

FEUILLETAGES DE CODIMENSION UN PAR DES SURFACES HOMEOMORPHES

par Michel COORNAERT

Soit S une surface ; on appellera "feuilletage en S " un feuilletage dont toutes les feuilles sont homéomorphes à S . Ici, par feuilletage, on entendra uniquement feuilletage C^2 d'une 3-variété fermée et orientable par des surfaces orientables.

Rappelons, qu'à une conjugaison topologique près, ont été classifiés :

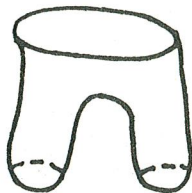
- les feuilletages en plans \mathbb{R}^2 (Rosenberg et Roussarie [6]) : ils n'apparaissent que sur le tore T^3 et y sont classifiés par deux nombres de rotation linéairement indépendants.
- les feuilletages en cylindres $S^1 \times \mathbb{R}$ (Hector [3]) : ils n'apparaissent que sur certains fibrés en tores T^2 et y sont classifiés par un nombre de rotation irrationnel.

Ces deux types de feuilletages sont sans holonomie. En fait tout feuilletage sans holonomie est à feuilles homéomorphes. Pour cette classe de feuilletages en S , on sait quelle peut être la topologie de S : en dehors des surfaces compactes peuvent apparaître, soit le plan, soit le cylindre, soit l'échelle de Jacob à un ou deux bouts (Cantwell et Conlon [1]). Nous nous proposons ici :

- de donner une autre démonstration du résultat de Cantwell et Conlon,
- de construire un exemple de feuilletage ayant de l'holonomie, à feuilles homéomorphes et d'un type topologique n'apparaissant pas dans les feuilletages sans holonomie,

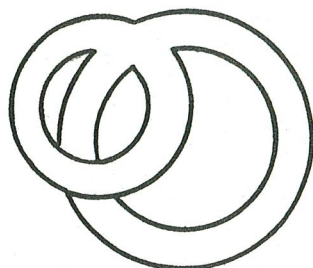
- d'apporter quelques restrictions sur S nécessaires pour l'existence d'un feuilletage en S : Par exemple, il ne peut exister de feuilletages

- en pantalons :



$$\cong S^2 - \{3 \text{ points}\}$$

- en tores troués :



$$\cong T^2 - \{1 \text{ point}\}$$

Les démonstrations utilisées s'inspirent des idées de Gilbert HECTOR dans [3] ; qu'il me soit permis de le remercier ainsi que l'équipe "feuilletages" de LILLE pour leur aide généreuse.

1. Rappels sur la classification des surfaces et sur les bouts.

Soit S une surface ; $g(S) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est le genre de S : c'est le nombre d'anses contenues dans S . L'ensemble des bouts de S est :

$$\mathfrak{B}(S) = \lim_{\leftarrow} \pi_0(S - K),$$

où K décrit les compacts de S et $\pi_0(S - K)$ est muni de la topologie discrète. $\mathfrak{B}(S)$ est un compact métrisable et totalement discontinu (en restreignant les K , il peut se voir comme limite projective d'un système dénombrable d'ensembles finis discrets).

Un bout est dit planaire s'il existe un compact K tel que l'image du

bout dans $\pi_0(S-K)$ puisse se plonger dans le plan. L'ensemble des bouts planaires est donc un ouvert de $\mathcal{B}(S)$; son complémentaire est l'ensemble $\mathcal{B}_g(S)$ des "bouts à genre".

Un bout est un "infini" de S ; il a du genre quand on peut trouver une suite d'anses tendant vers cet infini.

THEOREME de classification (Richards [5]). Soit S et S' deux surfaces orientables ; elles sont homéomorphes si et seulement si :

$$g(S) = g(S') \text{ et } (\mathcal{B}(S), \mathcal{B}_g(S)) \cong (\mathcal{B}(S'), \mathcal{B}_g(S'))$$

(\cong désigne l'homéomorphisme pour les paires).

Exemples :

- La surface F_g compacte de genre g :

$$g(F_g) = g \quad \mathcal{B}(F_g) = \emptyset .$$

- L'échelle de Jacob à i bouts T_i^∞ ,

$$g(T_i^\infty) = \infty ,$$

$$\text{card}(\mathcal{B}(T_i^\infty)) = i , \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}_g ,$$

$$T_1^\infty = \text{---} \left(\text{---} \cup \text{---} \cup \text{---} \cup \dots \right) \text{---}$$

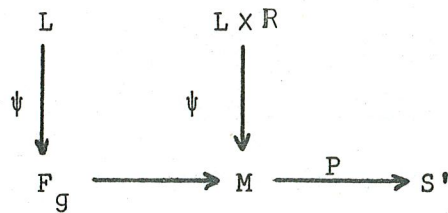
$$T_2^\infty = \text{---} \left(\dots \cup \text{---} \cup \text{---} \cup \text{---} \cup \text{---} \right) \text{---}$$

Maintenant si S est feuille d'un feuilletage d'une variété M compacte et ε un bout de S , l'ensemble limite de ε est défini comme étant l'intersection des fermetures (dans M) des images canoniques du bout ε dans les $\pi_0(S-K)$. C'est toujours un compact non vide.

2. Feuilletages sans holonomie.

Un feuilletage sans holonomie est à feuilles homéomorphes. On sait que si (M, \mathcal{F}) est sans holonomie :

M fibre sur S' (Tischler) de fibre F_g avec :



L est la feuille type de \mathcal{F} , p est la fibration, φ et ψ sont des revêtements galoisiens de groupes respectifs \mathbb{Z}^p et \mathbb{Z}^{p-1} ($p \geq 1$) (Moussu [4]). On en déduit facilement le résultat de Cantwell et Conlon :

THEOREME ([1], Cor. 3). Dans un feuilletage sans holonomie, les feuilles sont toutes homéomorphes à :

$$F_g, \mathbb{R}^2, S^1 \times \mathbb{R}, T_\infty^1 \text{ ou } T_\infty^2.$$

Démonstration. Par le théorème de HOPF, le revêtement ψ étant à base compacte (on suppose dans la démonstration L non compacte, i.e. $p > 1$), on a :

$$\mathcal{B}(L) = \mathcal{B}(\mathbb{Z}^{p-1}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{p-1}),$$

donc L a deux bouts si $p = 2$, un seul si $p > 2$. Si L est de genre nul, c'est donc un plan ou un cylindre. Si $g(L) \neq 0$, L contiendra une anse ; par des translations de \mathbb{Z}^{p-1} , cette anse convergera vers chaque bout. L est donc dans ce cas une échelle de Jacob à un ou deux bouts.

Remarque. Des exemples de chaque type s'obtiennent facilement par suspension sur F_g de rotations.

3. Un feuilletage à feuilles homéomorphes ayant de l'holonomie.

Rappelons le procédé classique de construction d'un feuilletage de $F_g \times S^1$ par suspension de g difféomorphismes du cercle.

Soit V un voisinage régulier d'un bouquet de g cercles plongé de manière standard dans R^3 . Le bord de V est $\partial V = F_g$ et l'inclusion $\partial V \hookrightarrow V$ donne un homomorphisme surjectif :

$$i_* : \pi_1(F_g) \longrightarrow \pi_1(V) = * \mathbb{Z}^g .$$

Soit maintenant g difféomorphismes du cercle. Par i_* , on en déduit une action de $\pi_1(F_g)$ sur S^1 . Par suspension de Haefliger, on en déduit un feuilletage de $F_g \times S^1$.

Soit maintenant f_1 et f_2 deux éléments de $PSL_2(\mathbb{Z})$ engendrant un groupe libre. $PSL_2(\mathbb{Z})$ agit sur $S^1 = RU \{\infty\}$ par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x = \frac{ax+b}{cx+d} .$$

Par suspension de f_1 et f_2 , on obtient un feuilletage de $F_2 \times S^1$ (cf. WOOD [7]). Les feuilles sont S^2 -Cantor ou T^2 -Cantor. En prenant comme troisième difféomorphisme l'identité, on ajoutera du genre à tous les bouts, ce qui donnera un feuilletage de $F_3 \times S^1$ à feuilles toutes homéomorphes à la surface ayant un Cantor de bouts tous à genre. Remarquons que cette construction peut donner un feuilletage à feuilles homéomorphes avec ou sans minimal exceptionnel.

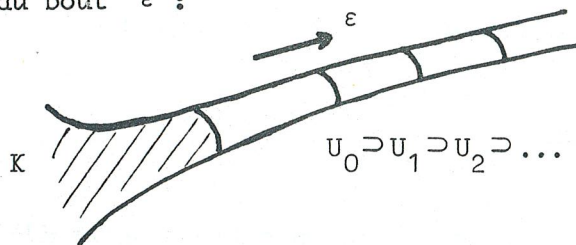
4. Restrictions sur S pour l'existence d'un feuilletage en S .

THEOREME. Soit (M, \mathcal{F}) un feuilletage en S , où S est non compacte ; alors

- a) Si $g(S) = 0$, on a : $S = \mathbb{R}^2$, $S^1 \times \mathbb{R}$ ou S^2 -Cantor.
- b) Si $g(S) \neq 0$, on a $g(S) = \infty$ et tous les bouts sont à genre.

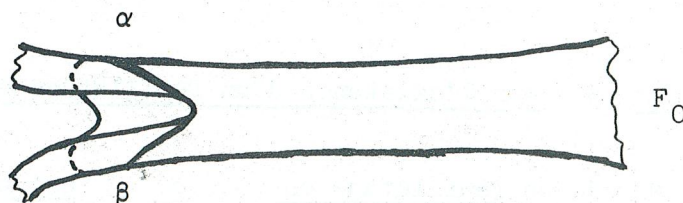
Démonstration. Elle s'inspire de celle qu'utilise Hector pour montrer qu'un feuilletage en cylindres est sans holonomie. Soit \mathcal{M} un minimal d'un feuilletage en S , où S est non compacte. On sait ([2], [3]) que \mathcal{M} admet au moins une feuille F_0 sans holonomie dans \mathcal{M} .

a) $g(S) = 0$. Supposons $\text{card}(\beta(S)) > 2$. Pour montrer que S est S^2 -Cantor, il suffit de prouver que $\beta(S)$ est sans point isolé (tous les compacts métrisables totalement discontinus sans points isolés sont homéomorphes). Soit F une feuille quelconque de \mathcal{M} . Supposons que F possède un bout isolé ε . Il existe alors un compact $K \subset F$ tel que l'image de ε dans $\pi_0(F - K)$ soit un cylindre U_0 . Considérons une suite de cylindres emboîtés $U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \dots$ d'intersection vide et voisinages du bout ε :



L'ensemble limite de ε est $\omega(\varepsilon) = \bigcap \overline{U_i}$, comme \mathcal{M} est minimal et que $F \subset \mathcal{M}$, on a : $\omega(\varepsilon) = \mathcal{M}$.

S ayant plus de deux bouts, F_0 contient deux lacets α et β engendrant un groupe libre dans $\pi_1(F_0)$:



F_0 étant sans holonomie dans \mathcal{M} , et puisque $\omega(\varepsilon) = \mathcal{M}$, ces lacets pourront se relever dans un des U_i , ce qui contredirait le théorème de Novikov, puisque $\pi_1(U_i) \cong \mathbb{Z}$ et \mathcal{F} est sans feuille compacte.

b) $g(S) \neq 0$. F_0 contient une anse (compacte). Pour tout bout ε de F , $\omega(\varepsilon) = \mathcal{M}$ et on pourra donc relever cette anse dans tout voisinage de ε . Tout bout a donc du genre et $g(S) = \infty$.

REFERENCES

- [1] J. CANTWELL, L. CONLON : "Leaves with isolated ends in foliated 3-manifolds".
Topology 16 (1977), 311-322.
- [2] D. EPSTEIN, K. MILLET, D. TISCHLER : "Leaves without holonomy".
J. London Math. Soc. 16 (1977), 548-552. MR 57 # 4193.
- [3] G. HECTOR : "Feuilletages en Cylindres".
Geometry and Topology Rio de Janeiro Lecture Notes
597. MR 56 # 9547.
- [4] MOUSSU : "Sur les feuilletages de codimension un".
Thèse Orsay 1971.
- [5] J. RICHARDS : "On the classification of non compact surfaces".
Trans. Amer. Math. Soc. 106 (1963), 259-269. MR 26 # 746 .
- [6] H. ROSENBERG, R. ROUSSARIE : "Reeb Foliations". Annals of Math. 91 (1970),
1-24. MR 41 # 2704.
- [7] J. WOOD : "Foliated S^1 -bundles and diffeomorphisms of S^1 ".
Dynamical systems Salvador. Ed. Peixoto (1971)
671-681. MR 43 # 4054.

*Institut de Recherche Mathématique Avancée
Laboratoire Associé au C.N.R.S. n° 1
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG Cédex*

