Cours de modélisation L1S2P

2017

Evolution des populations et suites récurrentes.

Modélisation la plus simple.

On considère une population, disons de bactéries. On veut modéliser son évolution. On note p_n la population au jour n.

Hypothèse simpliste : le nombre de bactéries qui meurent est propotionnel à p_n, le nombre de bactéries qui naissent est propotionnel à p_n.

Modélisation la plus simple.

On considère une population, disons de bactéries. On veut modéliser son évolution. On note p_n la population au jour n.

Hypothèse simpliste : le nombre de bactéries qui meurent est propotionnel à p_n, le nombre de bactéries qui naissent est propotionnel à p_n.

$$p_{n+1} = \alpha p_n$$

On en déduit

Modélisation la plus simple.

On considère une population, disons de bactéries. On veut modéliser son évolution. On note p_n la population au jour n.

Hypothèse simpliste : le nombre de bactéries qui meurent est propotionnel à p_n, le nombre de bactéries qui naissent est propotionnel à p_n.

$$p_{n+1} = \alpha p_n$$

On en déduit

$$p_n = \alpha p_{n-1} = \alpha^2 p_{n-1} = \cdots = \alpha^n p_O$$

Modélisation la plus simple.

On considère une population, disons de bactéries. On veut modéliser son évolution. On note p_n la population au jour n.

Hypothèse simpliste : le nombre de bactéries qui meurent est propotionnel à p_n, le nombre de bactéries qui naissent est propotionnel à p_n.

$$p_{n+1} = \alpha p_n$$

On en déduit
$$p_n = \alpha p_{n-1} = \alpha^2 p_{n-1} = \cdots = \alpha^n p_O$$

On a donc une croissance exponentielle $\rightsquigarrow$ ce modèle n'est pas réaliste si $\alpha > 1$.

Modélisation à la Fibonacci.

Cette fois, on a des lapins. On part avec $p_0 = 0$ et $p_1 = 1$ (un couple de lapins de 1 mois), et on suppose que chaque couple d'au moins 2 mois donne naissance à un couple chaque mois.

Modélisation à la Fibonacci.

Cette fois, on a des lapins. On part avec $p_0 = 0$ et $p_1 = 1$ (un couple de lapins de 1 mois), et on suppose que chaque couple d'au moins 2 mois donne naissance à un couple chaque mois.

$$p_{n+1} = p_n + p_{n-1}$$

On recherche des solutions de la récurrence de la forme x^n. On doit donc avoir $x^2 - x - 1 = 0$ ce qui donne $x_\pm =$

Modélisation à la Fibonacci.

Cette fois, on a des lapins. On part avec $p_0 = 0$ et $p_1 = 1$ (un couple de lapins de 1 mois), et on suppose que chaque couple d'au moins 2 mois donne naissance à un couple chaque mois.

$$p_{n+1} = p_n + p_{n-1}$$

On recherche des solutions de la récurrence de la forme x^n. On doit donc avoir $x^2 - x - 1 = 0$ ce qui donne $x_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Puis on constate que si l'on peut choisir λ_1 et λ_2 pour que

$$\lambda_1 (x_+)^n + \lambda_2 (x_-)^n = p_n$$

pour $n = 0$ et $n = 1$, donc pour tout n !

Modélisation à la Fibonacci.

Cette fois, on a des lapins. On part avec $p_0 = 0$ et $p_1 = 1$ (un couple de lapins de 1 mois), et on suppose que chaque couple d'au moins 2 mois donne naissance à un couple chaque mois.

$$p_{n+1} = p_n + p_{n-1}$$

On recherche des solutions de la récurrence de la forme x^n. On doit donc avoir $x^2 - x - 1 = 0$ ce qui donne $x_\pm = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Puis on constate que si l'on peut choisir λ_1 et λ_2 pour que

$$\lambda_1(x_+)^n + \lambda_2(x_-)^n = p_n$$

pour $n = 0$ et $n = 1$, donc pour tout n !

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

donc

$$p_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$$

encore une fois, ce n'est pas réaliste.

Théorème

Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des suites réelles (ou complexes) vérifiant

$$u_{n+d} = a_{d-1}u_{n+d-1} + \cdots + a_0 u_n \quad (a_0 \neq 0).$$

On introduit le *polynôme caractéristique* $P(Z) = Z^d - a_{d-1}Z^{d-1} - \cdots - a_0$.

Dans **C**, on peut le factoriser sous la forme

$$P(Z) = (Z - \omega_1)^{\alpha_1} \cdots (Z - \omega_s)^{\alpha_s} \quad \text{avec } \alpha_1 + \cdots + \alpha_s = d \quad .$$

Considérons les d suites de la forme

$$S_n(\omega_i, j) = n^j \omega_i^n \quad \text{avec} \quad 0 \leq j < \alpha_i \quad .$$

Alors tout élément $(u_n)_n \in \mathcal{U}$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$u_n = \lambda_1 S_n(\omega_1, 0) + \cdots + \lambda_d S_n(\omega_s, \alpha_s)$$

Démonstration : dans votre cours d'algèbre linéaire (chapitre "forme de Jordan"). On peut déjà noter que $\mathcal{U}$ est un espace vectoriel de dimension d, et que le théorème dit que les suites $S(\omega_i, j)$ en forment une base.

Supposons maintenant que nos lapins meurent tous au bout de 3 mois :

$$p_{n+1} = p_n + p_{n-1} - p_{n-2}$$

Le polynôme caractéristique est

$$P(Z) = Z^3 - Z^2 - Z + 1 =$$

Modélisation à la Fibonacci avec mort.

Supposons maintenant que nos lapins meurent tous au bout de 3 mois :

$$p_{n+1} = p_n + p_{n-1} - p_{n-2}$$

Le polynôme caractéristique est

$$P(Z) = Z^3 - Z^2 - Z + 1 = (Z-1)^2(Z+1)$$

Donc d'après le théorème, $(p_n)_n$ est de la forme

$$p_n = \lambda_1.1^n + \lambda_2.n.1^n + \lambda_3.(-1)^n$$

On trouve les valeurs suivantes :

$\rightsquigarrow$ $u_n \sim \lambda_2 n$ moins explosif, mais encore pas réaliste.

La suite logistique

Il s'agit de la suite définie par

$$\left\{\begin{array}{ccc} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & ru_n(1-u_n) \end{array}\right.$$

Elle modélise la croissance d'une population avec les deux conditions suivantes :

- s'il n'y a pas grand monde (la population est loin de 1), alors la population augmente proportionnellement, c'est le terme ru_n ;
- s'il y a trop de monde (la population est proche de 1), tout le monde a faim, et la fécondité décroit, c'est le terme $(1-u_n)$.

C'est une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ avec

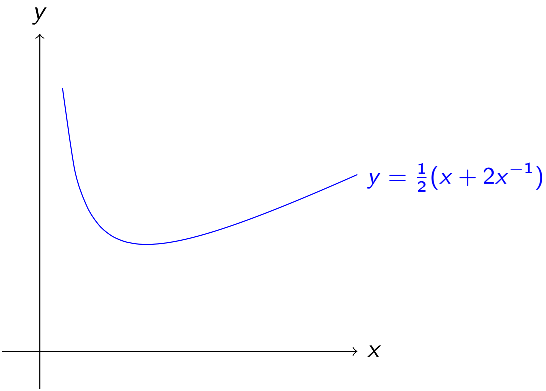
$$f(x) = rx(1-x) \quad .$$

Etudions quelques suites de ce type, avant de regarder notre suite logistique.

Interprétation graphique

Commençons avec un exemple : la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec

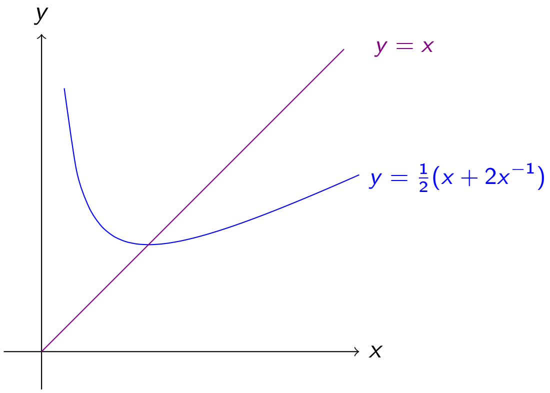
$$f(x) = \quad \frac{1}{2}(x + 2x^{-1}).$$



Interprétation graphique

Commençons avec un exemple : la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec

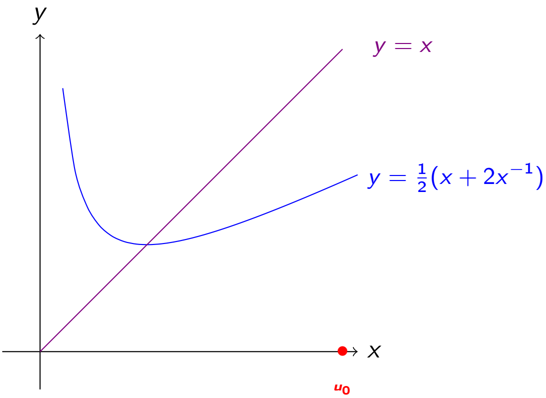
$$f(x) = \frac{1}{2}(x + 2x^{-1}).$$



Interprétation graphique

Commençons avec un exemple : la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec

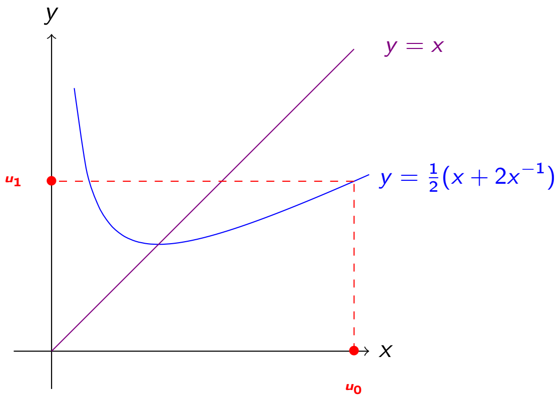
$$f(x) = \quad \frac{1}{2}(x + 2x^{-1}).$$



Interprétation graphique

Commençons avec un exemple : la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec

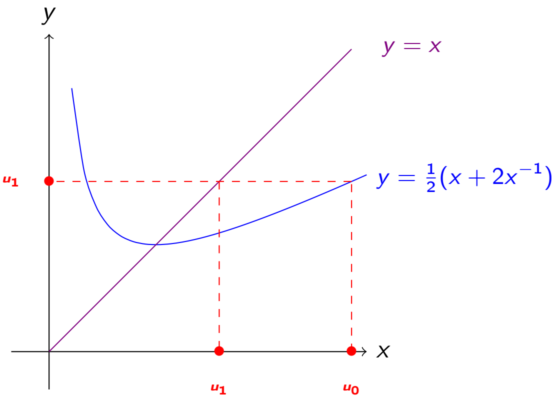
$$f(x) = \quad \frac{1}{2}(x + 2x^{-1}).$$



Interprétation graphique

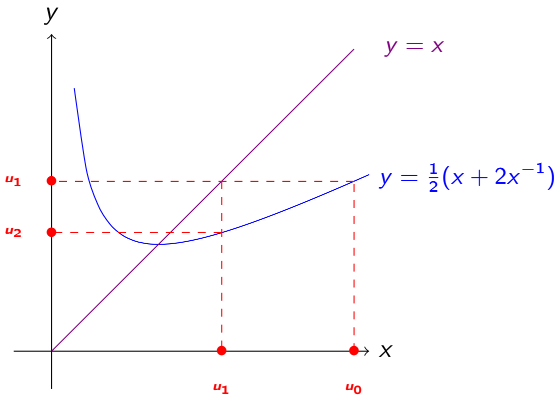
Commençons avec un exemple : la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec

$$f(x) = \quad \frac{1}{2}(x + 2x^{-1}).$$



Commençons avec un exemple : la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec

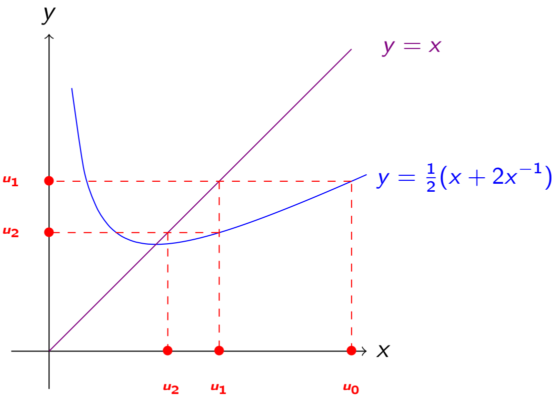
$$f(x) = \quad \frac{1}{2}(x + 2x^{-1}).$$



Interprétation graphique

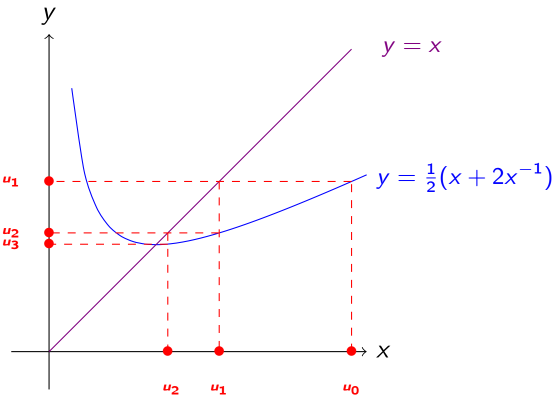
Commençons avec un exemple : la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec

$$f(x) = \frac{1}{2}(x + 2x^{-1}).$$



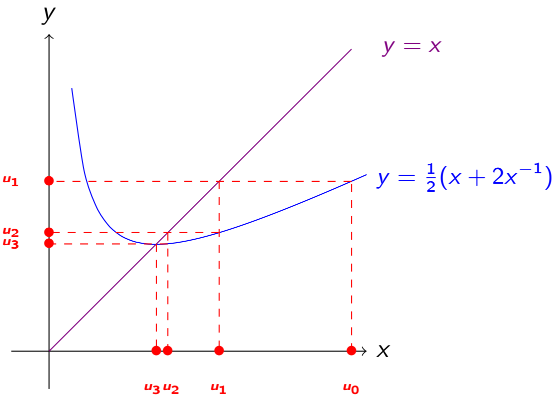
Commençons avec un exemple : la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec

$$f(x) = \quad \frac{1}{2}(x + 2x^{-1}).$$



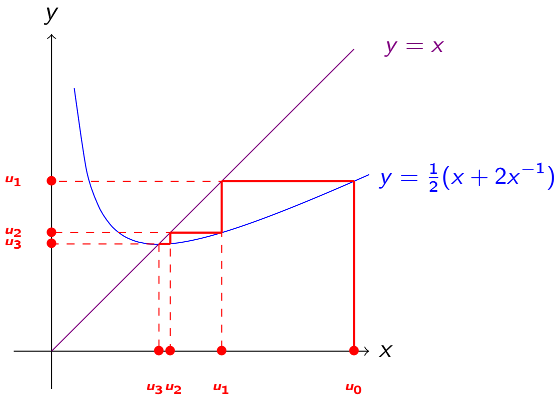
Commençons avec un exemple : la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec

$$f(x) = \quad \frac{1}{2}(x + 2x^{-1}).$$



Commençons avec un exemple : la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec

$$f(x) = \quad \frac{1}{2}(x + 2x^{-1}).$$



$u_{n+1} = f(u_n)$: deuxième exemple

On considère la suite définie comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \cos(x) \end{array} \right.$$

Voici les premières valeurs :

$$\begin{array}{llll}
u_1 = 1.0000 & u_8 = 0.72210 & u_{15} = 0.74015 & u_{22} = 0.73902 \\
u_2 = 0.54031 & u_9 = 0.75042 & u_{16} = 0.73837 & u_{23} = 0.73913 \\
u_3 = 0.85755 & u_{10} = 0.73141 & u_{17} = 0.73957 & u_{24} = 0.73905 \\
u_4 = 0.65429 & u_{11} = 0.74424 & u_{18} = 0.73876 & u_{25} = 0.73911 \\
u_5 = 0.79348 & u_{12} = 0.73560 & u_{19} = 0.73930 & u_{26} = 0.73907 \\
u_6 = 0.70137 & u_{13} = 0.74142 & u_{20} = 0.73894 & u_{27} = 0.73910 \\
u_7 = 0.76396 & u_{14} = 0.73751 & u_{21} = 0.73918 & u_{28} = 0.73908
\end{array}$$

Ca semble converger !

$u_{n+1} = f(u_n)$: deuxième exemple

On considère la suite définie comme suit :

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \cos(x) \end{cases}$$

Voici les premières valeurs :

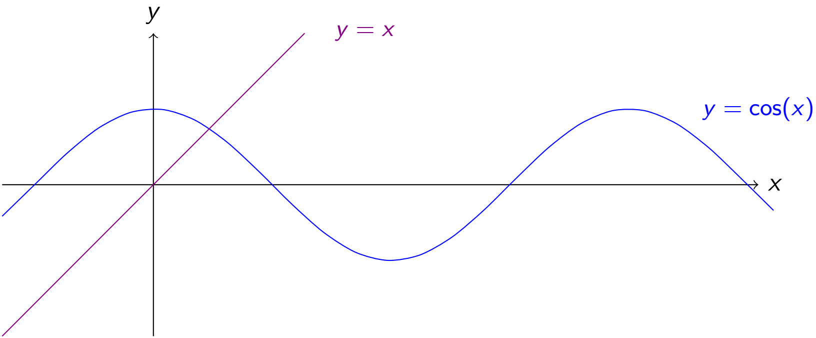
$$\begin{array}{llll}
u_1 = 1.0000 & u_8 = 0.72210 & u_{15} = 0.74015 & u_{22} = 0.73902 \\
u_2 = 0.54031 & u_9 = 0.75042 & u_{16} = 0.73837 & u_{23} = 0.73913 \\
u_3 = 0.85755 & u_{10} = 0.73141 & u_{17} = 0.73957 & u_{24} = 0.73905 \\
u_4 = 0.65429 & u_{11} = 0.74424 & u_{18} = 0.73876 & u_{25} = 0.73911 \\
u_5 = 0.79348 & u_{12} = 0.73560 & u_{19} = 0.73930 & u_{26} = 0.73907 \\
u_6 = 0.70137 & u_{13} = 0.74142 & u_{20} = 0.73894 & u_{27} = 0.73910 \\
u_7 = 0.76396 & u_{14} = 0.73751 & u_{21} = 0.73918 & u_{28} = 0.73908
\end{array}$$

Ca semble converger !

La limite doit être une solution de l'équation

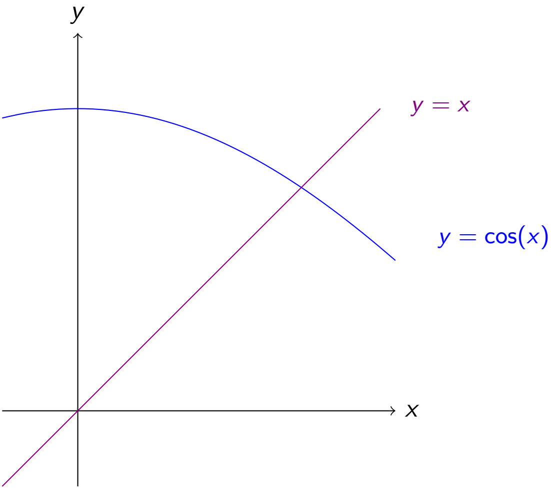
$$\cos(x) = x \quad .$$

Interprétation graphique

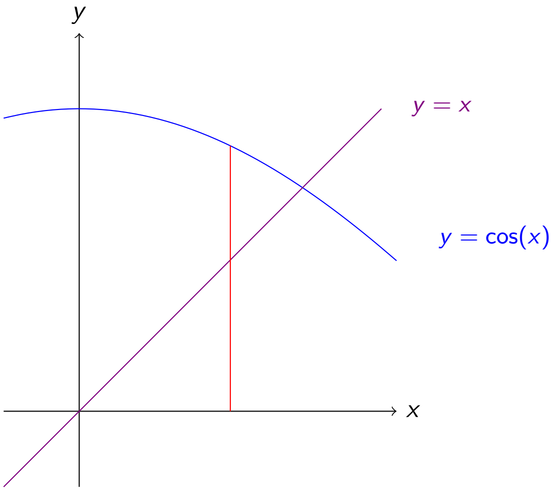


L'équation $x = \cos(x)$ a une unique solution.

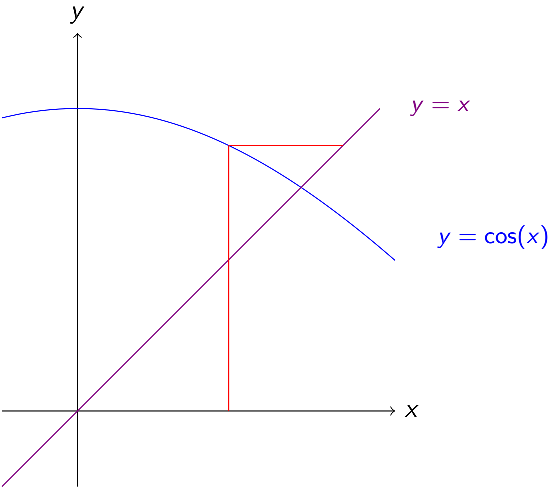
Interprétation graphique



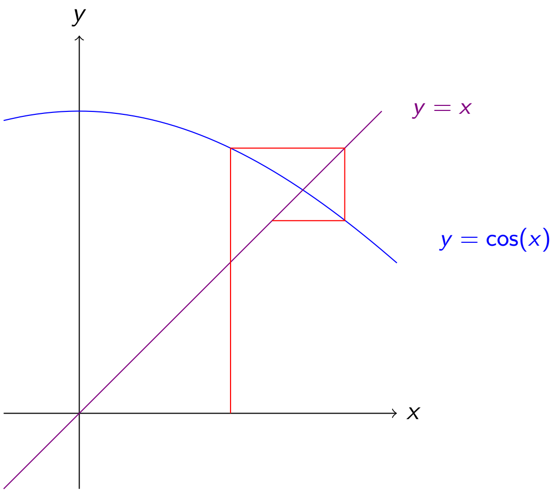
Interprétation graphique



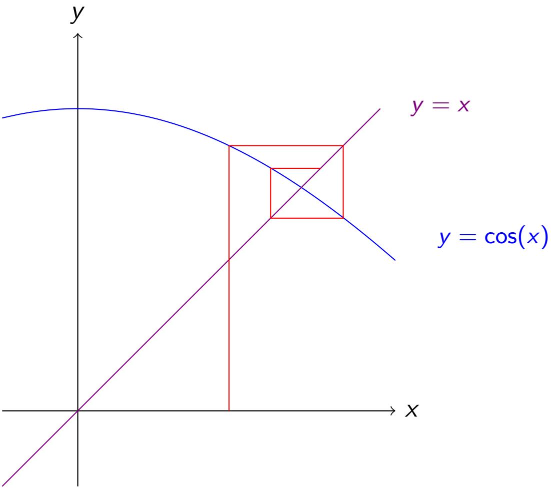
Interprétation graphique



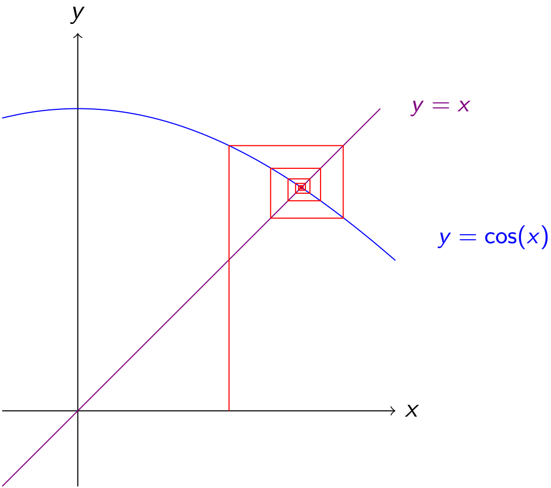
Interprétation graphique



Interprétation graphique

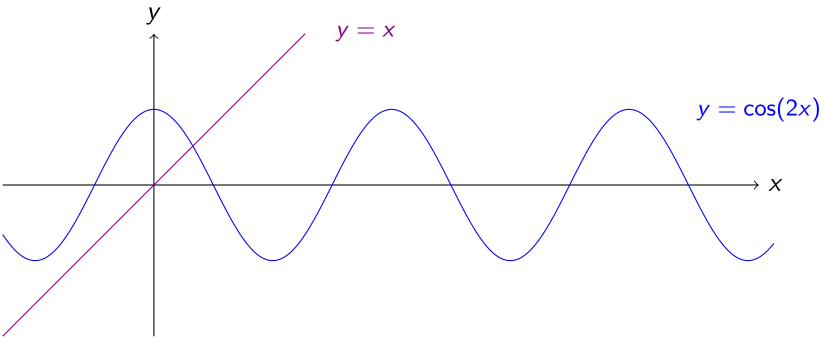


Interprétation graphique



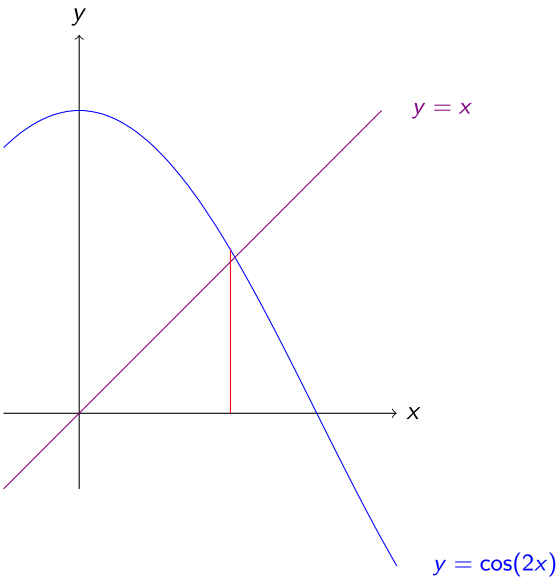
On est donc tentés de voir si on trouve toujours une solution de $x = f(x)$ de cette façon-là ...

On est donc tentés de voir si on trouve toujours une solution de $x = f(x)$ de cette façon-là ...

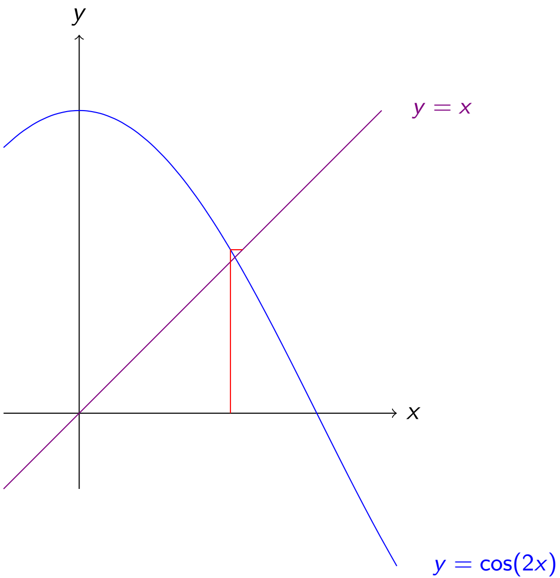


L'équation $x = \cos(2x)$ a une unique solution.

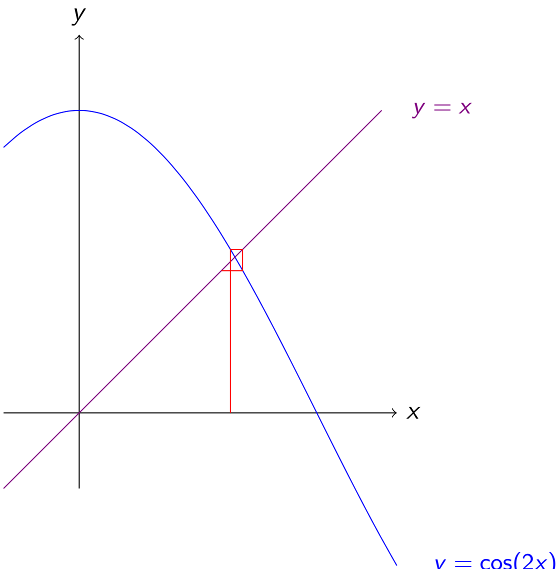
Interprétation graphique



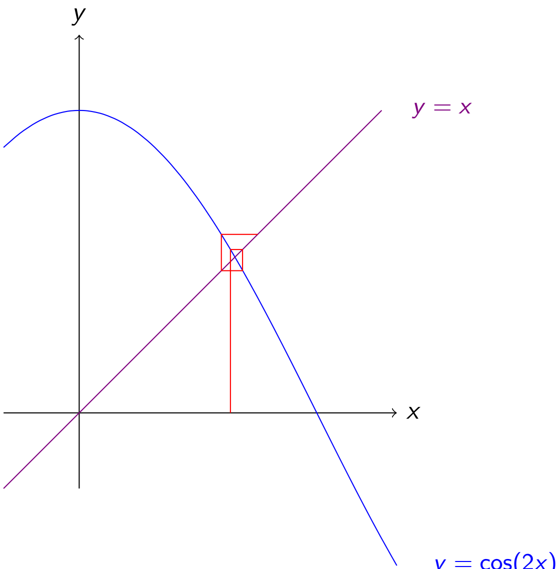
Interprétation graphique



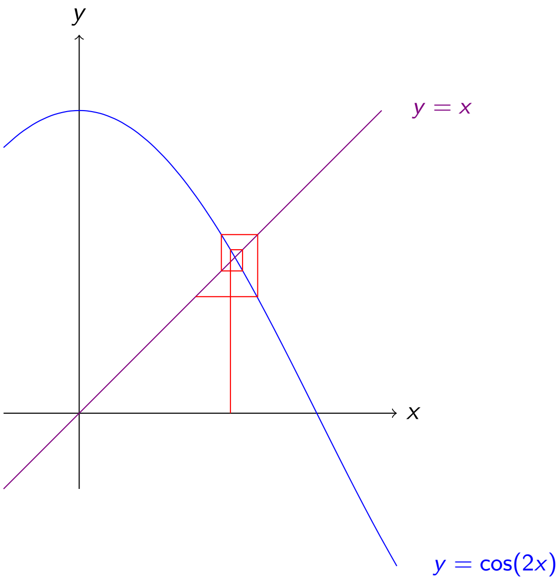
Interprétation graphique



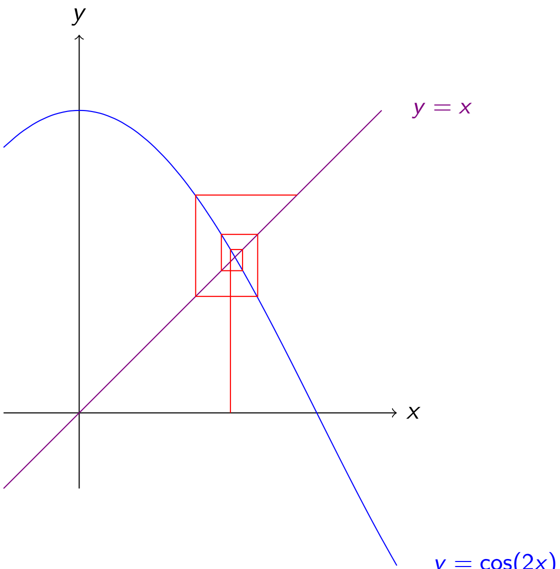
Interprétation graphique



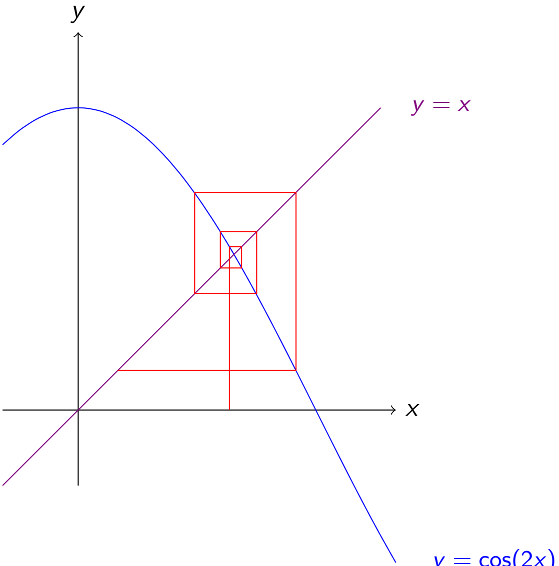
Interprétation graphique



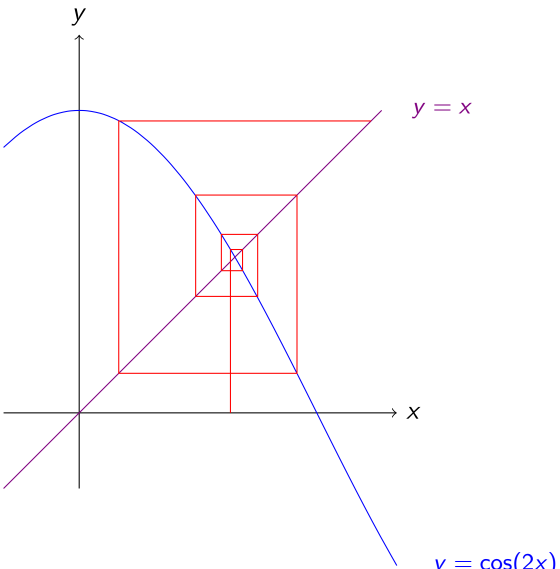
Interprétation graphique



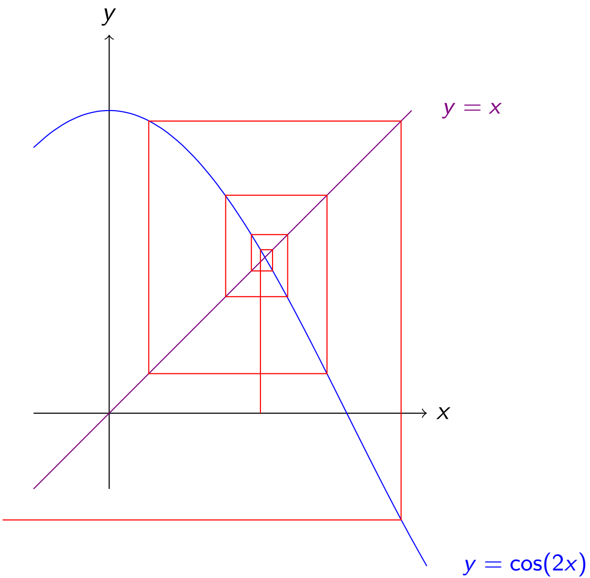
Interprétation graphique



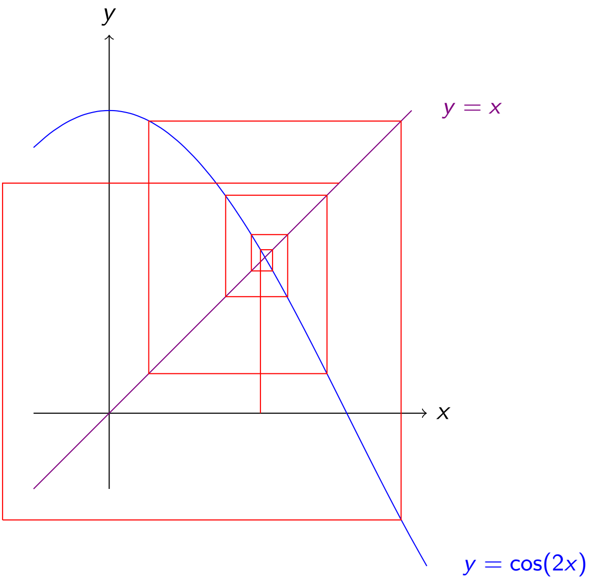
Interprétation graphique



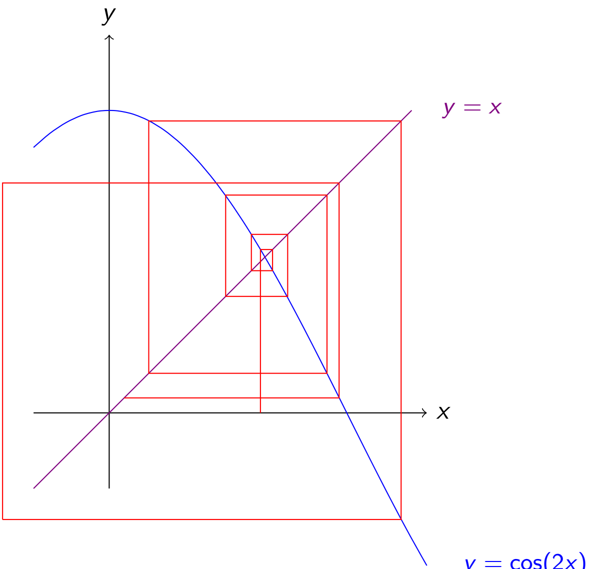
Interprétation graphique



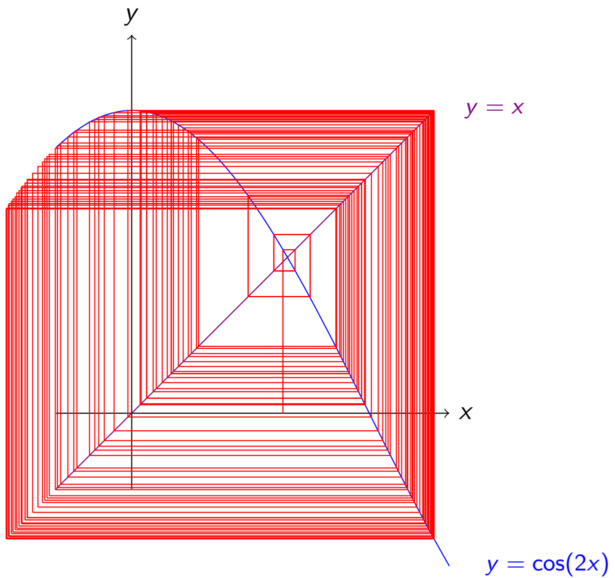
Interprétation graphique



Interprétation graphique



Interprétation graphique



Points fixes attractifs et répulsifs

On dit qu'un x tel que l'on ait

$$x = f(x)$$

est un **point fixe** de f.

On dit qu'il est **attractif** si, lorsqu'on prend u_0 proche de x, la suite u_n définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers x.

Si au contraire la suite u_n a tendance à s'échapper, on dit que x est un point fixe **répulsif**.

Points fixes attractifs et répulsifs

On dit qu'un x tel que l'on ait

$$x = f(x)$$

est un **point fixe** de f.

On dit qu'il est **attractif** si, lorsqu'on prend u_0 proche de x, la suite u_n définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers x.

Si au contraire la suite u_n a tendance à s'échapper, on dit que x est un point fixe **répulsif**.

Critère.

Si x est un point fixe, alors

- x est attractif dès que $|f'(x)| < 1$,
- x est répulsif dès que $|f'(x)| > 1$,
- on ne peut pas dire directement la nature de x si $|f'(x)| = 1$.

Démonstration : dans votre cours d'analyse, comme corollaire du TAF.

Retour à la suite logistique

Y a-t-il un point fixe ?

$$\begin{array}{rcrl} & f(x) & = & x \\ \Leftrightarrow & rx(1-x) & = & x \\ \Leftrightarrow & x(r(1-x)-1) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x=0 \text{ ou } x=\frac{r-1}{r} & = & 0 \end{array}$$

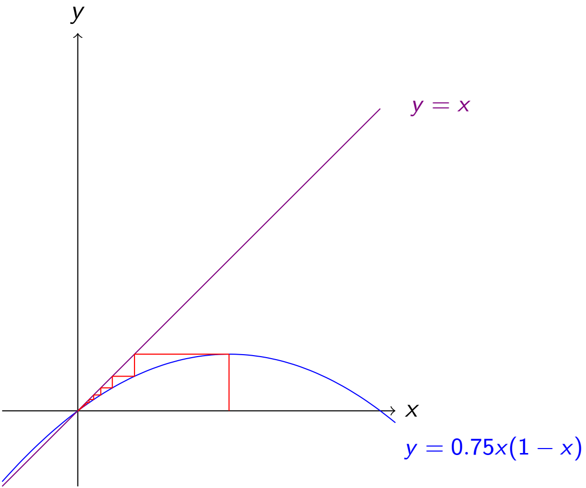
Donc on a deux points fixes. Or on a

$$f'(x) = r - 2rx$$

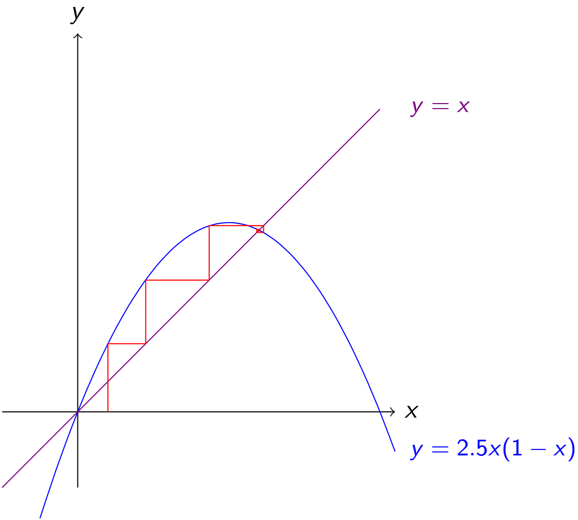
donc

- $f'(0) = r$, donc $x = 0$ est un point fixe attractif pour $r < 1$, et répulsif pour $r > 1$.
- $f'(\frac{r-1}{r}) = r - 2(r-1) = 2 - r$ donc le point fixe $x = \frac{r-1}{r}$ est attractif pour $r \in]1, 3[$ et répulsif si $r \in [0, 1[$ ou si $r \in]3, 4]$.

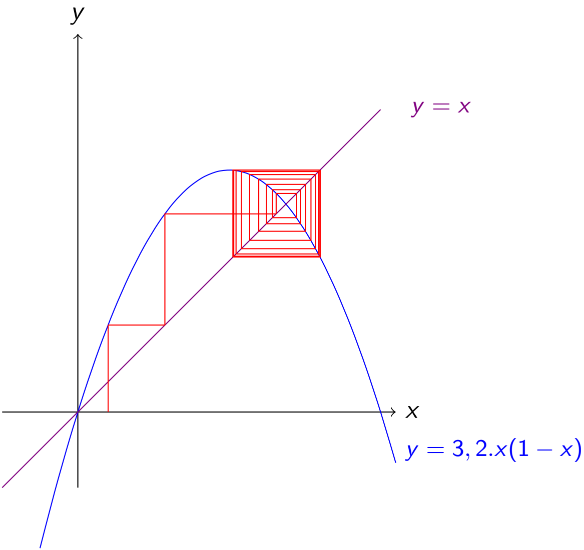
La suite logistique : exemple de $r = 0.75$



La suite logistique : exemple de $r = 2.5$



La suite logistique : exemple de $r = 3.2$



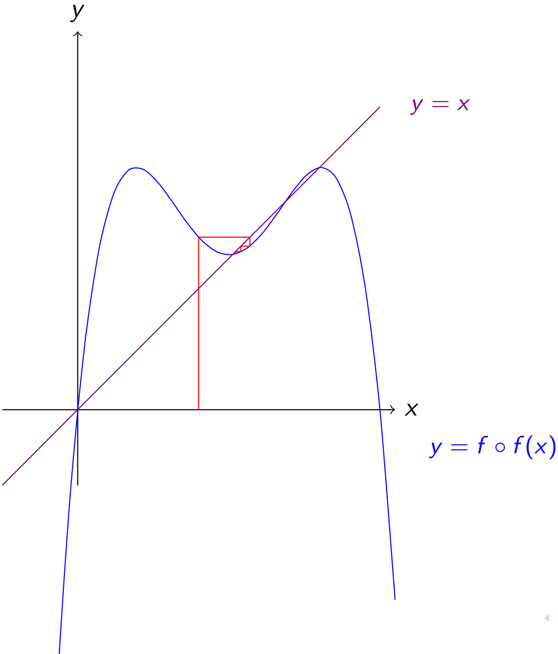
La suite logistique : exemple de $r = 3.2$ suite.

Observons les premières valeurs :

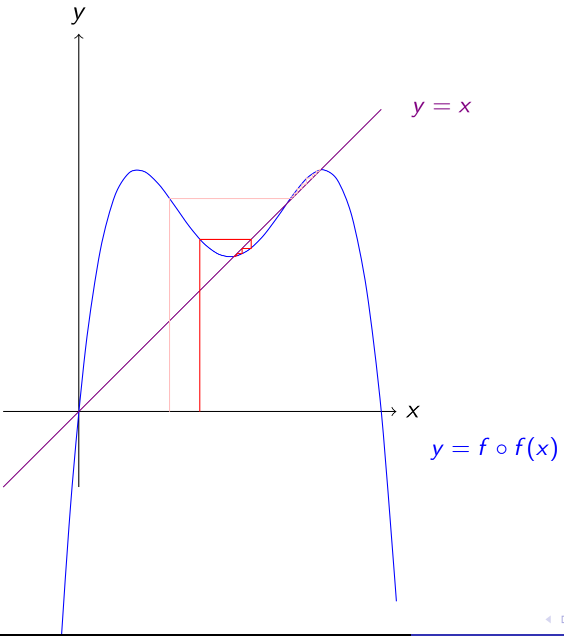
$$\begin{array}{llll}
u_1 = 0.28800 & u_8 = 0.59754 & u_{15} = 0.79853 & u_{22} = 0.51305 \\
u_2 = 0.65618 & u_9 = 0.76955 & u_{16} = 0.51481 & u_{23} = 0.79945 \\
u_3 = 0.72195 & u_{10} = 0.56749 & u_{17} = 0.79930 & u_{24} = 0.51305 \\
u_4 = 0.64236 & u_{11} = 0.78542 & u_{18} = 0.51334 & u_{25} = 0.79945 \\
u_5 = 0.73514 & u_{12} = 0.53931 & u_{19} = 0.79943 & u_{26} = 0.51305 \\
u_6 = 0.62307 & u_{13} = 0.79506 & u_{20} = 0.51309 & u_{27} = 0.79945 \\
u_7 = 0.75153 & u_{14} = 0.52142 & u_{21} = 0.79945 & u_{28} = 0.51305
\end{array}$$

On dit que les points $x_1 \sim 0.79$ et $x_2 \sim 0.51$ sont des points **périodiques**.

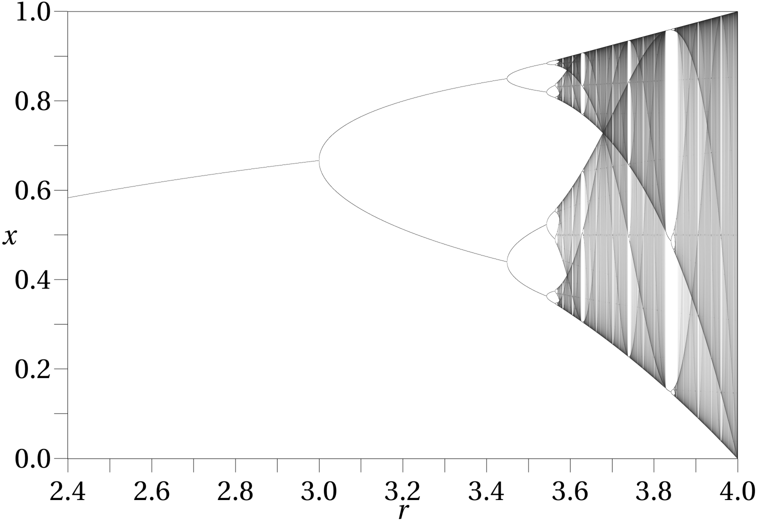
Autre interprétation graphique :



Autre interprétation graphique :

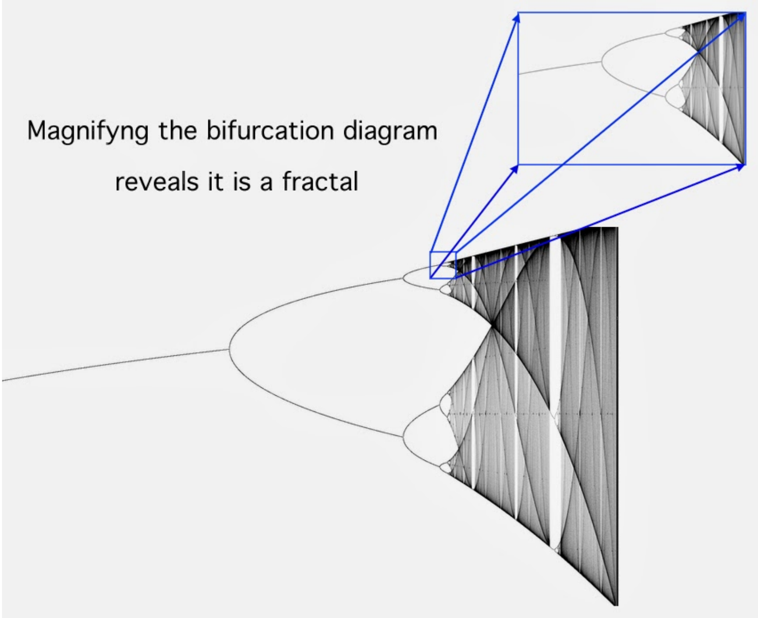


Si l'on continue, voici ce que l'on observe :



et, magie ! ! !

et, magie ! ! !



Et le chaos dans tout ça ?

On dit qu'un *système dynamique* est **chaotique** si son comportement à moyen terme est complètement différent pour deux valeurs initiales prises au hasard, mais très proches l'une de l'autre. Revenons sur notre exemple de suite logistique. Avec $r = 4$ on obtient :

$u_0 = 0.2$	$u_0 = 0.2001$
$u_1 = 0.6400000000$	$u_1 = 0.6402399600$
$u_2 = 0.9216000001$	$u_2 = 0.9213310145$
$u_3 = 0.2890137598$	$u_3 = 0.2899207049$
$u_4 = 0.8219392257$	$u_4 = 0.8234667592$
$u_5 = 0.5854205398$	$u_5 = 0.5814770228$
$u_6 = 0.9708133255$	$u_6 = 0.9734459790$
$u_7 = 0.1133392499$	$u_7 = 0.1033956199$
$u_8 = 0.4019738575$	$u_8 = 0.3708198626$
$u_9 = 0.9615635016$	$u_9 = 0.9332499684$
$u_{10} = 0.1478365361$	$u_{10} = 0.2491778595$
$u_{11} = 0.5039235788$	$u_{11} = 0.7483530155$
$u_{12} = 0.9999384221$	$u_{12} = 0.7532831188$
$u_{13} = 0.0002462963706$	$u_{13} = 0.7433906469$
$u_{14} = 0.0009849428347$	$u_{14} = 0.7630439720$
$u_{15} = 0.003935890889$	$u_{15} = 0.7232314751$

Exo.1 : On suppose que $(p_n)_n$ est une suite vérifiant la relation

$$p_{n+3} = 3p_{n+2} - 3p_{n+1} + 2p_n$$

À quelle condition sur p_0, p_1 et p_2 cette suite reste-t-elle bornée ?

Exo. 2 : On change un peu le modèle de Fibonacci. On suppose cette fois que l'on a

$$p_{n+3} = p_{n+1} + p_n \quad .$$

Montrer que le polynôme $Z^3 - Z - 1$ a exactement une racine réelle ρ, et montrer les inégalités $1.3 < \rho < 1.4$. En déduire que les deux autres racines (complexes) sont de module < 1 et donc que pour une certaine constance c, on a $p_n \sim c.\rho^n$.

Cette racine est un nombre connu sous le nom de *nombre plastique*. La méthode de Cardan donne $\rho = \frac{\sqrt[3]{108+12\sqrt{69}} + \sqrt[3]{108-12\sqrt{69}}}{6}$. On voit aussi que l'on a $\rho = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\cdots}}}}$

Exo. 3 : Une homographie est une fonction réelle du type $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, avec $ad - bc \neq 0$.

- si a, b, c et d sont strictement positifs, montrer que cette suite est bien définie.
- quel est alors (en fonction de a, b, c et d) son comportement quand $n \to \infty$?
- En général, quelles sont les valeurs de u_0 pour lesquelles la suite est bien définie ?

Exo. 4 : Le modèle logistique ne prend pas en compte un facteur souvent important : si une population est trop peu nombreuse, au dessous d'un seuil α, elle périclite (pas facile de trouver un partenaire !) On met donc en place un modèle "bilogistique" :

$$u_{n+1} = ru_n.(1 - u_n)(u_n - \alpha)$$

Étudiez en fonction de r et de α l'évolution de u_n. Il vous est conseillé de commencer votre exploration à l'aide d'une calculatrice.

Aujourd'hui...

Introduction aux équations différentielles.

Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

Pour nous, et pour l'instant, une équation différentielle sera une équation du type

$$y'(t) = F(y(t), t)$$

où y est une fonction inconnue de la variable t, et sa dérivée.

Exemples :

$$\begin{array}{ll} (E_1) & y'(t) = t^2 + 1 \\ (E_2) & y'(t) = y \\ (E_3) & y'(t) = 2y - e^t \\ (E_4) & y'(t) = y^2 + 1 \end{array}$$

Une solution d'une telle équation différentielle est une fonction $t \mapsto y(t)$ **définie sur un intervalle** qui vérifie ladite équation. Par exemple, pour toute constante C, les fonctions suivantes (S_i) sont solutions de (E_i)

$$\begin{array}{ll} (S_1) & y(t) = \frac{t^3}{3} + t + C \\ (S_2) & y(t) = Ce^t \\ (S_3) & y(t) = e^t + Ce^{2t} \\ (S_4) & y(t) = \tan(t - C) \end{array}$$

D'où ça sort ?

- **En physique :**

Si un corps K de masse m est laché avec une vitesse nulle au moment t_0 d'une certaine hauteur h_0, ils subit deux forces : l'attraction gravitationnelle, d'intensité mg, et dirigée vers le bas, et une force de frottement $kv(t)^2$ proportionnelle au carré de sa vitesse, le coefficient k dépendant de la situation. Par exemple, si le corps est en dehors de l'atmosphère, on a $k = 0$. S'il c'est une bille de plomb lachée d'un avion, k est petit, et si c'est un parachutiste, k est grand.
Quelle que soit la situation, le principe fondamental de la Physique nous dit que la somme $mg - kv(t)^2$ est égale à $mv'(t)$. On a donc l'équation différentielle suivante :

$$v'(t) = g - \frac{k}{m} v(t)^2$$

soumise à la condition $v(t_0) = 0$.
Trouver une solution de cette équation différentielle permet de connaître la vitesse de K au temps $t > t_0$.

D'où ça sort ?

- **En chimie :**

Le carbone C_{12} a un isotope instable C_{14}. Celui-ci est produit dans la couche d'ozone et se trouve en quantité constante dans l'air, où il se dégrade lentement. Tout au long de notre vie, nous respirons cet air, et le C_{14} se fixe à nos os, et se dégrade en même temps, de sorte que la quantité de C_{14} par gramme de nos os est constante. Lorsque nous serons morts et enterrés, nous ne respirerons plus l'air, et le C_{14} ne se fixera plus, il ne fera que se dégrader, de sorte que la quantité de C_{14} par gramme d'os va baisser. Précisément, la loi est la suivante : il existe une période de temps T, appelée demi-vie du C_{14}, telle que la quantité de C_{14} par gramme est divisée par 2 en un temps T. Une autre façon de le dire est la suivante :

$$q'(t) = -\frac{\ln(2)}{T} q(T)$$

Lorsque dans plusieurs milliers d'années nos descendants exhumerons nos squelettes, il leur suffira de résoudre cette équation différentielle pour savoir depuis combien de temps nous gisons là.

D'où ça sort ?

- **En biologie :**

On étudie encore l'évolution d'une population p, mais cette fois avec un temps continu, et non plus discrêt. La suite logistique devient une équation logistique

$$p'(t) = ap(t)(1 - p(t))$$

Résoudre cette équation différentielle permet de comprendre l'évolution de $p(t)$ en fonction du temps.

Bref, comme nous le voyons bien, il y a des équations différentielles partout.

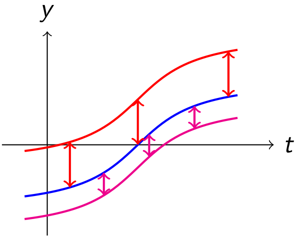
La plupart du temps cependant, nous ne savons pas les résoudre et il faut se contenter d'une étude qualitative, qui nous apporte quand même des informations nombreuses et précieuses sur les phénomènes étudiés. Notre plan est le suivant :

1. Apprendre à mener une étude qualitative.
2. Apprendre à trouver des solutions explicites quand c'est possible.
3. Apprendre à trouver des solutions approchées quand c'est nécessaire.

Les équations différentielles du type

$$\text{(Int)} \qquad y' = f(t)$$

nous sont familières. Elles sont l'un des sujets du cours d'intégration.



Elles sont particulière en ce sens que deux solutions sont "verticalement parallèles".

Autrement dit, elles diffèrent d'une constante. Plus précisément, si φ est solution, alors les solutions de l'équation sont exactement les fonctions de la forme $\varphi + C$ pour une certaine constante C réelle.

Réciproquement, si une équation différentielle a cette propriété, alors elle est équivalente à une équation différentielle du type (Int) : il nous suffit de prendre une solution φ et de dire que toute autre solution est aussi solution de $y'(t) = \varphi'(t)$.

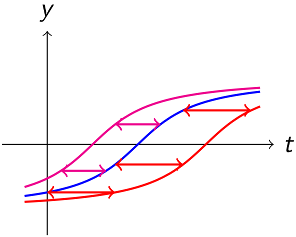
Équations différentielles autonomes (2)

À l'opposé, considérons une équation différentielle du type

$$(\mathrm{Aut}) \qquad y'(t) = f(y(t)) \quad .$$

Alors cette fois, si φ est solution, il en va de même de $\psi : t \mapsto \varphi(t-c)$
En effet, on a alors

$$\psi'(t) = (\varphi(t-c))' = (t-c)'\varphi'(t-c) = \varphi'(t-c) = f(\varphi(t-c)) = f(\psi(t))$$



Une telle équation différentielle (E) est dite autonome : les sciences en fournissent des tombereaux car elles contiennent en elles le principe suivant lequel les mêmes causes produiront les mêmes effets, indépendamment de la date de l'évènement ...

Le théorème de Cauchy pour les équadiffs autonomes

Comme nous le savons depuis le cours d'intégration, pour toute donnée initiale (t_0, y_0), une équation différentielle du type

$$(\mathrm{Int}) \qquad y'(t) = f(t)$$

admet une unique solution y telle que $y(t_0) = y_0$: c'est $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(t)dt$, à condition, bien sûr, que f soit continue pour que la fonction y ainsi obtenue soit dérivable.

Le thm de Cauchy donne un résultat semblable pour les équations autonomes :

Théorème de Cauchy

Soit J un intervalle ouvert sur lequel f est continue. Alors pour toute condition initiale (t_0, y_0) avec y_0 dans J, et pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe une solution $\varphi :]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\to \mathbf{R}$ de l'équadiff

$$(\mathrm{Aut}) \qquad y'(t) = f(y(t))$$

telle que $\varphi(t_0)$ égale y_0.

Si de plus f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de y_0, alors cette solution est essentiellement unique : si une autre solution ψ vérifie $\psi(t_0) = y_0$, alors φ et ψ coïncident sur l'intersection de leurs intervalles de définition.

Intervalle maximal d'une solution

Dans la suite, nous supposerons toujours que f est de classe C^1 sur un intervalle ouvert J.
D'après le théorème de Cauchy, étant donnée une condition initiale (t_0, y_0), il existe un plus grand intervalle I_0 sur lequel est définie l'unique solution y passant par (t_0, y_0).

On dit que y est **la** solution passant par (t_0, y_0), et on appelle I_0 l'intervalle maximal de cette solution.

Nous étudierons bientôt le comportement de y aux bornes de cet intervalle.

Solutions stationnaires et sens de variation

Une solution stationnaire de

$$(\mathrm{Aut}) \qquad y'(t) = f(y(t))$$

est une solution constante, c'est-à-dire une solution vérifiant l'une des CES :

$$\begin{array}{rl} & y(t) = y_0 \\ \Leftrightarrow & y'(t) = 0 \\ \Leftrightarrow & f(y_0) = 0 \end{array}$$

On dit alors que y_0 est une valeur critique.

De même, si $f(y_0)$ est strictement positive, alors la solution passant par (t_0, y_0) est strictement croissante au voisinage de y_0, et si f est strictement négative, alors la solution passant par (t_0, y_0) est strictement décroissante au voisinage de y_0.

Par conséquent, une étude du signe de f sur J nous donne des informations précieuses sur les solutions de (Aut).

Monotonie des solutions.

Les remarques précédentes, jointes au théorème de Cauchy, montrent que, lorsque f est de classe C^1, on a le résultat remarquable suivant :

Monotonie des solutions

Soit J un intervalle sur lequel f est de classe C^1. Alors une solution φ de l'équadiff

$$\text{(Aut)} \qquad y'(t) = f(y(t))$$

est stationnaire ou strictement monotone sur son intervalle maximal.

Convexité

De même, on calcule $y'' = (f(y))' = y'f'(y) = f(y)f'(y)$. Ainsi, une étude du signe de f' sur J nous permet de savoir où les solutions sont convexes, concaves, ou admettent un point d'inflexion.

Limites

La fonction f est toujours définie et C^1 sur un intervalle qu'on suppose ici de la forme $]a, b[$ (où a et b peuvent être infinis)
Supposons que

$$(\text{Aut}) \qquad y'(t) = f(y(t))$$

admet une solution φ définie sur un intervalle maximal $I_0 =]\alpha, \beta[$.
Si φ est stationnaire, alors on a $\alpha = -\infty$ et $\beta = +\infty$.
Si φ est strictement croissante, alors on a les possibilités suivantes :

- $\varphi(t)$ tend vers b lorsque $t \to \beta$,
- $\beta = +\infty$ et $\varphi(t)$ tend vers une valeur critique lorsque $t \to \beta$.

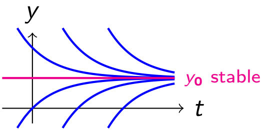
En effet, si $\varphi(t)$ ne tend pas vers b, alors elle converge (puisqu'elle est croissante) vers un élément $b' < b$. Si β n'était pas $+\infty$, le théorème de Cauchy permettrait de prolonger la solution φ sur un intervalle strictement plus grand que $]\alpha, \beta[$ par l'unique solution passant par (β, b'), ce qui contredirait la maximalité de $\boldsymbol{I_0}$. Donc β doit être $+\infty$. Mais φ étant croissante et convergeant vers b', le théorème des accroissements finis implique que φ' tend vers 0 en $\beta = +\infty$. Ainsi, $f(\varphi(t))$ doit tendre vers 0, ce qui implique (f étant continue) que b' est une valeur critique de f.

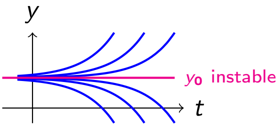
Bien sûr, on a des alternatives similaires en α, et aussi lorsque φ est strictement décroissante.

Stabilité

Soit y_0 une valeur critique.

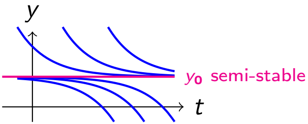
y_0 est dite stable si f est strictement décroissante au voisinage de y_0. Cela implique que, pour ε assez petit, f est strictt positive sur $]y_0 - \varepsilon, y_0[$ et strictt négative sur $]y_0, y_0 + \varepsilon[$, et par conséquent que toute solution φ passant dans la bande $\mathbf{R}\times]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[$ aura y_0 pour limite en $+\infty$.





y_0 est dite instable si f est strictement croissante au voisinage de y_0. Cela implique que pour ε assez petit, f est strictt négative sur $]y_0 - \varepsilon, y_0[$ et strictt positive sur $]y_0, y_0 + \varepsilon[$, et par conséquent que toute solution φ passant dans la bande $\mathbf{R}\times]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[$ aura y_0 pour limite en $+\infty$.

y_0 est dite semistable si f est non nulle et de signe constant sur la réunion $]y_0 - \varepsilon, y_0[\cup]y_0, y_0 + \varepsilon[$ pour ε assez petit.



Plan d'une étude qualitative

Étant donnée une équation différentielle

$$(\mathrm{Aut}) \qquad y'(t) = f(y(t))$$

on en mène l'étude qualitative en suivant les étapes suivantes :

1. recherche des solutions stationnaires,
2. étude du sens de variation des solutions,
3. étude des limites des solutions,
4. étude de la stabilité des valeurs critiques,
5. étude de la convexité des solutions.

Exercices

Mener les études qualitatives pour les équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{ll} y' = y & y' = y^2 \\ y' = 1 + y^2 & y' = 1 - y^2 \\ y' = \sin(y) & y' = \ln(y) \\ y' = \tan(y) & y' = \frac{y(y-1)}{1+y} \\ y' = -\sqrt[3]{y} & y' = \sqrt{1 - y^2} \end{array}$$

(Attention aux hypothèses pour les deux dernières)

Résoudre explicitement une équation différentielle autonome

On considère une équation différentielle autonome

$$y'(t) = f(y(t)) \quad ,$$

où f est définie et continue sur un intervalle J, avec la condition initiale $y(t_0) = y_0$. Si y_0 n'est pas une valeur critique, alors f est non-nulle sur un voisinage ouvert $J_0 =]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[$ de y_0. Occupons-nous seulement de cet intervalle, et disons que f y est strictt positive. On peut écrire

$$y'(t) = f(y(t)) \quad \Leftrightarrow \quad y'(t).\frac{1}{f(y(t))} = 1 \qquad (\ \forall t \ \mid \ y(t) \in J_0\ )$$

Soit G la primitive de $\frac{1}{f}$ sur J_0 qui s'annule en y_0. L'équation ci-dessus se réécrit

$$F(y(t))' = (t)' \qquad (\ \forall t \ \mid \ y(t) \in J_0\ )$$

ou encore

$$\exists c \in \mathbf{R}, \quad F(y(t)) = t - c \qquad (\ \forall t \ \mid \ y(t) \in J_0\ ) \quad .$$

Notre condition initiale fixe la valeur de c : on doit avoir $c = t_0$.

Résoudre explicitement une équation différentielle autonome (2)

Comme $\frac{1}{f}$ est strictt positive sur J_0, sa primitive

$$F \ : \ ]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[\ \rightarrow \ ]F(y_0 - \varepsilon), F(y_0 + \varepsilon)[$$

est strictt croissante sur cet intervalle, et bien sûr de classe C^1, donc en particulier continue. Elle admet donc une fonction réciproque

$$\tilde{F} \ : \ ]F(y_0 - \varepsilon), F(y_0 + \varepsilon)[\ \rightarrow \ ]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[$$

pour laquelle on peut écrire

$$F(y(t)) = t - t_0 \Leftrightarrow y(t) = \tilde{F}(t - t_0)$$

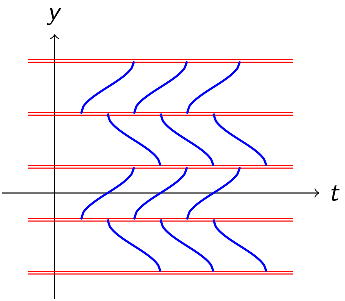
Exemple : le cas de $y' = \frac{1}{\cos(y)}$

D'abord, il faut choisir l'intervalle J. Celui-ci ne doit contenir aucune valeur de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$. Par exemple, on peut choisir, pour un certain k, l'intervalle

$$J =]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$$

Une rapide étude qualitative nous apporte les informations suivantes :

1. L'intervalle J ne contient aucune valeur critique.
2. Si k est pair, toute solution est croissante, sinon, toute solution est décroissante.
3. Si k est pair, les solutions sont concaves dans la bande $]-\frac{\pi}{2}, 0[+k\pi$ et convexes dans la bande $]-\frac{\pi}{2}, 0[+k\pi$. Si k est impair, c'est le contraire. Dans les deux cas, il y a un point d'inflexion en $k\pi$.



Exemple : le cas de $y' = \frac{1}{\cos(y)}$ (2)

Cherchons maintenant une forme explicite pour les solutions : sur J, on a

$$y' = \frac{1}{\cos(y)} \quad \Leftrightarrow \quad y' \cos(y) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(y) = t - c \quad .$$

Si k est pair, alors la fonction réciproque de $F = \sin :]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[\to]-1, 1[$ est la fonction $\tilde{F} :]-1, 1[\to]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ définie par $\tilde{F}(x) = \arcsin(x) + k\pi$.

Sinon, la fonction réciproque de $F = \sin :]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[\to]-1, 1[$ est la fonction $\tilde{F} :]-1, 1[\to]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ définie par $\tilde{F}(x) = k\pi - \arcsin(x)$.

Par conséquent, si k est pair, les solutions sont de la forme

$$y(t) = \arcsin(t - c) + k\pi$$

et si k est impair, les solutions sont de la forme

$$y(t) = k\pi - \arcsin(t - c)$$

Exercices

Trouver la forme explicite des solutions des équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{ll} y' = y & y' = y^2 \\ y' = 1 + y^2 & y' = 1 - y^2 \\ y' = \sin(y) & y' = \exp(y) \\ y' = \tan(y) & y' = \frac{y(y-1)}{1+y} \\ y' = -\sqrt[3]{y} & y' = \sqrt{1 - y^2} \end{array}$$

Que dire dans les cas suivants :

$$y' = \ln(y) \qquad \text{et} \quad y' = e^{y^2} \qquad ?$$

La méthode d'Euler pour trouver une solution approchée d'une équation différentielle autonome

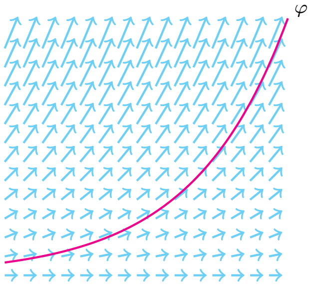
La méthode d'Euler (1)

On reprend notre équadiff

$$\text{(Aut)} \qquad y'(t) = f(y(t))$$

avec la condition initiale $y(t_0) = y_0$. Sous les hypoyhèses habituelles, il existe une unique solution φ sur un intervalle maximal I_0. Nous allons chercher à approximer φ sur l'intervalle $I = [t_0, t_0 + T]$, en supposant bien sûr que celui-ci est contenu dans I_0.

L'idée est la suivante : pour tout t, on connaît la tangente au graphe de $\varphi(t)$. On va discrétiser le temps en n intervalles de longueur $h_n = \frac{T}{n}$, et sur chacun de ces intervalles, on va suivre la tangente indiquée par (Aut)



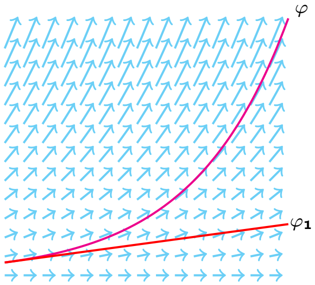
La méthode d'Euler (1)

On reprend notre équadiff

$$\text{(Aut)} \qquad y'(t) = f(y(t))$$

avec la condition initiale $y(t_0) = y_0$. Sous les hypoyhèses habituelles, il existe une unique solution φ sur un intervalle maximal I_0. Nous allons chercher à approximer φ sur l'intervalle $I = [t_0, t_0 + T]$, en supposant bien sûr que celui-ci est contenu dans I_0.

L'idée est la suivante : pour tout t, on connaît la tangente au graphe de $\varphi(t)$. On va discrétiser le temps en n intervalles de longueur $h_n = \frac{T}{n}$, et sur chacun de ces intervalles, on va suivre la tangente indiquée par (Aut)



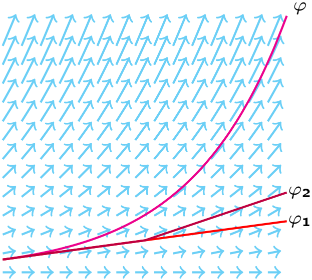
La méthode d'Euler (1)

On reprend notre équadiff

$$\text{(Aut)} \qquad y'(t) = f(y(t))$$

avec la condition initiale $y(t_0) = y_0$. Sous les hypoyhèses habituelles, il existe une unique solution φ sur un intervalle maximal I_0. Nous allons chercher à approximer φ sur l'intervalle $I = [t_0, t_0 + T]$, en supposant bien sûr que celui-ci est contenu dans I_0.

L'idée est la suivante : pour tout t, on connaît la tangente au graphe de $\varphi(t)$. On va discrêtiser le temps en n intervalles de longueur $h_n = \frac{T}{n}$, et sur chacun de ces intervalles, on va suivre la tangente indiquée par (Aut)



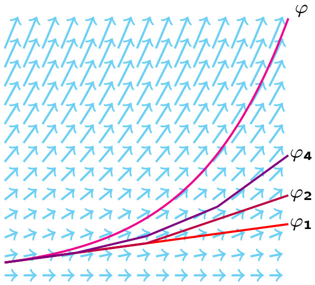
La méthode d'Euler (1)

On reprend notre équadiff

$$\text{(Aut)} \qquad y'(t) = f(y(t))$$

avec la condition initiale $y(t_0) = y_0$. Sous les hypoyhèses habituelles, il existe une unique solution φ sur un intervalle maximal I_0. Nous allons chercher à approximer φ sur l'intervalle $I = [t_0, t_0 + T]$, en supposant bien sûr que celui-ci est contenu dans I_0.

L'idée est la suivante : pour tout t, on connaît la tangente au graphe de $\varphi(t)$. On va discrétiser le temps en n intervalles de longueur $h_n = \frac{T}{n}$, et sur chacun de ces intervalles, on va suivre la tangente indiquée par (Aut)



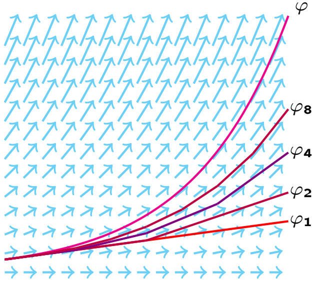
La méthode d'Euler (1)

On reprend notre équadiff

$$\text{(Aut)} \qquad y'(t) = f(y(t))$$

avec la condition initiale $y(t_0) = y_0$. Sous les hypoyhèses habituelles, il existe une unique solution φ sur un intervalle maximal I_0. Nous allons chercher à approximer φ sur l'intervalle $I = [t_0, t_0 + T]$, en supposant bien sûr que celui-ci est contenu dans I_0.

L'idée est la suivante : pour tout t, on connaît la tangente au graphe de $\varphi(t)$. On va discrêtiser le temps en n intervalles de longueur $h_n = \frac{T}{n}$, et sur chacun de ces intervalles, on va suivre la tangente indiquée par (Aut)

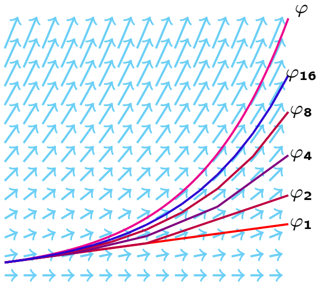


On reprend notre équadiff

$$(\text{Aut}) \qquad y'(t) = f(y(t))$$

avec la condition initiale $y(t_0) = y_0$. Sous les hypoyhèses habituelles, il existe une unique solution φ sur un intervalle maximal I_0. Nous allons chercher à approximer φ sur l'intervalle $I = [t_0, t_0 + T]$, en supposant bien sûr que celui-ci est contenu dans I_0.

L'idée est la suivante : pour tout t, on connaît la tangente au graphe de $\varphi(t)$. On va discrétiser le temps en n intervalles de longueur $h_n = \frac{T}{n}$, et sur chacun de ces intervalles, on va suivre la tangente indiquée par (Aut)



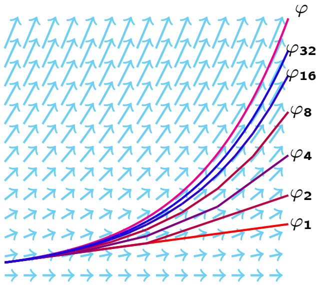
La méthode d'Euler (1)

On reprend notre équadiff

$$\text{(Aut)} \qquad y'(t) = f(y(t))$$

avec la condition initiale $y(t_0) = y_0$. Sous les hypoyhèses habituelles, il existe une unique solution φ sur un intervalle maximal I_0. Nous allons chercher à approximer φ sur l'intervalle $I = [t_0, t_0 + T]$, en supposant bien sûr que celui-ci est contenu dans I_0.

L'idée est la suivante : pour tout t, on connaît la tangente au graphe de $\varphi(t)$. On va discrêtiser le temps en n intervalles de longueur $h_n = \frac{T}{n}$, et sur chacun de ces intervalles, on va suivre la tangente indiquée par (Aut)

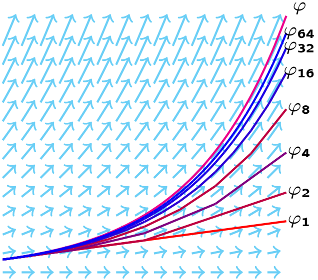


On reprend notre équadiff

$$(\text{Aut}) \qquad y'(t) = f(y(t))$$

avec la condition initiale $y(t_0) = y_0$. Sous les hypoyhèses habituelles, il existe une unique solution φ sur un intervalle maximal I_0. Nous allons chercher à approximer φ sur l'intervalle $I = [t_0, t_0 + T]$, en supposant bien sûr que celui-ci est contenu dans I_0.

L'idée est la suivante : pour tout t, on connaît la tangente au graphe de $\varphi(t)$. On va discrêtiser le temps en n intervalles de longueur $h_n = \frac{T}{n}$, et sur chacun de ces intervalles, on va suivre la tangente indiquée par (Aut)



La méthode d'Euler (2)

Pour cela, pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on pose $h_n = \frac{T}{n}$, et on considère les points $t_k = t_0 + kh_n$, qui découpent I en n parties I_0, I_1, ..., I_{n-1}, avec $I_k = [t_k, t_{k+1}]$. On définit alors une suite $(y_k)_{k=0}^{n}$ en posant

$$y_{k+1} = y_k + h_n f(y_k)$$

Enfin, on définit une fonction φ_n sur I en reliant les valeurs obtenues par des morceaux affines :

$$\varphi_n(t) = y_k + (t - t_k) f(y_k) \quad \text{si} \quad t \in [t_k, t_{k+1}]$$

L'espoir est alors que pour tout point t de I, la suite $\varphi_n(t)$ converge vers $\varphi(t)$.

La méthode d'Euler sur un exemple

Essayons avec une de nos équations différentielles préférées :

$$y' = y$$

dont nous savons que la solution passant par le point $(0, 1)$ est $\varphi(t) = e^t$.
La méthode d'Euler sur l'intervalle $[0, T]$ au rang n donne

$$y_k = (1 + \frac{T}{n})^k$$

et en particulier

$$y_n = (1 + \frac{T}{n})^n$$

qui tend bien vers e^T.

Estimation de l'erreur dans la méthode d'Euler (1)

On a une équation du type

$$(\text{Aut}) \quad y'(t) = f(y(t))$$

où f est définie sur un intervalle J.
On suppose que f est K-lipshitzienne sur J :

$$|f(a) - f(b)| \leq K|a - b| \quad .$$

C'est par exemple le cas dès que f est dérivable sur J, et si $|f'(y)| < K$ sur cet intervalle.
On note M le maximum de f sur J.

Erreur dans la méthode d'Euler

Soit φ la solution de (Aut) passant par (t_0, y_0). Soit φ_n la n-ième approximation d'Euler sur l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$. On a l'inégalité

$$|\varphi(t_j) - \varphi_n(t_j)| \leq a^j \frac{MT}{2n} \qquad (\text{avec } t_j = t_0 + j\frac{T}{n} \text{ et } a = e^{\frac{KT}{n}}).$$

En particulier, lorsque $n \to \infty$, cette erreur tend vers 0.

Estimation de l'erreur dans la méthode d'Euler (2)

Commençons avec une estimation de l'erreur sur un pas : on a les inégalités

$$
\begin{array}{rcl}
|\varphi(t+h)-\varphi(t)-h.f(\varphi(t))| & = & |\int_0^h \varphi'(t+x)-f(\varphi(t))\mathrm{d}x| \\
= \quad |\int_0^h f(\varphi(t+x))-f(\varphi(t))\mathrm{d}x| & \leq & \int_0^h |f(\varphi(t+x))-f(\varphi(t))|\mathrm{d}x \\
\leq \quad K\int_0^h |\varphi(t+x)-\varphi(t)|\mathrm{d}x & = & K\int_0^h |\int_0^x \varphi'(t+u)\mathrm{d}u|\mathrm{d}x \\
\leq \quad K\int_0^h \int_0^x |\varphi'(t+u)|\mathrm{d}u\mathrm{d}x & = & K\int_0^h \int_0^x |f(\varphi(t+u))|\mathrm{d}u\mathrm{d}x \\
\leq \quad K\int_0^h \int_0^x M\mathrm{d}u\mathrm{d}x & \leq & K\int_0^h Mx\mathrm{d}x \\
\leq \quad K.M.\frac{h^2}{2} & &
\end{array}
$$

Estimation de l'erreur dans la méthode d'Euler (3)

Nous avons donc les deux égalités

$$\begin{cases} \varphi(t_{k+1}) & = & \varphi(t_k) + f(\varphi(t_k)).h_n + \varepsilon_k \\ y_{k+1} & = & y_k + f(y_k).h_n \end{cases} \qquad (\text{avec } |\varepsilon_k| \leq KM\frac{h_n^2}{2})$$

qui impliquent

$$\begin{aligned} |\varphi(t_{k+1}) - y_{k+1}| & \leq |\varphi(t_k) - y_k| + h_n|f(\varphi(t_k)) - f(y_k)| + KM\tfrac{h_n^2}{2} \\ & \leq (1 + K.h_n)|\varphi(t_k) - y_k| + KM\tfrac{h_n^2}{2} \end{aligned}$$

Si l'on pose $e_k = |\varphi(t_k) - y_k|$, on a donc

$$e_{k+1} \leq e_k.(1 + K.h_n) + KM\frac{h_n^2}{2}$$

d'où l'on déduit (exercice)

$$e_j \leq e^{K.j.h_n}\frac{M}{2}h_n$$

Estimation de l'erreur dans la méthode d'Euler (4)

Reprenons notre exemple

$$(\text{Aut}) \quad y'(t) = y(t)$$

et considérons les approximations d'Euler de la solution $\varphi(t) = e^t$ sur l'intervalle $[0,1]$. Ici, on a $K = 1$, $T = 1$ et $M = e$, donc on a

$$|e^{t_j} - \varphi_n(t_j)| = |e^{t_j} - (1 + \frac{1}{n})^j| \leq \frac{e^{1+\frac{j}{n}}}{2n}$$

La méthode d'Euler comme lien équadiffs $\leftrightarrow$ suites récurrentes

Comme on l'a vu, la méthode d'Euler permet d'associer à une équation différentielle $y' = f(y)$ des suites récurrentes de la forme $u_{k+1} = u_k + \frac{T}{n} f(u_k)$ qui donnent des informations (de type quantitatif) sur ses solutions.

Nous allons maintenant retourner la situation et associer à une suite récurrente une équation différentielle qui nous en apprendra peut-être un peu plus sur le comportement de cette suite.

Commençons avec l'exemple de la suite logistique

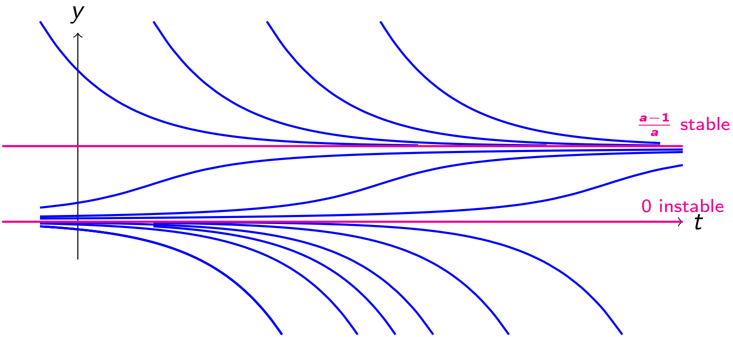
$$u_0 = 0.3 \quad , \quad u_{n+1} = a u_n (1 - u_n) \quad .$$

On constate que c'est la suite d'Euler associée à l'équadiff

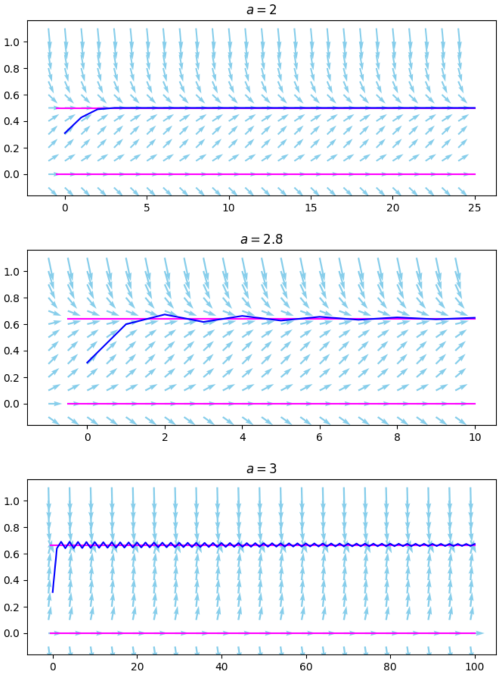
$$y' = y(a - 1 - ay)$$

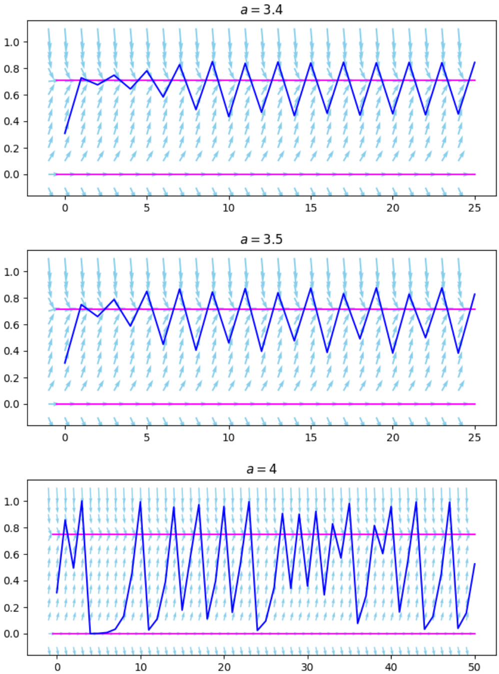
pour $T = n$!

Une rapide étude qualitative montre que pour $a > 0$, les solutions ont l'aspect suivant :



La suite logistique a alors le comprotement suivant :


$a = 2$
$a = 2.8$
$a = 3$


$a = 3.4$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
5
10
15
20
25
$a = 3.5$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
5
10
15
20
25
$a = 4$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
10
20
30
40
50