Aujourd'hui...

Introduction aux équations différentielles.

Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

Pour nous, et pour l'instant, une équation différentielle sera une équation du type

$$y'(t) = F(y(t), t)$$

où y est une fonction inconnue de la variable t, et sa dérivée.

Exemples :

$$\begin{array}{ll} (E_1) & y'(t) = t^2 + 1 \\ (E_2) & y'(t) = y \\ (E_3) & y'(t) = 2y - e^t \\ (E_4) & y'(t) = y^2 + 1 \end{array}$$

Une solution d'une telle équation différentielle est une fonction $t \mapsto y(t)$ **définie sur un intervalle** qui vérifie ladite équation. Par exemple, pour toute constante C, les fonctions suivantes (S_i) sont solutions de (E_i)

$$\begin{array}{ll} (S_1) & y(t) = \frac{t^3}{3} + t + C \\ (S_2) & y(t) = Ce^t \\ (S_3) & y(t) = e^t + Ce^{2t} \\ (S_4) & y(t) = \tan(t - C) \end{array}$$

D'où ça sort ?

• **En physique :**
Si un corps K de masse m est laché avec une vitesse nulle au moment t_0 d'une certaine hauteur h_0, ils subit deux forces : l'attraction gravitationnelle, d'intensité mg, et dirigée vers le bas, et une force de frottement $kv(t)^2$ proportionnelle au carré de sa vitesse, le coefficient k dépendant de la situation. Par exemple, si le corps est en dehors de l'atmosphère, on a $k = 0$. S'il c'est une bille de plomb lachée d'un avion, k est petit, et si c'est un parachutiste, k est grand.
Quelle que soit la situation, le principe fondamental de la Physique nous dit que la somme $mg - kv(t)^2$ est égale à $mv'(t)$. On a donc l'équation différentielle suivante :

$$v'(t) = g - \frac{k}{m}v(t)^2$$

soumise à la condition $v(t_0) = 0$.
Trouver une solution de cette équation différentielle permet de connaître la vitesse de K au temps $t > t_0$.

D'où ça sort ?

• **En chimie :**
Le carbone C_{12} a un isotope instable C_{14}. Celui-ci est produit dans la couche d'ozone et se trouve en quantité constante dans l'air, où il se dégrade lentement. Tout au long de notre vie, nous respirons cet air, et le C_{14} se fixe à nos os, et se dégrade en même temps, de sorte que la quantité de C_{14} par gramme de nos os est constante. Lorsque nous serons morts et enterrés, nous ne respirerons plus l'air, et le C_{14} ne se fixera plus, il ne fera que se dégrader, de sorte que la quantité de C_{14} par gramme d'os va baisser. Précisément, la loi est la suivante : il existe une période de temps T, appelée demi-vie du C_{14}, telle que la quantité de C_{14} par gramme est divisée par 2 en un temps T. Une autre façon de le dire est la suivante :

$$q'(t) = -\frac{\ln(2)}{T}q(T)$$

Lorsque dans plusieurs milliers d'années nos descendants exhumerons nos squelettes, il leur suffira de résoudre cette équation différentielle pour savoir depuis combien de temps nous gisons là.

D'où ça sort ?

- **En biologie :**
On étudie encore l'évolution d'une population p, mais cette fois avec un temps continu, et non plus discrêt. La suite logistique devient une équation logistique
$$p'(t) = ap(t)(1-p(t))$$
Résoudre cette équation différentielle permet de comprendre l'évolution de $p(t)$ en fonction du temps.

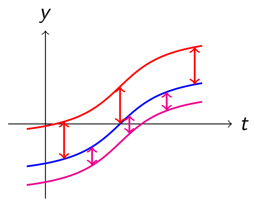
Bref, comme nous le voyons bien, il y a des équations différentielles partout.

La plupart du temps cependant, nous ne savons pas les résoudre et il faut se contenter d'une étude qualitative, qui nous apporte quand même des informations nombreuses et précieuses sur les phénomènes étudiés. Notre plan est le suivant :

1. Apprendre à mener une étude qualitative.
2. Apprendre à trouver des solutions explicites quand c'est possible.
3. Apprendre à trouver des solutions approchées quand c'est nécessaire.

Équations différentielles autonomes

Les équations différentielles du type
$$\text{(Int)} \qquad y' = f(t)$$
nous sont familières. Elles sont l'un des sujets du cours d'intégration.



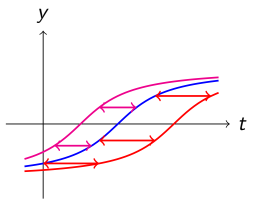
Elles sont particulière en ce sens que deux solutions sont "verticalement parallèles".

Autrement dit, elles diffèrent d'une constante. Plus précisément, si φ est solution, alors les solutions de l'équation sont exactement les fonctions de la forme $\varphi + C$ pour une certaine constante C réelle.

Réciproquement, si une équation différentielle a cette propriété, alors elle est équivalente à une équation différentielle du type (Int) : il nous suffit de prendre une solution φ et de dire que toute autre solution est aussi solution de $y'(t) = \varphi'(t)$.

Équations différentielles autonomes (2)

À l'opposé, considérons une équation différentielle du type
$$\text{(Aut)} \qquad y'(t) = f(y(t)) \quad .$$
Alors cette fois, si φ est solution, il en va de même de $\psi : t \mapsto \varphi(t-c)$
En effet, on a alors
$$\psi'(t) = (\varphi(t-c))' = (t-c)'\varphi'(t-c) = \varphi'(t-c) = f(\varphi(t-c)) = f(\psi(t))$$



Une telle équation différentielle (E) est dite autonome : les sciences en fournissent des tombereaux car elles contiennent en elles le principe suivant lequel les mêmes causes produiront les mêmes effets, indépendemment de la date de l'évènement …

Le théorème de Cauchy pour les équadiffs autonomes

Comme nous le savons depuis le cours d'intégration, pour toute donnée initiale (t_0, y_0), une équation différentielle du type
$$\text{(Int)} \qquad y'(t) = f(t)$$
admet une unique solution y telle que $y(t_0) = y_0$: c'est $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(t)dt$, à condition, bien sûr, que f soit continue pour que la fonction y ainsi obtenue soit dérivable.
Le thm de Cauchy donne un résultat semblable pour les équations autonomes :

Théorème de Cauchy

Soit J un intervalle ouvert sur lequel f est continue. Alors pour toute condition initiale (t_0, y_0) avec y_0 dans J, et pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe une solution $\varphi :]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\to \mathbf{R}$ de l'équadiff
$$\text{(Aut)} \qquad y'(t) = f(y(t))$$
telle que $\varphi(t_0)$ égale y_0.

Si de plus f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de y_0, alors cette solution est essentiellement unique : si une autre solution ψ vérifie $\psi(t_0) = y_0$, alors φ et ψ coïncident sur l'intersection de leurs intervalles de définition.

Intervalle maximal d'une solution

Dans la suite, nous supposerons toujours que f est de classe C^1 sur un intervalle ouvert J.
D'après le théorème de Cauchy, étant donnée une condition initiale (t_0, y_0), il existe un plus grand intervalle I_0 sur lequel est définie l'unique solution y passant par (t_0, y_0).

On dit que y est **la** solution passant par (t_0, y_0), et on appelle I_0 l'intervalle maximal de cette solution.

Nous étudierons bientôt le comportement de y aux bornes de cet intervalle.

Solutions stationnaires et sens de variation

Une solution stationnaire de

$$\text{(Aut)} \qquad y'(t) = f(y(t))$$

est une solution constante, c'est-à-dire une solution vérifiant l'une des CES :

$$\begin{aligned} & y(t) = y_0 \\ \Leftrightarrow \quad & y'(t) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & f(y_0) = 0 \end{aligned}$$

On dit alors que y_0 est une valeur critique.

De même, si $f(y_0)$ est strictement positive, alors la solution passant par (t_0, y_0) est strictement croissante au voisinage de y_0, et si f est strictement négative, alors la solution passant par (t_0, y_0) est strictement décroissante au voisinage de y_0.

Par conséquent, une étude du signe de f sur J nous donne des informations précieuses sur les solutions de (Aut).

Monotonie des solutions.

Les remarques précédentes, jointes au théorème de Cauchy, montrent que, lorsque f est de classe C^1, on a le résultat remarquable suivant :

Monotonie des solutions

Soit J un intervalle sur lequel f est de classe C^1. Alors une solution φ de l'équadiff

$$\text{(Aut)} \qquad y'(t) = f(y(t))$$

est stationnaire ou strictement monotone sur son intervalle maximal.

Convexité

De même, on calcule $y'' = (f(y))' = y'f'(y) = f(y)f'(y)$. Ainsi, une étude du signe de f' sur J nous permet de savoir où les solutions sont convexes, concaves, ou admettent un point d'inflexion.

Limites

La fonction f est toujours définie et C^1 sur un intervalle qu'on suppose ici de la forme $]a, b[$ (où a et b peuvent être infinis)
Supposons que

$$\text{(Aut)} \qquad y'(t) = f(y(t))$$

admet une solution φ définie sur un intervalle maximal $I_0 =]\alpha, \beta[$.
Si φ est stationnaire, alors on a $\alpha = -\infty$ et $\beta = +\infty$.
Si φ est strictement croissante, alors on a les possibilités suivantes :

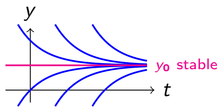
- $\varphi(t)$ tend vers b lorsque $t \to \beta$,
- $\beta = +\infty$ et $\varphi(t)$ tend vers une valeur critique lorsque $t \to \beta$.

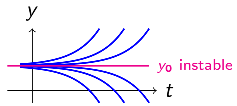
En effet, si $\varphi(t)$ ne tend pas vers b, alors elle converge (puisqu'elle est croissante) vers un élément $b' < b$. Si β n'était pas $+\infty$, le théorème de Cauchy permettrait de prolonger la solution φ sur un intervalle strictement plus grand que $]\alpha, \beta[$ par l'unique solution passant par (β, b'), ce qui contredirait la maximalité de I_0. Donc β doit être $+\infty$. Mais φ étant croissante et convergeant vers b', le théorème des accroissements finis implique que φ' tend vers 0 en $\beta = +\infty$. Ainsi, $f(\varphi(t))$ doit tendre vers 0, ce qui implique (f étant continue) que b' est une valeur critique de f.
Bien sûr, on a des alternatives similaires en α, et aussi lorsque φ est strictement décroissante.

Stabilité

Soit y_0 une valeur critique.

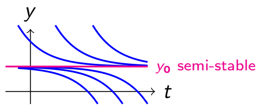
y_0 est dite stable si f est strictement décroissante au voisinage de y_0. Cela implique que, pour ε assez petit, f est strictt positive sur $]y_0 - \varepsilon, y_0[$ et strictt négative sur $]y_0, y_0 + \varepsilon[$, et par conséquent que toute solution φ passant dans la bande $\mathbf{R} \times]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[$ aura y_0 pour limite en $+\infty$.





y_0 est dite instable si f est strictement croissante au voisinage de y_0. Cela implique que pour ε assez petit, f est strictt négative sur $]y_0 - \varepsilon, y_0[$ et strictt positive sur $]y_0, y_0 + \varepsilon[$, et par conséquent que toute solution φ passant dans la bande $\mathbf{R} \times]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[$ aura y_0 pour limite en $+\infty$.

y_0 est dite semistable si f est non nulle et de signe constant sur la réunion $]y_0 - \varepsilon, y_0[\cup]y_0, y_0 + \varepsilon[$ pour ε assez petit.



Plan d'une étude qualitative

Étant donnée une équation différentielle

$$\text{(Aut)} \qquad y'(t) = f(y(t))$$

on en mène l'étude qualitative en suivant les étapes suivantes :

1. recherche des solutions stationnaires,
2. étude du sens de variation des solutions,
3. étude des limites des solutions,
4. étude de la stabilité des valeurs critiques,
5. étude de la convexité des solutions.

Exercices

Mener les études qualitatives pour les équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{ll} y' = y & y' = y^2 \\ y' = 1 + y^2 & y' = 1 - y^2 \\ y' = \sin(y) & y' = \ln(y) \\ y' = \tan(y) & y' = \frac{y(y-1)}{1+y} \\ y' = -\sqrt[3]{y} & y' = \sqrt{1 - y^2} \end{array}$$

(Attention aux hypothèses pour les deux dernières)

Résoudre explicitement une équation différentielle autonome

On considère une équation différentielle autonome

$$y'(t) = f(y(t)) \quad ,$$

où f est définie et continue sur un intervalle J, avec la condition initiale $y(t_0) = y_0$. Si y_0 n'est pas une valeur critique, alors f est non-nulle sur un voisinage ouvert $J_0 =]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[$ de y_0. Occupons-nous seulement de cet intervalle, et disons que f y est strictt positive. On peut écrire

$$y'(t) = f(y(t)) \quad \Leftrightarrow \quad y'(t).\frac{1}{f(y(t))} = 1 \qquad (\ \forall t \ \mid \ y(t) \in J_0\ )$$

Soit G la primitive de $\frac{1}{f}$ sur J_0 qui s'annule en y_0. L'équation ci-dessus se réécrit

$$F(y(t))' = (t)' \qquad (\ \forall t \ \mid \ y(t) \in J_0\ )$$

ou encore

$$\exists c \in \mathbf{R}, \quad F(y(t)) = t - c \qquad (\ \forall t \ \mid \ y(t) \in J_0\ ) \quad .$$

Notre condition initiale fixe la valeur de c : on doit avoir $c = t_0$.

Résoudre explicitement une équation différentielle autonome (2)

Comme $\frac{1}{f}$ est strictt positive sur J_0, sa primitive

$$F \ : \ ]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[\ \to \ ]F(y_0 - \varepsilon), F(y_0 + \varepsilon)[$$

est strictt croissante sur cet intervalle, et bien sûr de classe C^1, donc en particulier continue. Elle admet donc une fonction réciproque

$$\tilde{F} \ : \ ]F(y_0 - \varepsilon), F(y_0 + \varepsilon)[\ \to \ ]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[$$

pour laquelle on peut écrire

$$F(y(t)) = t - t_0 \Leftrightarrow y(t) = \tilde{F}(t - t_0)$$

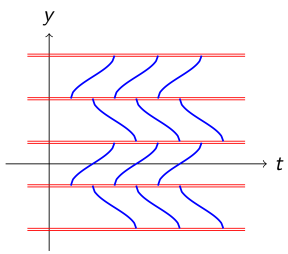
Exemple : le cas de $y' = \frac{1}{\cos(y)}$

D'abord, il faut choisir l'intervalle J. Celui-ci ne doit contenir aucune valeur de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$. Par exemple, on peut choisir, pour un certain k, l'intervalle

$$J =]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$$

Une rapide étude qualitative nous apporte les informations suivantes :

1. L'intervalle J ne contient aucune valeur critique.
2. Si k est pair, toute solution est croissante, sinon, toute solution est décroissante.
3. Si k est pair, les solutions sont concaves dans la bande $]-\frac{\pi}{2}, 0[+k\pi$ et convexes dans la bande $]-\frac{\pi}{2}, 0[+k\pi$. Si k est impair, c'est le contraire. Dans les deux cas, il y a un point d'inflexion en $k\pi$.



Exemple : le cas de $y' = \frac{1}{\cos(y)}$ (2)

Cherchons maintenant une forme explicite pour les solutions : sur J, on a

$$y' = \frac{1}{\cos(y)} \quad \Leftrightarrow \quad y' \cos(y) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(y) = t - c \quad .$$

Si k est pair, alors la fonction réciproque de $F = \sin :]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[\to]-1, 1[$ est la fonction $\tilde{F} :]-1, 1[\to]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ définie par $\tilde{F}(x) = \arcsin(x) + k\pi$.

Sinon, la fonction réciproque de $F = \sin :]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[\to]-1, 1[$ est la fonction $\tilde{F} :]-1, 1[\to]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ définie par $\tilde{F}(x) = k\pi - \arcsin(x)$.

Par conséquent, si k est pair, les solutions sont de la forme

$$y(t) = \arcsin(t - c) + k\pi$$

et si k est impair, les solutions sont de la forme

$$y(t) = k\pi - \arcsin(t - c)$$

Exercices

Trouver la forme explicite des solutions des équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{ll} y' = y & y' = y^2 \\ y' = 1 + y^2 & y' = 1 - y^2 \\ y' = \sin(y) & y' = \exp(y) \\ y' = \tan(y) & y' = \frac{y(y-1)}{1+y} \\ y' = -\sqrt[3]{y} & y' = \sqrt{1 - y^2} \end{array}$$

Que dire dans les cas suivants :

$$y' = \ln(y) \qquad \text{et} \quad y' = e^{y^2} \qquad ?$$

Aujourd'hui ...

La méthode d'Euler pour trouver une solution approchée d'une équation différentielle autonome

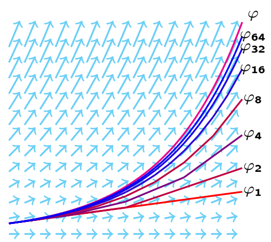
La méthode d'Euler (1)

On reprend notre équadiff

$$\text{(Aut)} \qquad y'(t) = f(y(t))$$

avec la condition initiale $y(t_0) = y_0$. Sous les hypoyhèses habituelles, il existe une unique solution φ sur un intervalle maximal I_0. Nous allons chercher à approximer φ sur l'intervalle $I = [t_0, t_0 + T]$, en supposant bien sûr que celui-ci est contenu dans I_0.

L'idée est la suivante : pour tout t, on connaît la tangente au graphe de $\varphi(t)$. On va discrêtiser le temps en n intervalles de longueur $h_n = \frac{T}{n}$, et sur chacun de ces intervalles, on va suivre la tangente indiquée par (Aut)



La méthode d'Euler (2)

Pour cela, pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on pose $h_n = \frac{T}{n}$, et on considère les points $t_k = t_0 + kh_n$, qui découpent I en n parties $I_0, I_1, \ldots, I_{n-1}$, avec $I_k = [t_k, t_{k+1}]$. On définit alors une suite $(y_k)_{k=0}^n$ en posant

$$y_{k+1} = y_k + h_n f(y_k)$$

Enfin, on définit une fonction φ_n sur I en reliant les valeurs obtenues par des morceaux affines :

$$\varphi_n(t) = y_k + (t - t_k) f(y_k) \quad \text{si} \quad t \in [t_k, t_{k+1}]$$

L'espoir est alors que pour tout point t de I, la suite $\varphi_n(t)$ converge vers $\varphi(t)$.

La méthode d'Euler sur un exemple

Essayons avec une de nos équations différentielles préférées :

$$y' = y$$

dont nous savons que la solution passant par le point $(0,1)$ est $\varphi(t) = e^t$.
La méthode d'Euler sur l'intervalle $[0, T]$ au rang n donne

$$y_k = (1 + \frac{T}{n})^k$$

et en particulier

$$y_n = (1 + \frac{T}{n})^n$$

qui tend bien vers e^T.

Estimation de l'erreur dans la méthode d'Euler (1)

On a une équation du type

$$\text{(Aut)} \quad y'(t) = f(y(t))$$

où f est définie sur un intervalle J.
On suppose que f est K-lipshitzienne sur J :

$$|f(a) - f(b)| \leq K|a - b| \quad .$$

C'est par exemple le cas dès que f est dérivable sur J, et si $|f'(y)| < K$ sur cet intervalle.
On note M le maximum de f sur J.

Erreur dans la méthode d'Euler

Soit φ la solution de (Aut) passant par (t_0, y_0). Soit φ_n la n-ième approximation d'Euler sur l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$. On a l'inégalité

$$|\varphi(t_j) - \varphi_n(t_j)| \leq a^j \frac{MT}{2n} \qquad (\text{avec } t_j = t_0 + j\frac{T}{n} \text{ et } a = e^{\frac{KT}{n}}).$$

En particulier, lorsque $n \to \infty$, cette erreur tend vers 0.

Estimation de l'erreur dans la méthode d'Euler (2)

Commençons avec une estimation de l'erreur sur un pas : on a les inégalités

$$\begin{array}{lccc}
 & |\varphi(t+h) - \varphi(t) - h.f(\varphi(t))| & = & |\int_0^h \varphi'(t+x) - f(\varphi(t))\mathrm{d}x| \\
= & |\int_0^h f(\varphi(t+x)) - f(\varphi(t))\mathrm{d}x| & \leq & \int_0^h |f(\varphi(t+x)) - f(\varphi(t))|\mathrm{d}x \\
\leq & K\int_0^h |\varphi(t+x) - \varphi(t)|\mathrm{d}x & = & K\int_0^h |\int_0^x \varphi'(t+u)\mathrm{d}u|\mathrm{d}x \\
\leq & K\int_0^h \int_0^x |\varphi'(t+u)|\mathrm{d}u\mathrm{d}x & = & K\int_0^h \int_0^x |f(\varphi(t+u))|\mathrm{d}u\mathrm{d}x \\
\leq & K\int_0^h \int_0^x M\mathrm{d}u\mathrm{d}x & \leq & K\int_0^h Mx\mathrm{d}x \\
\leq & K.M.\frac{h^2}{2} & &
\end{array}$$

Estimation de l'erreur dans la méthode d'Euler (3)

Nous avons donc les deux égalités

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi(t_{k+1}) & = & \varphi(t_k) + f(\varphi(t_k)).h_n + \varepsilon_k \\ y_{k+1} & = & y_k + f(y_k).h_n \end{array}\right. \qquad (\text{avec } |\varepsilon_k| \leq KM\frac{h_n^2}{2})$$

qui impliquent

$$\begin{array}{rcl} |\varphi(t_{k+1}) - y_{k+1}| & \leq & |\varphi(t_k) - y_k| + h_n|f(\varphi(t_k)) - f(y_k)| + KM\frac{h_n^2}{2} \\ & \leq & (1 + K.h_n)|\varphi(t_k) - y_k| + KM\frac{h_n^2}{2} \end{array}$$

Si l'on pose $e_k = |\varphi(t_k) - y_k|$, on a donc

$$e_{k+1} \leq e_k.(1 + K.h_n) + KM\frac{h_n^2}{2}$$

d'où l'on déduit (exercice)

$$e_j \leq e^{K.j.h_n}\frac{M}{2}h_n$$

Estimation de l'erreur dans la méthode d'Euler (4)

Reprenons notre exemple

$$(\text{Aut}) \quad y'(t) = y(t)$$

et considérons les approximations d'Euler de la solution $\varphi(t) = e^t$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Ici, on a $K = 1$, $T = 1$ et $M = e$, donc on a

$$|e^{t_j} - \varphi_n(t_j)| = |e^{t_j} - (1 + \frac{1}{n})^j| \leq \frac{e^{1+\frac{j}{n}}}{2n}$$

La méthode d'Euler comme lien équadiffs $\leftrightarrow$ suites récurrentes

Comme on l'a vu, la méthode d'Euler permet d'associer à une équation différentielle $y' = f(y)$ des suites récurrentes de la forme $u_{k+1} = u_k + \frac{T}{n} f(u_k)$ qui donnent des informations (de type quantitatif) sur ses solutions.

Nous allons maintenant retourner la situation et associer à une suite récurrente une équation différentielle qui nous en apprendra peut-être un peu plus sur le comportement de cette suite.

Commençons avec l'exemple de la suite logistique

$$u_0 = 0.3 \quad , \quad u_{n+1} = a u_n (1 - u_n) \quad .$$

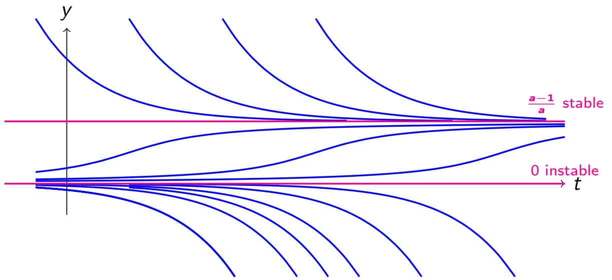
On constate que c'est la suite d'Euler associée à l'équadiff

$$y' = y(a - 1 - ay)$$

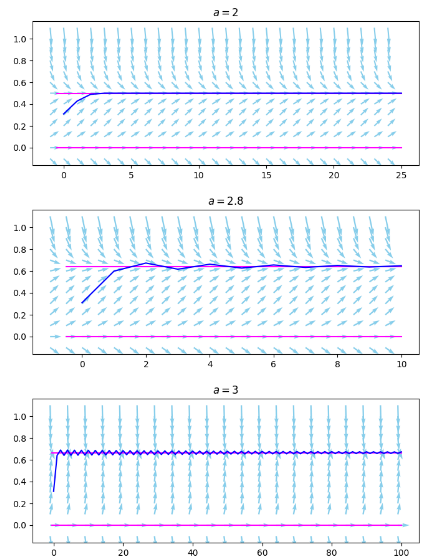
pour $T = n$!

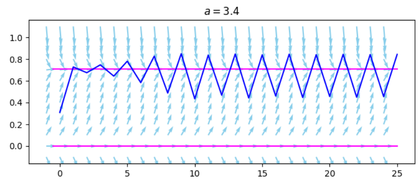
L'exemple logistique (1)

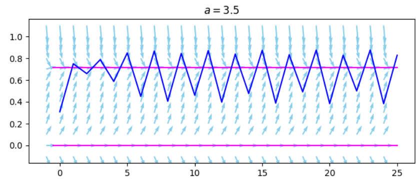
Une rapide étude qualitative montre que pour $a > 0$, les solutions ont l'aspect suivant :

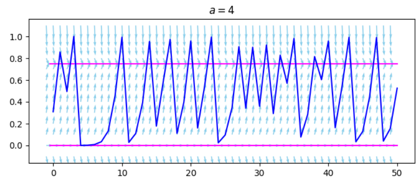


La suite logistique a alors le comprotement suivant :




$a = 3.4$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
5
10
15
20
25


$a = 3.5$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
5
10
15
20
25


$a = 4$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
10
20
30
40
50