# Un théorème du jardin d'Éden pour les espaces de Smale

Michel Coornaert

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université de Strasbourg

11 décembre 2025, Séminaire virtuel francophone Groupes et Géométrie

# Un théorème du jardin d'Éden pour les espaces de Smale

En collaboration avec Tullio Ceccherini-Silberstein [CC25].

# Systèmes dynamiques

# Systèmes dynamiques

Un système dynamique est un couple $(X, f)$, où

- $X$ est un espace compact métrisable ;
- $f : X \to X$ est un homéomorphisme.

# Systèmes dynamiques

Un système dynamique est un couple $(X, f)$, où

- $X$ est un espace compact métrisable ;
- $f : X \to X$ est un homéomorphisme.

Étant donné un système dynamique $(X, f)$, on s'intéresse à l'action de $\mathbb{Z}$ engendrée par $f$ :

# Systèmes dynamiques

Un système dynamique est un couple $(X, f)$, où

- $X$ est un espace compact métrisable ;
- $f: X \to X$ est un homéomorphisme.

Étant donné un système dynamique $(X, f)$, on s'intéresse à l'action de $\mathbb{Z}$ engendrée par $f$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times X &\to X \\ (n, x) &\mapsto f^n(x). \end{aligned}$$

# Exemples de systèmes dynamiques

# Exemples de systèmes dynamiques

### Exemple 1 (Le chat d'Arnold)

C'est le système dynamique $(X, f)$, où

- $X$ est le tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ ;
- $f\colon X \to X$ est donné par

$$\forall x = (x_1, x_2) \in X, \quad f(x) \coloneqq (x_2, x_1 + x_2).$$

# Exemples de systèmes dynamiques

**Exemple 1 (Le chat d'Arnold)**

C'est le système dynamique $(X, f)$, où

- $X$ est le tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ ;
- $f : X \to X$ est donné par

$$\forall x = (x_1, x_2) \in X, \quad f(x) \coloneqq (x_2, x_1 + x_2).$$

L'homéomorphisme $f$ est induit par l'automorphisme linéaire $\widetilde{f}$ de $\mathbb{R}^2$ de matrice

$$M \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

# Décalages pleins

# Décalages pleins

Exemple 2 (Les décalages)

Soit $A$ un ensemble fini, appelé l'alphabet.

# Décalages pleins

Exemple 2 (Les décalages)

Soit $A$ un ensemble fini, appelé l'alphabet.
Le décalage plein sur l'alphabet $A$ est le système dynamique $(X, f)$, où :

# Décalages pleins

Exemple 2 (Les décalages)

Soit $A$ un ensemble fini, appelé l'alphabet.
Le décalage plein sur l'alphabet $A$ est le système dynamique $(X, f)$, où :

$$X := A^{\mathbb{Z}} = \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} : \forall i \in \mathbb{Z}, x_i \in A\}$$

est l'ensemble des suites bi-infinies d'éléments de $A$.

# Décalages pleins

Exemple 2 (Les décalages)

Soit $A$ un ensemble fini, appelé l'alphabet.
Le décalage plein sur l'alphabet $A$ est le système dynamique $(X, f)$, où :

$$X := A^{\mathbb{Z}} = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} : \forall i \in \mathbb{Z}, x_i \in A\}$$

est l'ensemble des suites bi-infinies d'éléments de $A$.
L'ensemble $A$ est muni de la topologie discrète et $X = A^{\mathbb{Z}} = \prod_{\mathbb{Z}} A$ de la topologie produit (topologie de la convergence ponctuelle).

# Décalages pleins

Exemple 2 (Les décalages)

Soit $A$ un ensemble fini, appelé l'alphabet.
Le décalage plein sur l'alphabet $A$ est le système dynamique $(X, f)$, où :

$$X := A^{\mathbb{Z}} = \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} : \forall i \in \mathbb{Z}, x_i \in A\}$$

est l'ensemble des suites bi-infinies d'éléments de $A$.
L'ensemble $A$ est muni de la topologie discrète et $X = A^{\mathbb{Z}} = \prod_{\mathbb{Z}} A$ de la topologie produit (topologie de la convergence ponctuelle).
L'homéomorphisme $f : X \to X$ est défini par

$$\forall x \in X, \forall i \in \mathbb{Z}, \quad (f(x))_i := x_{i+1}.$$

# Sous-systèmes et sous-décalages

# Sous-systèmes et sous-décalages

On dit qu'un système dynamique $(Y, g)$ est un sous-système d'un système dynamique $(X, f)$ si $Y$ est un sous-ensemble fermé $f$-invariant de $X$ et $g = f|_Y \colon Y \to Y$ est la restriction de $f$ à $Y$.

# Sous-systèmes et sous-décalages

On dit qu'un système dynamique $(Y, g)$ est un sous-système d'un système dynamique $(X, f)$ si $Y$ est un sous-ensemble fermé $f$-invariant de $X$ et $g = f|_Y \colon Y \to Y$ est la restriction de $f$ à $Y$. Souvent, $f|_Y$ est simplement noté $f$ par abus.

# Sous-systèmes et sous-décalages

On dit qu'un système dynamique $(Y, g)$ est un sous-système d'un système dynamique $(X, f)$ si $Y$ est un sous-ensemble fermé $f$-invariant de $X$ et $g = f|_Y \colon Y \to Y$ est la restriction de $f$ à $Y$. Souvent, $f|_Y$ est simplement noté $f$ par abus.

Soit $A$ un ensemble fini. On appelle sous-décalage sur $A$ un sous-système du décalage plein sur l'alphabet $A$.

# Sous-systèmes et sous-décalages

On dit qu'un système dynamique $(Y, g)$ est un sous-système d'un système dynamique $(X, f)$ si $Y$ est un sous-ensemble fermé $f$-invariant de $X$ et $g = f|_Y \colon Y \to Y$ est la restriction de $f$ à $Y$. Souvent, $f|_Y$ est simplement noté $f$ par abus.

Soit $A$ un ensemble fini. On appelle sous-décalage sur $A$ un sous-système du décalage plein sur l'alphabet $A$.

On dit qu'un sous-décalage $(Y, f)$ sur $A$ est de type fini s'il existe un entier $k \geq 1$ et un sous-ensemble (nécessairement fini) $F \subset A^k$ tels que

$$Y = \{x \in A^{\mathbb{Z}} : \forall i \in \mathbb{Z}, \quad (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}) \in F\}.$$

# Le sous-décalage d'or et le sous-décalage pair

# Le sous-décalage d'or et le sous-décalage pair

### Exemple 3 (Le sous-décalage d'or)

C'est le sous-décalage $(Y, f)$ sur l'alphabet $A := \{0, 1\}$, où $Y$ est formé des suites de 0 et 1 qui ne comportent pas deux termes consécutifs égaux à 1.

# Le sous-décalage d'or et le sous-décalage pair

### Exemple 3 (Le sous-décalage d'or)

C'est le sous-décalage $(Y, f)$ sur l'alphabet $A := \{0, 1\}$, où $Y$ est formé des suites de 0 et 1 qui ne comportent pas deux termes consécutifs égaux à 1.
C'est un sous-décalage de type fini (on peut prendre $k := 2$ et $F := \{(0,0),(0,1),(1,0)\}$).

# Le sous-décalage d'or et le sous-décalage pair

**Exemple 3 (Le sous-décalage d'or)**

C'est le sous-décalage $(Y, f)$ sur l'alphabet $A := \{0, 1\}$, où $Y$ est formé des suites de 0 et 1 qui ne comportent pas deux termes consécutifs égaux à 1.
C'est un sous-décalage de type fini (on peut prendre $k := 2$ et $F := \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$).

**Exemple 4 (Le sous-décalage pair)**

C'est le sous-décalage $(Y, f)$ sur l'alphabet $\{0, 1\}$, où $Y$ est formé des suites de 0 et 1 qui ont toujours un nombre pair de 0 entre deux 1.

# Le sous-décalage d'or et le sous-décalage pair

### Exemple 3 (Le sous-décalage d'or)

C'est le sous-décalage $(Y, f)$ sur l'alphabet $A := \{0, 1\}$, où $Y$ est formé des suites de 0 et 1 qui ne comportent pas deux termes consécutifs égaux à 1.
C'est un sous-décalage de type fini (on peut prendre $k := 2$ et $F := \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$).

### Exemple 4 (Le sous-décalage pair)

C'est le sous-décalage $(Y, f)$ sur l'alphabet $\{0, 1\}$, où $Y$ est formé des suites de 0 et 1 qui ont toujours un nombre pair de 0 entre deux 1.
Le sous-décalage pair n'est pas de type fini.

# Non-errance, irréductibilité, et mélange

# Non-errance, irréductibilité, et mélange

Soit $(X, f)$ un système dynamique.

# Non-errance, irréductibilité, et mélange

Soit $(X, f)$ un système dynamique.
On dit que $x \in X$ est non-errant si

# Non-errance, irréductibilité, et mélange

Soit $(X, f)$ un système dynamique.
On dit que $x \in X$ est non-errant si

$$\forall U \text{ voisinage de } x, \exists n \geq 1 \text{ tel que } U \cap f^n(U) \neq \varnothing.$$

# Non-errance, irréductibilité, et mélange

Soit $(X, f)$ un système dynamique.
On dit que $x \in X$ est non-errant si

$$\forall U \text{ voisinage de } x, \exists n \geq 1 \text{ tel que } U \cap f^n(U) \neq \varnothing.$$

On note $\Omega(X, f)$ l'ensemble des points non-errants de $(X, f)$.

# Non-errance, irréductibilité, et mélange

Soit $(X, f)$ un système dynamique.
On dit que $x \in X$ est non-errant si

$$\forall U \text{ voisinage de } x, \exists n \geq 1 \text{ tel que } U \cap f^n(U) \neq \varnothing.$$

On note $\Omega(X, f)$ l'ensemble des points non-errants de $(X, f)$. C'est un sous-ensemble fermé et $f$-invariant de $X$.

# Non-errance, irréductibilité, et mélange

Soit $(X, f)$ un système dynamique.
On dit que $x \in X$ est non-errant si

$$\forall U \text{ voisinage de } x, \exists n \geq 1 \text{ tel que } U \cap f^n(U) \neq \varnothing.$$

On note $\Omega(X, f)$ l'ensemble des points non-errants de $(X, f)$. C'est un sous-ensemble fermé et $f$-invariant de $X$. On dit que $(X, f)$ est non-errant si $\Omega(X, f) = X$.

# Non-errance, irréductibilité, et mélange

Soit $(X, f)$ un système dynamique.
On dit que $x \in X$ est non-errant si

$$\forall U \text{ voisinage de } x, \exists n \geq 1 \text{ tel que } U \cap f^n(U) \neq \varnothing.$$

On note $\Omega(X, f)$ l'ensemble des points non-errants de $(X, f)$. C'est un sous-ensemble fermé et $f$-invariant de $X$. On dit que $(X, f)$ est non-errant si $\Omega(X, f) = X$.
On dit que $(X, f)$ est irréductible si

# Non-errance, irréductibilité, et mélange

Soit $(X, f)$ un système dynamique.
On dit que $x \in X$ est non-errant si

$$\forall U \text{ voisinage de } x, \exists n \geq 1 \text{ tel que } U \cap f^n(U) \neq \varnothing.$$

On note $\Omega(X, f)$ l'ensemble des points non-errants de $(X, f)$. C'est un sous-ensemble fermé et $f$-invariant de $X$. On dit que $(X, f)$ est non-errant si $\Omega(X, f) = X$.
On dit que $(X, f)$ est irréductible si

$$\forall U, V \text{ouverts non vides de } X, \exists n \geq 1 \text{ tel que } U \cap f^n(V) \neq \varnothing.$$

# Non-errance, irréductibilité, et mélange

Soit $(X, f)$ un système dynamique.
On dit que $x \in X$ est non-errant si

$$\forall U \text{ voisinage de } x, \exists n \geq 1 \text{ tel que } U \cap f^n(U) \neq \varnothing.$$

On note $\Omega(X, f)$ l'ensemble des points non-errants de $(X, f)$. C'est un sous-ensemble fermé et $f$-invariant de $X$. On dit que $(X, f)$ est non-errant si $\Omega(X, f) = X$.
On dit que $(X, f)$ est irréductible si

$$\forall U, V \text{ouverts non vides de } X, \exists n \geq 1 \text{ tel que } U \cap f^n(V) \neq \varnothing.$$

On dit que $(X, f)$ est mélangeant si

# Non-errance, irréductibilité, et mélange

Soit $(X, f)$ un système dynamique.
On dit que $x \in X$ est non-errant si

$$\forall U \text{ voisinage de } x, \exists n \geq 1 \text{ tel que } U \cap f^n(U) \neq \varnothing.$$

On note $\Omega(X, f)$ l'ensemble des points non-errants de $(X, f)$. C'est un sous-ensemble fermé et $f$-invariant de $X$. On dit que $(X, f)$ est non-errant si $\Omega(X, f) = X$.
On dit que $(X, f)$ est irréductible si

$$\forall U, V \text{ouverts non vides de } X, \exists n \geq 1 \text{ tel que } U \cap f^n(V) \neq \varnothing.$$

On dit que $(X, f)$ est mélangeant si

$$\forall U, V \text{ouverts non vides de } X, \exists n \geq 1 \text{ tel que } \forall k \geq n, U \cap f^k(V) \neq \varnothing.$$

# Non-errance, irréductibilité, et mélange

Soit $(X, f)$ un système dynamique.
On dit que $x \in X$ est non-errant si

$$\forall U \text{ voisinage de } x, \exists n \geq 1 \text{ tel que } U \cap f^n(U) \neq \varnothing.$$

On note $\Omega(X, f)$ l'ensemble des points non-errants de $(X, f)$. C'est un sous-ensemble fermé et $f$-invariant de $X$. On dit que $(X, f)$ est non-errant si $\Omega(X, f) = X$.
On dit que $(X, f)$ est irréductible si

$$\forall U, V \text{ouverts non vides de } X, \exists n \geq 1 \text{ tel que } U \cap f^n(V) \neq \varnothing.$$

On dit que $(X, f)$ est mélangeant si

$$\forall U, V \text{ouverts non vides de } X, \exists n \geq 1 \text{ tel que } \forall k \geq n, U \cap f^k(V) \neq \varnothing.$$

$$\text{mélangeant} \implies \text{irréductible} \implies \text{non-errant}.$$

# Homoclinicité

# Homoclinicité

Soit $(X, f)$ un système dynamique.

# Homoclinicité

Soit $(X, f)$ un système dynamique.
Soit $d$ une métrique sur $X$ compatible avec la topologie.

# Homoclinicité

Soit $(X, f)$ un système dynamique.
Soit $d$ une métrique sur $X$ compatible avec la topologie.
On dit que deux points $x, y \in X$ sont homocliniques si

$$\lim_{|n| \to \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0.$$

# Homoclinicité

Soit $(X, f)$ un système dynamique.
Soit $d$ une métrique sur $X$ compatible avec la topologie.
On dit que deux points $x, y \in X$ sont homocliniques si

$$\lim_{|n| \to \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0.$$

La définition ne dépend pas du choix de $d$ par compacité de $X$.

# Homoclinicité

Soit $(X, f)$ un système dynamique.
Soit $d$ une métrique sur $X$ compatible avec la topologie.
On dit que deux points $x, y \in X$ sont homocliniques si

$$\lim_{|n| \to \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0.$$

La définition ne dépend pas du choix de $d$ par compacité de $X$.
L'homoclinicité définit une relation d'équivalence sur $X$.

# Homoclinicité dans le chat d'Arnold

# Homoclinicité dans le chat d'Arnold

Exemple 5 (Homoclinicité dans le chat d'Arnold)

Soit $(X, f)$ le chat d'Arnold.

# Homoclinicité dans le chat d'Arnold

**Exemple 5 (Homoclinicité dans le chat d'Arnold)**

Soit $(X, f)$ le chat d'Arnold.
Équipons $X = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ de sa structure (localement) euclidienne.

# Homoclinicité dans le chat d'Arnold

Exemple 5 (Homoclinicité dans le chat d'Arnold)

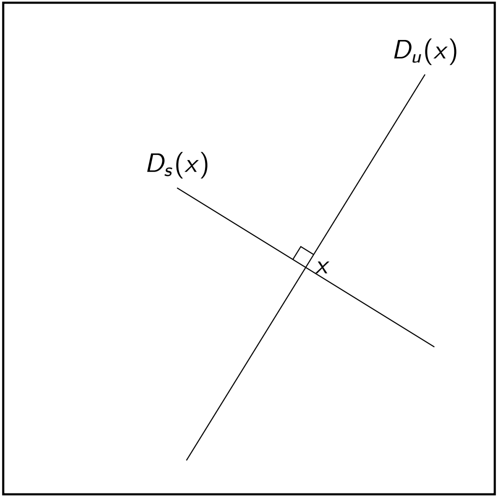
Soit $(X, f)$ le chat d'Arnold.
Équipons $X = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ de sa structure (localement) euclidienne.
La classe homoclinique d'un point $x \in X$ est $D_u(x) \cap D_s(x)$, où $D_u(x) \subset X$ est la droite locale passant par $x$ de pente le nombre d'or $\phi := (1 + \sqrt{5})/2 = 1,618\ldots$ et $D_s(x) \subset X$ est la droite locale passant par $x$ perpendiculairement à $D_u(x)$.

# Homoclinicité dans le chat d'Arnold

Exemple 5 (Homoclinicité dans le chat d'Arnold)

Soit $(X, f)$ le chat d'Arnold.
Équipons $X = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ de sa structure (localement) euclidienne.
La classe homoclinique d'un point $x \in X$ est $D_u(x) \cap D_s(x)$, où $D_u(x) \subset X$ est la droite locale passant par $x$ de pente le nombre d'or $\phi := (1 + \sqrt{5})/2 = 1,618\ldots$ et $D_s(x) \subset X$ est la droite locale passant par $x$ perpendiculairement à $D_u(x)$. La droite $D_u(x)$ (resp. $D_s(x)$) est la droite instable (resp. stable) passant par $x$. Ces deux droites s'enroulent de manière dense sur le tore $X$.

# Homoclinicité dans le chat d'Arnold (suite)



# Homoclinicité dans les sous-décalages

# Homoclinicité dans les sous-décalages

Exemple 6 (Homoclinicité dans les décalages)

Soit $(X, f)$ un sous-décalage sur un ensemble fini $A$.

# Homoclinicité dans les sous-décalages

**Exemple 6 (Homoclinicité dans les décalages)**

Soit $(X, f)$ un sous-décalage sur un ensemble fini $A$.
Deux points $x, y \in X$ sont homocliniques si et seulement si l'ensemble

$$\{i \in \mathbb{Z} : x_i \neq y_i\}$$

est fini.

# Endomorphismes pré-injectifs

# Endomorphismes pré-injectifs

Soit $(X, f)$ un système dynamique.

# Endomorphismes pré-injectifs

Soit $(X, f)$ un système dynamique.
Un endomorphisme de $(X, f)$ est une application continue $\tau \colon X \to X$ telle que $\tau \circ f = f \circ \tau$.

# Endomorphismes pré-injectifs

Soit $(X, f)$ un système dynamique.
Un endomorphisme de $(X, f)$ est une application continue $\tau \colon X \to X$ telle que $\tau \circ f = f \circ \tau$.

**Définition**

On dit qu'un endomorphisme de $(X, f)$ est pré-injectif si sa restriction à toute classe homoclinique est injective.

# Endomorphismes pré-injectifs

Soit $(X, f)$ un système dynamique.
Un endomorphisme de $(X, f)$ est une application continue $\tau\colon X \to X$ telle que $\tau \circ f = f \circ \tau$.

### Définition

On dit qu'un endomorphisme de $(X, f)$ est pré-injectif si sa restriction à toute classe homoclinique est injective.

On a toujours

$$\tau \textit{ injectif} \implies \tau \textit{ pré-injectif}$$

# Endomorphismes pré-injectifs

Soit $(X, f)$ un système dynamique.
Un endomorphisme de $(X, f)$ est une application continue $\tau \colon X \to X$ telle que $\tau \circ f = f \circ \tau$.

**Définition**

On dit qu'un endomorphisme de $(X, f)$ est pré-injectif si sa restriction à toute classe homoclinique est injective.

On a toujours

$$\tau \textit{ injectif} \implies \tau \textit{ pré-injectif}$$

mais la réciproque est fausse.

# Exemples d'endomorphismes pré-injectifs non-injectifs

# Exemples d'endomorphismes pré-injectifs non-injectifs

**Exemple 7**

Soit $(X, f)$ le chat d'Arnold.

# Exemples d'endomorphismes pré-injectifs non-injectifs

**Exemple 7**

Soit $(X, f)$ le chat d'Arnold.
Alors $\tau\colon X \to X$, $x \mapsto 2x$, est un endomorphisme de $(X, f)$ qui est pré-injectif mais pas injectif.

# Exemples d'endomorphismes pré-injectifs non-injectifs

### Exemple 7

Soit $(X, f)$ le chat d'Arnold.
Alors $\tau \colon X \to X$, $x \mapsto 2x$, est un endomorphisme de $(X, f)$ qui est pré-injectif mais pas injectif.

### Exemple 8

Soit $(X, f)$ le décalage sur $A \coloneqq \{0, 1\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

# Exemples d'endomorphismes pré-injectifs non-injectifs

### Exemple 7

Soit $(X, f)$ le chat d'Arnold.
Alors $\tau \colon X \to X$, $x \mapsto 2x$, est un endomorphisme de $(X, f)$ qui est pré-injectif mais pas injectif.

### Exemple 8

Soit $(X, f)$ le décalage sur $A \coloneqq \{0, 1\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Alors l'application $\tau \colon X \to X$ definie par

$$\forall x \in X, \forall i \in \mathbb{Z}, \quad (\tau(x))_i = x_i + x_{i+1}$$

est un endomorphisme pré-injectif de $(X, f)$ qui n'est pas injectif.

# Le théorème du jardin d'Éden de Moore-Myhill

# Le théorème du jardin d'Éden de Moore-Myhill

En 1963, Moore et Myhill ont démontré le théorème suivant :

# Le théorème du jardin d'Éden de Moore-Myhill

En 1963, Moore et Myhill ont démontré le théorème suivant :

Théorème (Théorème du jardin d'Éden de Moore-Myhill)

*Soit $A$ un ensemble fini, $(X, f)$ le décalage plein sur $A$, et $\tau\colon X \to X$ un endomorphisme de $(X, f)$. Alors on a*

$$\tau \text{ surjectif} \iff \tau \text{ pré-injectif.}$$

# Le théorème du jardin d'Éden de Moore-Myhill

En 1963, Moore et Myhill ont démontré le théorème suivant :

**Théorème (Théorème du jardin d'Éden de Moore-Myhill)**

*Soit $A$ un ensemble fini, $(X, f)$ le décalage plein sur $A$, et $\tau\colon X \to X$ un endomorphisme de $(X, f)$. Alors on a*

$$\tau \text{ surjectif} \iff \tau \text{ pré-injectif.}$$

Moore [Moo63] a démontré $\implies$.

# Le théorème du jardin d'Éden de Moore-Myhill

En 1963, Moore et Myhill ont démontré le théorème suivant :

**Théorème (Théorème du jardin d'Éden de Moore-Myhill)**

*Soit $A$ un ensemble fini, $(X, f)$ le décalage plein sur $A$, et $\tau : X \to X$ un endomorphisme de $(X, f)$. Alors on a*

$$\tau \text{ surjectif} \iff \tau \text{ pré-injectif.}$$

Moore [Moo63] a démontré $\implies$.
Un peu après, Myhill [Myh63] a démontré $\impliedby$.

# Propriété de Moore et propriété de Myhill

# Propriété de Moore et propriété de Myhill

Soit $(X, f)$ un système dynamique.

# Propriété de Moore et propriété de Myhill

Soit $(X, f)$ un système dynamique.

### Définition

On dit que $(X, f)$ vérifie Moore si tout endomorphisme surjectif de $(X, f)$ est pré-injectif.

# Propriété de Moore et propriété de Myhill

Soit $(X, f)$ un système dynamique.

**Définition**

On dit que $(X, f)$ vérifie Moore si tout endomorphisme surjectif de $(X, f)$ est pré-injectif.

**Définition**

On dit que $(X, f)$ vérifie Myhill si tout endomorphisme pré-injectif de $(X, f)$ est surjectif.

# Propriété de Moore et propriété de Myhill

Soit $(X, f)$ un système dynamique.

### Définition

On dit que $(X, f)$ vérifie Moore si tout endomorphisme surjectif de $(X, f)$ est pré-injectif.

### Définition

On dit que $(X, f)$ vérifie Myhill si tout endomorphisme pré-injectif de $(X, f)$ est surjectif.

### Définition

On dit que $(X, f)$ vérifie Moore-Myhill, ou encore que $(X, f)$ vérifie le théorème du jardin d'Éden, si $(X, f)$ vérifie à la fois Moore et Myhill.

# Espaces de Smale

# Espaces de Smale

La classe des espaces de Smale a été introduite par David Ruelle [Rue78] (voir aussi [Rue04], [Put14], [Put15]).

# Espaces de Smale

La classe des espaces de Smale a été introduite par David Ruelle [Rue78] (voir aussi [Rue04], [Put14], [Put15]).

### Définition

Soit $X$ un espace compact métrisable équippé d'un homéomorphisme $f\colon X \to X$. On dit que $(X, f)$ est un espace de Smale s'il existe une métrique compatible $d$ sur $X$, des constantes $\varepsilon$, $\lambda$ avec $\varepsilon > 0$ et $0 < \lambda < 1$, et une application continue

$$[\cdot,\cdot]\colon \Delta_\varepsilon \coloneqq \{(x,y) \in X \times X : d(x,y) \leq \varepsilon\} \to X$$

vérifiant les conditions suivantes :

- S1 $[x,x] = x$ pour tout $x \in X$ ;
- S2 $[[x,y],z] = [x,z]$ si les deux membres sont définis ;
- S3 $[x,[y,z]] = [x,z]$ si les deux membres sont définis ;
- S4 $[f(x), f(y)] = f([x,y])$ si les deux membres sont définis ;
- S5 $d(f(y), f(z)) \leq \lambda d(y,z)$ si $(x,y),(x,z) \in \Delta_\varepsilon$ et $[y,x] = [z,x] = x$ ;
- S6 $d(f^{-1}(y), f^{-1}(z)) \leq \lambda d(y,z)$ si $(x,y),(x,z) \in \Delta_\varepsilon$ et $[x,y] = [x,z] = x$.

# Exemples d'espaces de Smale

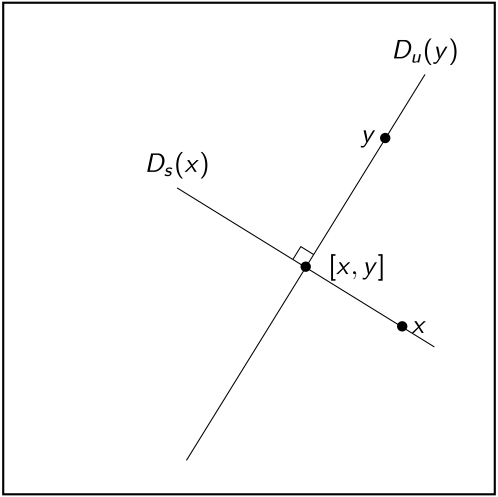
# Exemples d'espaces de Smale

**Exemple 9 (Chat d'Arnold)**

Le chat d'Arnold est un espace de Smale.

# Exemples d'espaces de Smale (suite)

# Exemples d'espaces de Smale (suite)



# Exemples d'espaces de Smale (suite)

# Exemples d'espaces de Smale (suite)

**Exemple 10 (Automorphisme hyperbolique du $n$-tore)**

De manière plus générale, soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ n'ayant aucune valeur propre complexe de module 1. Alors $M$ induit un homéomorphisme du tore $X := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ et $(X, f)$ est un espace de Smale.

# Exemples d'espaces de Smale (suite)

# Exemples d'espaces de Smale (suite)

Exemple 11 (Difféomorphisme d'Anosov)

De manière encore plus générale, soit $X$ une variété différentielle compacte munie d'un difféomorphisme d'Anosov $f \colon X \to X$.

# Exemples d'espaces de Smale (suite)

**Exemple 11 (Difféomorphisme d'Anosov)**

De manière encore plus générale, soit $X$ une variété différentielle compacte munie d'un difféomorphisme d'Anosov $f\colon X \to X$. Cela veut dire que $X$ est hyperbolique pour $f$, i.e., $TX = E_s \oplus E_u$, où $E_s$ et $E_u$ sont des sous-fibrés $df$-invariants, et il existe une métrique riemannienne sur $X$ et une constante $0 < \lambda < 1$ tels que

$$\forall v \in E_s, \forall w \in E_u, \quad \|df(v)\| \leq \lambda \|v\| \text{ et } \|df^{-1}(w)\| \leq \lambda \|w\|.$$

# Exemples d'espaces de Smale (suite)

Exemple 11 (Difféomorphisme d'Anosov)

De manière encore plus générale, soit $X$ une variété différentielle compacte munie d'un difféomorphisme d'Anosov $f\colon X \to X$. Cela veut dire que $X$ est hyperbolique pour $f$, i.e., $TX = E_s \oplus E_u$, où $E_s$ et $E_u$ sont des sous-fibrés $df$-invariants, et il existe une métrique riemannienne sur $X$ et une constante $0 < \lambda < 1$ tels que

$$\forall v \in E_s, \forall w \in E_u, \quad \|df(v)\| \leq \lambda \|v\| \text{ et } \|df^{-1}(w)\| \leq \lambda \|w\|.$$

Alors $(X, f)$ est un espace de Smale.

# Exemples d'espaces de Smale (suite)

## Exemples d'espaces de Smale (suite)

**Exemple 12 (Ensemble non-errant d'un difféomorphisme axiome A)**

Soit $f$ un difféomorphisme d'une variété différentielle compacte $X$ qui vérifie l'axiome A de Smale [Sma67].

# Exemples d'espaces de Smale (suite)

Exemple 12 (Ensemble non-errant d'un difféomorphisme axiome A)

Soit $f$ un difféomorphisme d'une variété différentielle compacte $X$ qui vérifie l'axiome A de Smale [Sma67]. Cela veut dire que l'ensemble non-errant $\Omega(X, f)$ est hyperbolique pour $f$ et que l'ensemble des points périodiques de $f$ est dense dans $\Omega(X, f)$.

# Exemples d'espaces de Smale (suite)

**Exemple 12 (Ensemble non-errant d'un difféomorphisme axiome A)**

Soit $f$ un difféomorphisme d'une variété différentielle compacte $X$ qui vérifie l'axiome A de Smale [Sma67]. Cela veut dire que l'ensemble non-errant $\Omega(X, f)$ est hyperbolique pour $f$ et que l'ensemble des points périodiques de $f$ est dense dans $\Omega(X, f)$. Alors $(\Omega(X, f), f)$ est un espace de Smale.

# Exemples d'espaces de Smale (suite)

### Exemple 12 (Ensemble non-errant d'un difféomorphisme axiome A)

Soit $f$ un difféomorphisme d'une variété différentielle compacte $X$ qui vérifie l'axiome A de Smale [Sma67]. Cela veut dire que l'ensemble non-errant $\Omega(X, f)$ est hyperbolique pour $f$ et que l'ensemble des points périodiques de $f$ est dense dans $\Omega(X, f)$. Alors $(\Omega(X, f), f)$ est un espace de Smale.

### Exemple 13 (Sous-décalage de type fini)

Soit $A$ un ensemble fini et $(X, f)$ un sous-décalage sur $A$.

# Exemples d'espaces de Smale (suite)

**Exemple 12 (Ensemble non-errant d'un difféomorphisme axiome A)**

Soit $f$ un difféomorphisme d'une variété différentielle compacte $X$ qui vérifie l'axiome A de Smale [Sma67]. Cela veut dire que l'ensemble non-errant $\Omega(X, f)$ est hyperbolique pour $f$ et que l'ensemble des points périodiques de $f$ est dense dans $\Omega(X, f)$. Alors $(\Omega(X, f), f)$ est un espace de Smale.

**Exemple 13 (Sous-décalage de type fini)**

Soit $A$ un ensemble fini et $(X, f)$ un sous-décalage sur $A$. On a

$$(X, f) \textit{ est un espace de Smale} \iff X \textit{ est de type fini.}$$

# Exemples d'espaces de Smale (suite)

**Exemple 12 (Ensemble non-errant d'un difféomorphisme axiome A)**

Soit $f$ un difféomorphisme d'une variété différentielle compacte $X$ qui vérifie l'axiome A de Smale [Sma67]. Cela veut dire que l'ensemble non-errant $\Omega(X, f)$ est hyperbolique pour $f$ et que l'ensemble des points périodiques de $f$ est dense dans $\Omega(X, f)$. Alors $(\Omega(X, f), f)$ est un espace de Smale.

**Exemple 13 (Sous-décalage de type fini)**

Soit $A$ un ensemble fini et $(X, f)$ un sous-décalage sur $A$. On a

$$(X, f) \textit{ est un espace de Smale} \iff X \textit{ est de type fini.}$$

Par exemple, le sous-décalage d'or est un espace de Smale mais le sous-décalage pair n'en est pas un.

# Théorème du jardin d'Éden pour les espaces de Smale irréductibles

# Théorème du jardin d'Éden pour les espaces de Smale irréductibles

**Théorème A ([CC25])**

*Tout espace de Smale irréductible vérifie Moore-Myhill.*

# Théorème du jardin d'Éden pour les espaces de Smale irréductibles

**Théorème A ([CC25])**

*Tout espace de Smale irréductible vérifie Moore-Myhill.*

**Corollaire (Fiorenzi [Fio00])**

*Tout sous-décalage irréductible de type fini vérifie Moore-Myhill.*

# Théorème du jardin d'Éden pour les espaces de Smale irréductibles

**Théorème A ([CC25])**

*Tout espace de Smale irréductible vérifie Moore-Myhill.*

**Corollaire (Fiorenzi [Fio00])**

*Tout sous-décalage irréductible de type fini vérifie Moore-Myhill.*

On ne sait pas si tout difféomorphisme d'Anosov est irréductible.

# Théorème du jardin d'Éden pour les espaces de Smale irréductibles

Théorème A ([CC25])

*Tout espace de Smale irréductible vérifie Moore-Myhill.*

Corollaire (Fiorenzi [Fio00])

*Tout sous-décalage irréductible de type fini vérifie Moore-Myhill.*

On ne sait pas si tout difféomorphisme d'Anosov est irréductible. Les seuls exemples connus de variétés compactes admettant des difféomorphismes d'Anosov sont les infra-nilvariétés (i.e., les quotients compacts d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe par un groupe discret sans torsion d'isométries).

# Théorème du jardin d'Éden pour les espaces de Smale irréductibles

**Théorème A ([CC25])**

*Tout espace de Smale irréductible vérifie Moore-Myhill.*

**Corollaire (Fiorenzi [Fio00])**

*Tout sous-décalage irréductible de type fini vérifie Moore-Myhill.*

On ne sait pas si tout difféomorphisme d'Anosov est irréductible. Les seuls exemples connus de variétés compactes admettant des difféomorphismes d'Anosov sont les infra-nilvariétés (i.e., les quotients compacts d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe par un groupe discret sans torsion d'isométries).
Manning [Man74] a démontré que tout difféomorphsme d'Anosov d'une infra-nilvariété est irréductible. On en déduit le résultat suivant obtenu dans [CC16] dans le cas particulier des tores.

# Théorème du jardin d'Éden pour les espaces de Smale irréductibles

**Théorème A ([CC25])**

*Tout espace de Smale irréductible vérifie Moore-Myhill.*

**Corollaire (Fiorenzi [Fio00])**

*Tout sous-décalage irréductible de type fini vérifie Moore-Myhill.*

On ne sait pas si tout difféomorphisme d'Anosov est irréductible. Les seuls exemples connus de variétés compactes admettant des difféomorphismes d'Anosov sont les infra-nilvariétés (i.e., les quotients compacts d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe par un groupe discret sans torsion d'isométries).
Manning [Man74] a démontré que tout difféomorphsme d'Anosov d'une infra-nilvariété est irréductible. On en déduit le résultat suivant obtenu dans [CC16] dans le cas particulier des tores.

**Corollaire ([CC25])**

*Tout difféomorphisme d'Anosov d'une infra-nilvariété vérifie Moore-Myhill.*

# Propriétés des espaces de Smale non-errants

# Propriétés des espaces de Smale non-errants

On dit qu'un système dynamique $(X, f)$ est surjonctif si tout endomorphisme injectif de $(X, f)$ est surjectif.

# Propriétés des espaces de Smale non-errants

On dit qu'un système dynamique $(X, f)$ est surjonctif si tout endomorphisme injectif de $(X, f)$ est surjectif.
On a trivialement

$$((X, f) \text{ vérifie Myhill}) \implies ((X, f) \text{ est surjonctif}).$$

# Propriétés des espaces de Smale non-errants

On dit qu'un système dynamique $(X, f)$ est surjonctif si tout endomorphisme injectif de $(X, f)$ est surjectif.
On a trivialement

$$((X, f) \text{ vérifie Myhill}) \implies ((X, f) \text{ est surjonctif}).$$

Théorème B ([CC25])

*Tout espace de Smale non-errant est surjonctif et vérifie Moore.*

# Quelques contre-exemples

# Quelques contre-exemples

### Exemple 14

Si $X$ est un espace discret réduit à deux points et $f$ est l'application identique de $X$, alors $(X, f)$ est un espace de Smale non-errant mais pas irréductible.

# Quelques contre-exemples

### Exemple 14

Si $X$ est un espace discret réduit à deux points et $f$ est l'application identique de $X$, alors $(X, f)$ est un espace de Smale non-errant mais pas irréductible. On peut vérifier directement que $(X, f)$ est surjonctif et que $(X, f)$ vérifie Moore mais pas Myhill.

# Quelques contre-exemples

### Exemple 14

Si $X$ est un espace discret réduit à deux points et $f$ est l'application identique de $X$, alors $(X, f)$ est un espace de Smale non-errant mais pas irréductible. On peut vérifier directement que $(X, f)$ est surjonctif et que $(X, f)$ vérifie Moore mais pas Myhill.

### Exemple 15

Considérons le sous-décalage de type fini sur l'alphabet $A := \{0, 1, 2\}$ défini par

$$X := \{x \in A^{\mathbb{Z}} : \forall i \in \mathbb{Z}, (x_i, x_{i+1}) \notin \{(2, 0), (2, 1)\}\}.$$

# Quelques contre-exemples

### Exemple 14

Si $X$ est un espace discret réduit à deux points et $f$ est l'application identique de $X$, alors $(X, f)$ est un espace de Smale non-errant mais pas irréductible. On peut vérifier directement que $(X, f)$ est surjonctif et que $(X, f)$ vérifie Moore mais pas Myhill.

### Exemple 15

Considérons le sous-décalage de type fini sur l'alphabet $A \coloneqq \{0, 1, 2\}$ défini par

$$X \coloneqq \{x \in A^{\mathbb{Z}} : \forall i \in \mathbb{Z}, (x_i, x_{i+1}) \notin \{(2, 0), (2, 1)\}\}.$$

L'endomorphisme $\tau$ de $X$ qui remplace $(0, 2)$ par $(0, 0)$ est injectif mais pas surjectif.

# Quelques contre-exemples

**Exemple 14**

Si $X$ est un espace discret réduit à deux points et $f$ est l'application identique de $X$, alors $(X, f)$ est un espace de Smale non-errant mais pas irréductible. On peut vérifier directement que $(X, f)$ est surjonctif et que $(X, f)$ vérifie Moore mais pas Myhill.

**Exemple 15**

Considérons le sous-décalage de type fini sur l'alphabet $A := \{0, 1, 2\}$ défini par

$$X := \{x \in A^{\mathbb{Z}} : \forall i \in \mathbb{Z}, (x_i, x_{i+1}) \notin \{(2, 0), (2, 1)\}\}.$$

L'endomorphisme $\tau$ de $X$ qui remplace $(0, 2)$ par $(0, 0)$ est injectif mais pas surjectif. L'endomorphisme $\tau'$ de $X$ qui remplace $(0, 2)$ par $(2, 2)$ est surjectif mais pas pré-injectif.

# Quelques contre-exemples

## Exemple 14

Si $X$ est un espace discret réduit à deux points et $f$ est l'application identique de $X$, alors $(X, f)$ est un espace de Smale non-errant mais pas irréductible. On peut vérifier directement que $(X, f)$ est surjonctif et que $(X, f)$ vérifie Moore mais pas Myhill.

## Exemple 15

Considérons le sous-décalage de type fini sur l'alphabet $A := \{0, 1, 2\}$ défini par

$$X := \{x \in A^{\mathbb{Z}} : \forall i \in \mathbb{Z}, (x_i, x_{i+1}) \notin \{(2,0), (2,1)\}\}.$$

L'endomorphisme $\tau$ de $X$ qui remplace $(0, 2)$ par $(0, 0)$ est injectif mais pas surjectif. L'endomorphisme $\tau'$ de $X$ qui remplace $(0, 2)$ par $(2, 2)$ est surjectif mais pas pré-injectif. Donc $(X, f)$ est un système dynamique qui n'est pas surjonctif (et donc ne vérifie pas Myhill) et qui ne vérifie pas Moore. C'est un espace de Smale mais il contient des points errants.

# Quelques contre-exemples (suite)

# Quelques contre-exemples (suite)

**Exemple 16**

Fiorenzi [Fio00] a démontré que le sous-décalage pair vérifie Myhill mais pas Moore.

# Quelques contre-exemples (suite)

Exemple 16

Fiorenzi [Fio00] a démontré que le sous-décalage pair vérifie Myhill mais pas Moore. Rappelons que ce n'est pas un espace de Smale puisque ce sous-décalage n'est pas de type fini.

# Esquisse de démonstration du théorème A

# Esquisse de démonstration du théorème A

Soit $(X, f)$ un espace de Smale irréductible.

# Esquisse de démonstration du théorème A

Soit $(X, f)$ un espace de Smale irréductible.
D'après le théorème de décomposition spectrale de Smale-Bowen-Ruelle, il existe un entier $s \geq 1$ et une famille $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}}$ de sous-ensembles fermés disjoints de $X$ telle que

$$X = \sqcup_{i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}} X_i,$$

$f(X_i) = X_{i+1}$ et telle que le système dynamique $(X_i, f^s)$ est un espace de Smale mélangeant pour tout $i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$.

# Esquisse de démonstration du théorème A

Soit $(X, f)$ un espace de Smale irréductible.
D'après le théorème de décomposition spectrale de Smale-Bowen-Ruelle, il existe un entier $s \geq 1$ et une famille $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}}$ de sous-ensembles fermés disjoints de $X$ telle que

$$X = \sqcup_{i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}} X_i,$$

$f(X_i) = X_{i+1}$ et telle que le système dynamique $(X_i, f^s)$ est un espace de Smale mélangeant pour tout $i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$.
En utilisant des partitions de Markov, on construit, pour tout $i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$, un sous-décalage mélangeant de type fini $(Y_i, g_i)$ dont $(X_i, f^s)$ est un facteur. Cela veut dire qu'il existe une application continue surjective $\pi_i \colon Y_i \to X_i$ telle que $\pi_i(g_i(y)) = f^s(\pi_i(y))$ pour tout $y \in Y_i$.

# Esquisse de démonstration du théorème A

Soit $(X, f)$ un espace de Smale irréductible.
D'après le théorème de décomposition spectrale de Smale-Bowen-Ruelle, il existe un entier $s \geq 1$ et une famille $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}}$ de sous-ensembles fermés disjoints de $X$ telle que

$$X = \sqcup_{i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}} X_i,$$

$f(X_i) = X_{i+1}$ et telle que le système dynamique $(X_i, f^s)$ est un espace de Smale mélangeant pour tout $i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$.
En utilisant des partitions de Markov, on construit, pour tout $i \in \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$, un sous-décalage mélangeant de type fini $(Y_i, g_i)$ dont $(X_i, f^s)$ est un facteur. Cela veut dire qu'il existe une application continue surjective $\pi_i \colon Y_i \to X_i$ telle que $\pi_i(g_i(y)) = f^s(\pi_i(y))$ pour tout $y \in Y_i$.
Un théorème du jardin d'Éden dû à Li [Li19] et Doucha [Dou23] montre alors que $(X_i, f^s)$ vérifie Moore-Myhill. On en déduit alors que $(X, f^s)$ et donc $(X, f)$ vérifient Moore-Myhill.

# Références I

[CC16] T. Ceccherini-Silberstein et M. Coornaert, “A garden of Eden theorem for Anosov diffeomorphisms on tori”, in : *Topology Appl.* 212 (2016), p. 49-56, issn : 0166-8641,1879-3207, doi : 10.1016/j.topol.2016.08.025, url : https://doi.org/10.1016/j.topol.2016.08.025.

[CC25] T. Ceccherini-Silberstein et M. Coornaert, “A Garden of Eden theorem for Smale spaces”, in : *arXiv:2505.14409* (2025), à paraître dans Moscow Mathematical Journal.

[Dou23] M. Doucha, “Garden of Eden and weakly periodic points for certain expansive actions of groups”, in : *Ergodic Theory Dynam. Systems* 43.7 (2023), p. 2354-2375, issn : 0143-3857,1469-4417, doi : 10.1017/etds.2022.37, url : https://doi.org/10.1017/etds.2022.37.

[Fio00] F. Fiorenzi, “The Garden of Eden theorem for sofic shifts”, in : *Pure Math. Appl.* 11.3 (2000), p. 471-484, issn : 1218-4586.

# Références II


[Li19] Hanfeng Li, "Garden of Eden and specification", in : *Ergodic Theory Dynam. Systems* 39.11 (2019), p. 3075-3088, issn : 0143-3857,1469-4417, doi : `10.1017/etds.2018.6`, url : `https://doi.org/10.1017/etds.2018.6`.

[Man74] A. Manning, "There are no new Anosov diffeomorphisms on tori", in : *Amer. J. Math.* 96 (1974), p. 422-429, issn : 0002-9327.

[Moo63] E. F. Moore, "Machine Models of Self-Reproduction", in : t. 14, Proc. Symp. Appl. Math. Providence : American Mathematical Society, 1963, p. 17-34.

[Myh63] John Myhill, "The converse of Moore's Garden-of-Eden theorem", in : *Proc. Amer. Math. Soc.* 14 (1963), p. 685-686, issn : 0002-9939.

[Put14] I. F. Putnam, "A homology theory for Smale spaces", in : *Mem. Amer. Math. Soc.* 232.1094 (2014), p. viii+122, issn : 0065-9266,1947-6221, doi : `10.1090/memo/1094`, url : `https://doi.org/10.1090/memo/1094`.

# Références III


[Put15] I. F. Putnam, “Lecture notes on Smale spaces”, in : (2015), url : http://www.math.uvic.ca/faculty/putnam/ln/Smale_spaces.pdf.

[Rue04] D. Ruelle, *Thermodynamic formalism*, Second, Cambridge Mathematical Library, The mathematical structures of equilibrium statistical mechanics, Cambridge University Press, Cambridge, 2004, p. xx+174, isbn : 0-521-54649-4, doi : 10.1017/CBO9780511617546, url : https://doi.org/10.1017/CBO9780511617546.

[Rue78] D. Ruelle, *Thermodynamic formalism*, t. 5, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, The mathematical structures of classical equilibrium statistical mechanics, With a foreword by Giovanni Gallavotti and Gian-Carlo Rota, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, 1978, p. xix+183, isbn : 0-201-13504-3.

[Sma67] S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, in : *Bull. Amer. Math. Soc.* 73 (1967), p. 747-817, issn : 0002-9904.