Cours de modélisation L1S2P

2017

Aujourd'hui :

Evolution des populations et suites récurrentes.

Modélisation la plus simple.

On considère une population, disons de bactéries. On veut modéliser son évolution. On note p_n la population au jour n.

Hypothèse simpliste : le nombre de bactéries qui meurent est propotionnel à p_n, le nombre de bactéries qui naissent est propotionnel à p_n.

$$p_{n+1} = \alpha p_n$$

On en déduit

$$p_n = \alpha p_{n-1} = \alpha^2 p_{n-1} = \cdots = \alpha^n p_O$$

On a donc une croissance exponentielle $\rightsquigarrow$ ce modèle n'est pas réaliste si $\alpha > 1$.

Modélisation à la Fibonacci.

Cette fois, on a des lapins. On part avec $p_0 = 0$ et $p_1 = 1$ (un couple de lapins de 1 mois), et on suppose que chaque couple d'au moins 2 mois donne naissance à un couple chaque mois.

$$p_{n+1} = p_n + p_{n-1}$$

On recherche des solutions de la récurrence de la forme x^n. On doit donc avoir $x^2 - x - 1 = 0$ ce qui donne $x_\pm = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Puis on constate que si l'on peut choisir λ_1 et λ_2 pour que

$$\lambda_1(x_+)^n + \lambda_2(x_-)^n = p_n$$

pour $n = 0$ et $n = 1$, donc pour tout n !

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

donc

$$p_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$$

encore une fois, ce n'est pas réaliste.

Suites récurrentes linéaires

Théorème

Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des suites réelles (ou complexes) vérifiant

$$u_{n+d} = a_{d-1}u_{n+d-1} + \cdots + a_0 u_n \quad (a_0 \neq 0).$$

On introduit le *polynôme caractéristique* $P(Z) = Z^d - a_{d-1}Z^{d-1} - \cdots - a_0$.

Dans $\mathbf{C}$, on peut le factoriser sous la forme

$$P(Z) = (Z-\omega_1)^{\alpha_1}\cdots(Z-\omega_s)^{\alpha_s} \quad \text{avec } \alpha_1 + \cdots + \alpha_s = d \quad .$$

Considérons les d suites de la forme

$$S_n(\omega_i, j) = n^j \omega_i^n \quad \text{avec} \quad 0 \le j < \alpha_i \quad .$$

Alors tout élément $(u_n)_n \in \mathcal{U}$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$u_n = \lambda_1 S_n(\omega_1, 0) + \cdots + \lambda_d S_n(\omega_s, \alpha_s)$$

Démonstration : dans votre cours d'algèbre linéaire (chapitre "forme de Jordan"). On peut déjà noter que $\mathcal{U}$ est un espace vectoriel de dimension d, et que le théorème dit que les suites $S(\omega_i, j)$ en forment une base.

Modélisation à la Fibonacci avec mort.

Supposons maintenant que nos lapins meurent tous au bout de 3 mois :

$$p_{n+1} = p_n + p_{n-1} - p_{n-2}$$

Le polynôme caractéristique est

$$P(Z) = Z^3 - Z^2 - Z + 1 = (Z-1)^2(Z+1)$$

Donc d'après le théorème, $(p_n)_n$ est de la forme

$$p_n = \lambda_1.1^n + \lambda_2.n.1^n + \lambda_3.(-1)^n$$

On trouve les valeurs suivantes :
$\rightsquigarrow$ $u_n \sim \lambda_2 n$ moins explosif, mais encore pas réaliste.

La suite logistique

Il s'agit de la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & ru_n(1-u_n) \end{cases}$$

Elle modélise la croissance d'une population avec les deux conditions suivantes :

- s'il n'y a pas grand monde (la population est loin de 1), alors la population augmente proportionnellement, c'est le terme ru_n ;
- s'il y a trop de monde (la population est proche de 1), tout le monde a faim, et la fécondité décroit, c'est le terme $(1-u_n)$.

C'est une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ avec

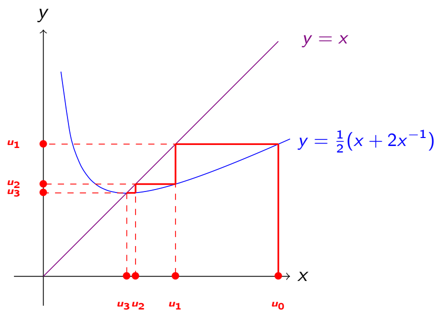
$$f(x) = rx(1-x) \quad .$$

Etudions quelques suites de ce type, avant de regarder notre suite logistique.

Interprétation graphique

Commençons avec un exemple : la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec

$$f(x) = \frac{1}{2}(x + 2x^{-1}).$$



$u_{n+1} = f(u_n)$: deuxième exemple

On considère la suite définie comme suit :

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \cos(x) \end{cases}$$

Voici les premières valeurs :

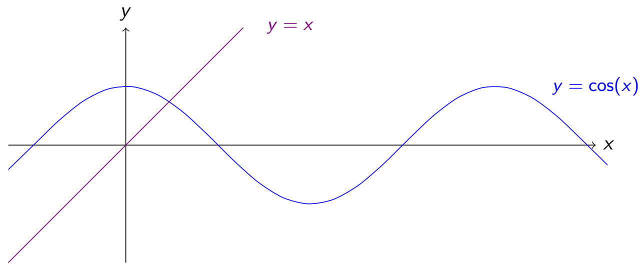
$u_1 = 1.0000$	$u_8 = 0.72210$	$u_{15} = 0.74015$	$u_{22} = 0.73902$
$u_2 = 0.54031$	$u_9 = 0.75042$	$u_{16} = 0.73837$	$u_{23} = 0.73913$
$u_3 = 0.85755$	$u_{10} = 0.73141$	$u_{17} = 0.73957$	$u_{24} = 0.73905$
$u_4 = 0.65429$	$u_{11} = 0.74424$	$u_{18} = 0.73876$	$u_{25} = 0.73911$
$u_5 = 0.79348$	$u_{12} = 0.73560$	$u_{19} = 0.73930$	$u_{26} = 0.73907$
$u_6 = 0.70137$	$u_{13} = 0.74142$	$u_{20} = 0.73894$	$u_{27} = 0.73910$
$u_7 = 0.76396$	$u_{14} = 0.73751$	$u_{21} = 0.73918$	$u_{28} = 0.73908$

Ca semble converger !

La limite doit être une solution de l'équation

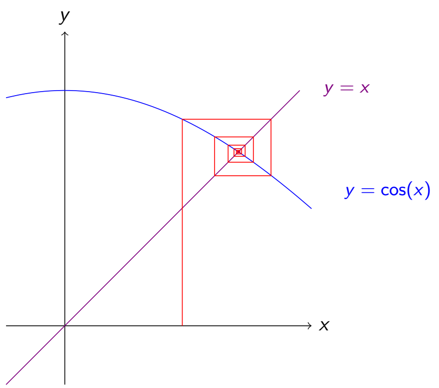
$$\cos(x) = x \quad .$$

Interprétation graphique



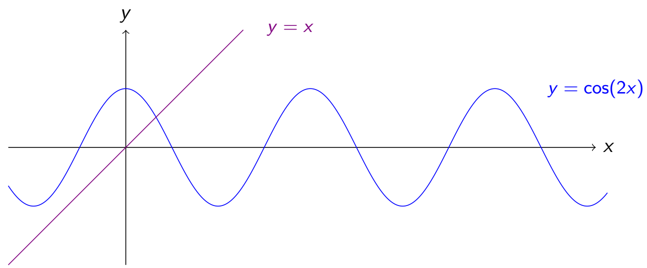
L'équation $x = \cos(x)$ a une unique solution.

Interprétation graphique



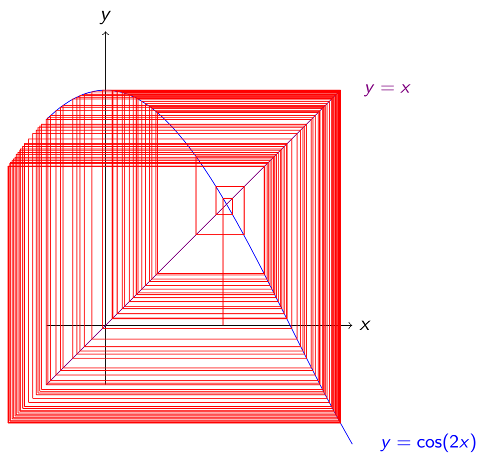
$u_{n+1} = f(u_n)$: troisième exemple

On est donc tentés de voir si on trouve toujours une solution de $x = f(x)$ de cette façon-là ...



L'équation $x = \cos(2x)$ a une unique solution.

Interprétation graphique



Points fixes attractifs et répulsifs

On dit qu'un x tel que l'on ait

$$x = f(x)$$

est un **point fixe** de f.

On dit qu'il est **attractif** si, lorsqu'on prend u_0 proche de x, la suite u_n définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers x.

Si au contraire la suite u_n a tendance à s'échapper, on dit que x est un point fixe **répulsif**.

Critère.

Si x est un point fixe, alors

- x est attractif dès que $|f'(x)| < 1$,
- x est répulsif dès que $|f'(x)| > 1$,
- on ne peut pas dire directement la nature de x si $|f'(x)| = 1$.

Démonstration : dans votre cours d'analyse, comme corollaire du TAF.

Retour à la suite logistique

Y a-t-il un point fixe ?

$$\begin{array}{rccc} & f(x) & = & x \\ \Leftrightarrow & rx(1-x) & = & x \\ \Leftrightarrow & x(r(1-x)-1) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x = 0 \text{ ou } x = \frac{r-1}{r} & = & 0 \end{array}$$

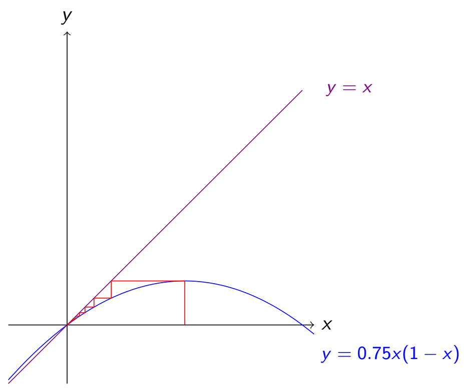
Donc on a deux points fixes. Or on a

$$f'(x) = r - 2rx$$

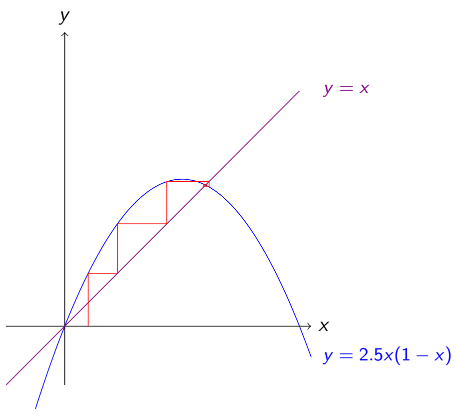
donc

- $f'(0) = r$, donc $x = 0$ est un point fixe attractif pour $r < 1$, et répulsif pour $r > 1$.
- $f'(\frac{r-1}{r}) = r - 2(r-1) = 2 - r$ donc le point fixe $x = \frac{r-1}{r}$ est attractif pour $r \in]1, 3[$ et répulsif si $r \in [0, 1[$ ou si $r \in]3, 4]$.

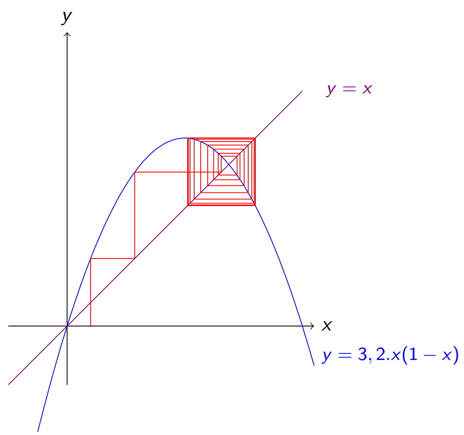
La suite logistique : exemple de $r = 0.75$



La suite logistique : exemple de $r = 2.5$



La suite logistique : exemple de $r = 3.2$



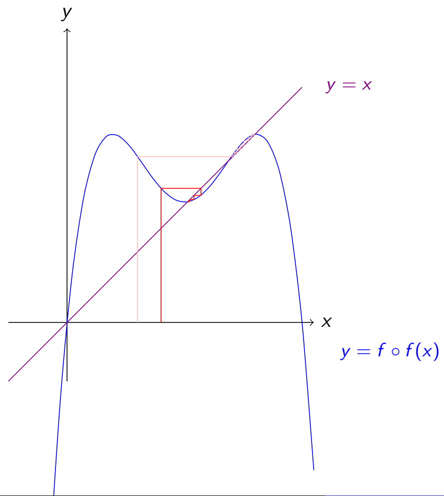
La suite logistique : exemple de $r = 3.2$ suite.

Observons les premières valeurs :

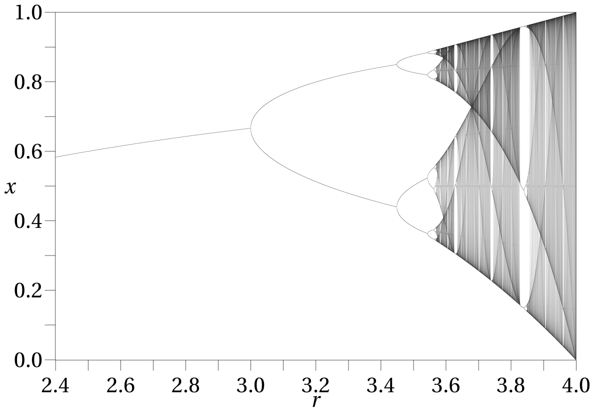
$u_1 = 0.28800$	$u_8 = 0.59754$	$u_{15} = 0.79853$	$u_{22} = 0.51305$
$u_2 = 0.65618$	$u_9 = 0.76955$	$u_{16} = 0.51481$	$u_{23} = 0.79945$
$u_3 = 0.72195$	$u_{10} = 0.56749$	$u_{17} = 0.79930$	$u_{24} = 0.51305$
$u_4 = 0.64236$	$u_{11} = 0.78542$	$u_{18} = 0.51334$	$u_{25} = 0.79945$
$u_5 = 0.73514$	$u_{12} = 0.53931$	$u_{19} = 0.79943$	$u_{26} = 0.51305$
$u_6 = 0.62307$	$u_{13} = 0.79506$	$u_{20} = 0.51309$	$u_{27} = 0.79945$
$u_7 = 0.75153$	$u_{14} = 0.52142$	$u_{21} = 0.79945$	$u_{28} = 0.51305$

On dit que les points $x_1 \sim 0.79$ et $x_2 \sim 0.51$ sont des points **périodiques**.

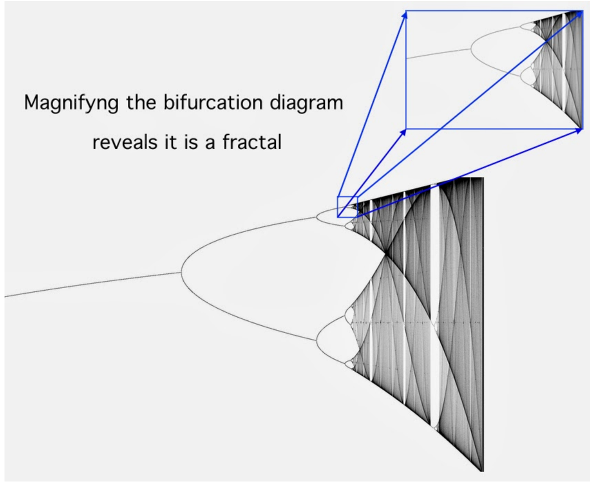
Autre interprétation graphique :



Si l'on continue, voici ce que l'on observe :



et, magie ! ! !



Et le chaos dans tout ça ?

On dit qu'un *système dynamique* est **chaotique** si son comportement à moyen terme est complètement différent pour deux valeurs initiales prises au hasard, mais très proches l'une de l'autre. Revenons sur notre exemple de suite logistique. Avec $r = 4$ on obtient :

$u_0 = 0.2$	$u_0 = 0.2001$
$u_1 = 0.6400000000$	$u_1 = 0.6402399600$
$u_2 = 0.9216000001$	$u_2 = 0.9213310145$
$u_3 = 0.2890137598$	$u_3 = 0.2899207049$
$u_4 = 0.8219392257$	$u_4 = 0.8234667592$
$u_5 = 0.5854205398$	$u_5 = 0.5814770228$
$u_6 = 0.9708133255$	$u_6 = 0.9734459790$
$u_7 = 0.1133392499$	$u_7 = 0.1033956199$
$u_8 = 0.4019738575$	$u_8 = 0.3708198626$
$u_9 = 0.9615635016$	$u_9 = 0.9332499684$
$u_{10} = 0.1478365361$	$u_{10} = 0.2491778595$
$u_{11} = 0.5039235788$	$u_{11} = 0.7483530155$
$u_{12} = 0.9999384221$	$u_{12} = 0.7532831188$
$u_{13} = 0.0002462963706$	$u_{13} = 0.7433906469$
$u_{14} = 0.0009849428347$	$u_{14} = 0.7630439720$
$u_{15} = 0.003935890889$	$u_{15} = 0.7232314751$

Exercices

Exo.1 : On suppose que $(p_n)_n$ est une suite vérifiant la relation

$$p_{n+3} = 3p_{n+2} - 3p_{n+1} + 2p_n$$

À quelle condition sur p_0, p_1 et p_2 cette suite reste-t-elle bornée ?

Exo. 2 : On change un peu le modèle de Fibonacci. On suppose cette fois que l'on a

$$p_{n+3} = p_{n+1} + p_n \quad .$$

Montrer que le polynôme $Z^3 - Z - 1$ a exactement une racine réelle ρ, et montrer les inégalités $1.3 < \rho < 1.4$. En déduire que les deux autres racines (complexes) sont de module < 1 et donc que pour une certaine constance c, on a $p_n \sim c.\rho^n$.

Cette racine est un nombre connu sous le nom de *nombre plastique*. La méthode de Cardan donne $\rho = \frac{\sqrt[3]{108+12\sqrt{69}} + \sqrt[3]{108-12\sqrt{69}}}{6}$. On voit aussi que l'on a $\rho = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \cdots}}}}$

Exo. 3 : Une homographie est une fonction réelle du type $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, avec $ad - bc \neq 0$.

- si a, b, c et d sont strictement positifs, montrer que cette suite est bien définie.
- quel est alors (en fonction de a, b, c et d) son comportement quand $n \to \infty$?
- En général, quelles sont les valeurs de u_0 pour lesquelles la suite est bien définie ?

Exo. 4 : Le modèle logistique ne prend pas en compte un facteur souvent important : si une population est trop peu nombreuse, au dessous d'un seuil α, elle périclite (pas facile de trouver un partenaire !) On met donc en place un modèle "bilogistique" :

$$u_{n+1} = ru_n.(1 - u_n)(u_n - \alpha)$$

Étudiez en fonction de r et de α l'évolution de u_n. Il vous est conseillé de commencer votre exploration à l'aide d'une calculatrice.