neq 0}$.
3. L'ensemble des entiers naturels inférieurs à 199 pourra être noté $\mathbb{N}_{\leq 199}$.

1.4 Un peu de théorie des ensembles

Nous introduisons ici quelques notations standards et certaines propriétés, sans rentrer dans les détails (ceux-ci seront vus en MTU).

1.4.1 Assignation et égalité

Dans ce cours on distingue deux usages du symbole «=».

Définition 1.2.

1. On emploie la notation «$a = b$» pour exprimer l'**égalité** (réelle et supposée) entre a et b. Par exemple l'assertion «$1 = 2$» est fausse.
2. On emploie la notation «$a := b$» pour exprimer l'**assignation** de la valeur b à la variable a. Par exemple l'expression «$x := 2$» signifie qu'à partir de maintenant le symbole x désigne le nombre 2.

Attention. *Dans la plupart des langages informatiques actuels, «a == b» désigne le test d'égalité entre a et b alors que «a = b» désigne l'assignation de b à a.*

1.4.2 Ensembles et appartenance

La théorie des ensembles est un ingrédient primitif des mathématiques. Comme tout fondement, sa formulation est délicate et a beaucoup évolué tout au long de l'histoire. Nous n'en dirons pas plus, et continuerons à faire comme si tout était clair...

Nous considérerons qu'un **ensemble** est une collection d'**éléments**. On note les éléments d'un ensemble entre accolades $\{\cdots\}$ comme ceci :

$$\textbf{ensemble} = \{\textbf{éléments}\} .$$

Définition 1.3. On emploie la notation «$a \in A$» pour signifier que l'objet a est un élément de l'ensemble A. On dit aussi que a **appartient** à A. Dans le cas contraire on écrit $a \notin A$.

Exemple 1.4. L'ensemble des entiers naturels inférieurs à 10 est

$$\mathbb{N}_{\leq 10} = \{0, 1, 2, 3; 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} .$$

Définition 1.5. En général on fabrique des ensembles A comme sous-ensembles d'ensembles B déjà construits en retenant seulement les éléments vérifiant une propriété $\mathcal{P}$:

$$A := \{x \in B \ : \ \mathcal{P}(x)\} .$$

Cela s'appelle construire un **ensemble en compréhension**. Quand le contexte n'offre pas d'ambiguïté sur l'ensemble B, on écrit plus simplement $A := \{x : \mathcal{P}(x)\}$, ou à la rigueur $A := \{\mathcal{P}(x)\}$.

Exemple 1.6. La droite Δ du plan euclidien de pente -3 et qui passe par $(0, 4)$ peut s'écrire sous ces trois formes

$$\begin{aligned} \Delta &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = -3x + 4\right\} \\ &= \{(x, y) \ : \ y = -3x + 4\} \\ &= \{y = -3x + 4\} . \end{aligned}$$

Ici $B = \mathbb{R}^2$, $A = \Delta$ et $\mathcal{P}(x, y) =$ «$y = -3x + 4$».

Cette approche simpliste de la théorie des ensembles est malheureusement trop naïve pour éviter les soucis, bien que les premiers problèmes n'ont été décelés que tardivement. Au début du xx° le philosophe et mathématicien Russel a exhibé une incohérence due à la construction des ensembles en compréhension. Cet exemple extrêmement simple a ébranlé les fondements des mathématiques.

Paradoxe de Russel. *Considérons l'ensemble X formé des ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes :*

$$X := \{A \ : \ A \notin A\} .$$

- ⊙ *Ou bien $X \in X$, auquel cas $X \notin X$ par définition de X. C'est absurde.*
- ⊙ *Ou bien $X \notin X$, auquel cas $X \in X$ par définition de X. C'est également absurde.*

La formulation en langage commun de ce paradoxe est la suivante.

Question. *On considère un village dans lequel habite un barbier, qui rase tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes et seulement ceux-là. Qui rase le barbier ?*

La réponse à la question est qu'un tel village n'existe pas. Au niveau mathématique, la conclusion est qu'on ne peut pas autoriser toutes les constructions en compréhension dans les fondements mathématiques. Soyons rassurés, aucun paradoxe ne naît des constructions de Licence de mathématiques...

Définition 1.7. On utilise le symbole $\emptyset$ pour désigner l'**ensemble vide**, c'est-à-dire l'ensemble qui n'a aucun élément. On pourrait aussi l'écrire $\{\}$.

1.4.3 Inclusion

Définition 1.8.

1. On dit que A est **inclus** (contenu) dans B, ce qui s'écrit «$A \subset B$», lorsque tout élément de A est aussi un élément de B :
$$« x \in A \Longrightarrow x \in B » .$$
On dit aussi que A est un **sous-ensemble** de B.
2. Pour insister sur le fait que $A \subset B$ mais que B a plus d'éléments que A (c'est-à-dire $A \neq B$) on écrit « $A \subsetneq B$ » et on dit que A est **strictement inclus** dans B.

Proposition 1.9. *$A = B$ si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$.*

Exemple 1.10.
$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C} .$$

1.4.4 Union

Définition 1.11. On utilise la notation «$A \cup B$» pour désigner l'ensemble obtenu en réunissant tous les éléments de A et de B. Cet ensemble s'appelle l'**union** de A et B et on prononce « A union B ».

Remarque 1.12. La propriété «$x \in A \cup B$» est équivalente à «$x \in A$ **ou** $x \in B$».

Proposition 1.13. *Si $A \subset B$ alors $A \cup B = B$.*

Exemple 1.14. $[-1,2] \cup [1,7] = [-1,7]$.

1.4.5 Intersection

Définition 1.15. On utilise la notation «$A \cap B$» pour désigner l'ensemble obtenu en prenant les éléments qui sont à la fois dans A et dans B. Cet ensemble s'appelle l'**intersection** de A et B et on prononce « A inter B ».

Remarque 1.16. La propriété «$x \in A \cap B$» est équivalente à «$x \in A$ **et** $x \in B$».

Proposition 1.17. *Si $A \subset B$ alors $A \cap B = A$.*

Exemple 1.18. $[-1,2] \cap [1,7] = [1,2]$.

1.4.6 Différence

Définition 1.19. L'ensemble obtenu en enlevant à B les éléments qui sont aussi dans A s'appelle la **différence de** A **dans** B. On utilise la notation «$B \backslash A$»n qui se prononce « B privé de A »

Remarque 1.20. La propriété «$x \in B \backslash A$» est équivalente à «$x \in B$ **et** $x \notin A$». On peut aussi écrire $B \backslash A = \{x \in B \ : \ x \notin A\}$.

Exemple 1.21. $[-1,2] \setminus [1,7] = [-1,1[$.

1.4.7 Produit

Définition 1.22. Étant donnés deux ensembles A et B on fabrique le **produit cartésien** $A \times B$ de A et B comme l'ensemble des couples (a,b) où $a \in A$ et $b \in B$:
$$A \times B := \{(a,b) \ : \ a \in A \text{ et } b \in B\} \ .$$

On utilise les notations habituelles en matière de puissances : $A = A^1$, $A \times A = A^2$ *etc*.

Exercice 1.23. L'espace réel à trois dimensions est $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y,z) \ : \ x, \ y, \ z \in \mathbb{R}\}$.

1.5 Quantification

On rencontre sans cesse deux symboles en mathématiques, les **quantificateurs**. Il faut toujours quantifier correctement une phrase mathématique. L'équivalent en informatique consiste à déclarer une variable avant de s'en servir.

- «**Il existe** x dans A **tel que** $\mathcal{P}(x)$ soit vraie» s'écrit en symboles : $(\exists x \in A \ : \ \mathcal{P}(x))$
- «**Pour tout** x dans A, la propriété $\mathcal{P}(x)$ est vraie» s'écrit en symboles : $(\forall x \in A) \ \mathcal{P}(x)$

1.6 De l'usage des symboles mathématiques

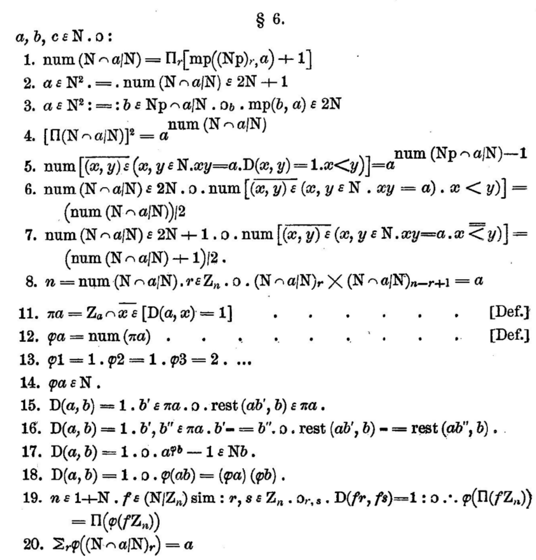
Le langage de tous les jours («langage commun») contient beaucoup trop d'informations cachées ou de qualifications imprécises pour pouvoir être un socle sur lequel bâtir une théorie fiable et sans ambiguïté. Dans le proverbe «la nuit, tous les chats sont gris», il n'est en effet pas clair de quelle nuit on parle : la nuit à venir ? celle du 17 février 1998 ? toutes les nuits ? La nécessité de préciser les choses est une difficulté majeure dans le passage du langage commun au discours scientifique. C'est d'ailleurs le principal problème auquel tu seras confronté : donner à un texte écrit en Français, comme un énoncé d'exercice ou une proposition, une formulation / interprétation mathématique claire et précise. C'est la fameuse «mise en équation».

La solution proposée par les mathématiques est l'utilisation d'une syntaxe et d'un alphabet propres. Donnons un exemple simple. La phrase mathématique

$$\text{« } (\forall x \in \mathbb{R}) \ \ (x \leq 0 \ \wedge \ x \geq 0 \implies x = 0) \text{ »}$$

se lit «pour tout x réel, si $x \leq 0$ et $x \geq 0$ alors $x = 0$» et sera traduite plus joliment par : «le seul réel à la fois positif et négatif est 0». Cependant, en pratique il serait bien difficile de comprendre un texte mathématique s'il était rédigé uniquement avec des symboles (voir Figure 1.6.1). À l'inverse, avant le milieu du xix° les mathématiciens n'utilisaient que peu de symboles, rendant de nos jours ces textes impossibles à comprendre en première lecture.

Bien écrire les mathématiques est un art, et cela s'apprend. La première étape est de se convaincre qu'un texte mathématique est avant tout un texte, mais rédigé de manière plus précise que le langage commun. Par exemple, on écrira le proverbe cité plus haut sous la forme «toutes les nuits, tous les chats sont gris».



§ 6.

$a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, \supset :$

1. $\mathrm{num}\,(\mathrm{N} \frown a/\mathrm{N}) = \Pi_r[\mathrm{mp}((\mathrm{Np})_r, a) + 1]$
2. $a \,\varepsilon\, \mathrm{N}^2 \,.=.\, \mathrm{num}\,(\mathrm{N} \frown a/\mathrm{N}) \,\varepsilon\, 2\mathrm{N} + 1$
3. $a \,\varepsilon\, \mathrm{N}^2 :=: b \,\varepsilon\, \mathrm{Np} \frown a/\mathrm{N} \,.\supset_b.\, \mathrm{mp}(b, a) \,\varepsilon\, 2\mathrm{N}$
4. $[\Pi(\mathrm{N} \frown a/\mathrm{N})]^2 = a^{\mathrm{num}\,(\mathrm{N} \frown a/\mathrm{N})}$
5. $\mathrm{num}\,[\overline{(x, y)\,\varepsilon}\,(x, y \,\varepsilon\, \mathrm{N} . xy = a . \mathrm{D}(x, y) = 1 . x < y)] = a^{\mathrm{num}\,(\mathrm{Np} \frown a/\mathrm{N}) - 1}$
6. $\mathrm{num}\,(\mathrm{N} \frown a/\mathrm{N}) \,\varepsilon\, 2\mathrm{N} \,.\supset.\, \mathrm{num}\,[\overline{(x, y)\,\varepsilon}\,(x, y \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, xy = a) \,.\, x < y)] = (\mathrm{num}\,(\mathrm{N} \frown a/\mathrm{N}))/2$
7. $\mathrm{num}\,(\mathrm{N} \frown a/\mathrm{N}) \,\varepsilon\, 2\mathrm{N} + 1 \,.\supset.\, \mathrm{num}\,[\overline{(x, y)\,\varepsilon}\,(x, y \,\varepsilon\, \mathrm{N} . xy = a . x \leqq y)] = (\mathrm{num}\,(\mathrm{N} \frown a/\mathrm{N}) + 1)/2 \,.$
8. $n = \mathrm{num}\,(\mathrm{N} \frown a/\mathrm{N}) . r \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_n \,.\supset.\, (\mathrm{N} \frown a/\mathrm{N})_r \times (\mathrm{N} \frown a/\mathrm{N})_{n-r+1} = a$

11. $\pi a = \mathrm{Z}_a \frown \overline{x\,\varepsilon}\,[\mathrm{D}(a, x) = 1]$ . . . . [Def.]
12. $\varphi a = \mathrm{num}\,(\pi a)$ . . . . [Def.]
13. $\varphi 1 = 1 \,.\, \varphi 2 = 1 \,.\, \varphi 3 = 2 \,.\, \ldots$
14. $\varphi a \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.$
15. $\mathrm{D}(a, b) = 1 \,.\, b' \,\varepsilon\, \pi a \,.\supset.\, \mathrm{rest}\,(ab', b) \,\varepsilon\, \pi a \,.$
16. $\mathrm{D}(a, b) = 1 \,.\, b', b'' \,\varepsilon\, \pi a \,.\, b' -= b'' .\supset.\, \mathrm{rest}\,(ab', b) -= \mathrm{rest}\,(ab'', b) \,.$
17. $\mathrm{D}(a, b) = 1 \,.\supset.\, a^{\varphi b} - 1 \,\varepsilon\, \mathrm{N}b \,.$
18. $\mathrm{D}(a, b) = 1 \,.\supset.\, \varphi(ab) = (\varphi a)\,(\varphi b) \,.$
19. $n \,\varepsilon\, 1 + \mathrm{N} \,.\, f \,\varepsilon\, (\mathrm{N}/\mathrm{Z}_n)\,\mathrm{sim} : r, s \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_n \,.\supset_{r,s}.\, \mathrm{D}(fr, fs) = 1 :\supset.\cdot.\, \varphi(\Pi(f\mathrm{Z}_n)) = \Pi(\varphi(f\mathrm{Z}_n))$
20. $\Sigma_r \varphi((\mathrm{N} \frown a/\mathrm{N})_r) = a$

Figure 1.6.1 – Un extrait du livre *Formulaire de mathématiques* de Peano, écrit essentiellement en symboles. Débordant de clarté… Hormis l'avant propos, *tout* l'ouvrage (144p) est écrit comme ça.

Voici quatre règles simples de «mathiquette» concernant la manière dont tu devrais rédiger les textes mathématiques.

1. Utilise des mots, fais des phrases.
2. Explique ce que tu fais, ou ce qu'il faudrait faire.
3. N'utilise pas de symboles pour remplacer des mots dans une phrase.
4. Les formules comptent comme des mots dans une phrase : n'oublie pas la ponctuation. Si possible, reviens à la ligne pour écrire une grosse formule.

Remarque 1.24. Ce n'est jamais une perte de temps ! Le lecteur appréciera toujours l'effort mis pour te rendre intelligible. Écris ce que tu as l'intention de faire, même si tu n'y es pas arrivé au brouillon : si tu n'écris rien on ne peut même pas savoir si tu as compris la question ou si tu as la moindre idée de comment la résoudre.

Montrons ce que pourrait être une rédaction convenable pour une résolution d'exercices (volontairement incomplète).

Exercice. Résoudre l'équation $X^2 - 3X - 1 = 0$.

Réponse. *Je reconnais une équation du second degré. Son discriminant est donné par :*

$$3^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 13 \,.$$

Les solutions de l'équation sont donc les réels x_- et x_+ définis par $x_\pm := \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Exercice 1.25. Démontrer que pour chaque $x \in \mathbb{R}$ on peut trouver $y \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq y + \exp y$.

Réponse. *On sait que :*

$$(\forall y \geq 0) \ \ y + \exp y \geq \exp y \geq 1 \,.$$

Donc si $x \leq 1$, la propriété est vraie (il suffit de prendre $y := 0$). Il reste à traiter le cas $x > 1$. Je n'ai pas su résoudre exactement la question, mais comme $\lim_{y \to +\infty} y + \exp y = +\infty + \infty = +\infty$, ça doit être vrai.