Finitude stable des anneaux de groupes surjonctifs

Michel Coornaert

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université de Strasbourg

Finitude stable des anneaux de groupes surjonctifs

En collaboration avec Tullio Ceccherini-Silberstein et Xuan Kien Phung [CCP23].

Anneaux stablement finis

Définition

On dit qu'un anneau R est directement fini si

$$\forall a, b \in R, \quad ab = 1 \implies ba = 1.$$

Anneaux stablement finis

Définition

On dit qu'un anneau R est directement fini si

$$\forall a, b \in R, \quad ab = 1 \implies ba = 1.$$

Définition

On dit qu'un anneau R est stablement fini si l'anneau $\mathrm{Mat}_d(R)$ (anneau des matrices $d \times d$ à coefficients dans R) est directement fini pour tout entier $d \geq 1$.

Exemples d'anneaux stablement finis

- Tout anneau fini est stablement fini.

Exemples d'anneaux stablement finis

- Tout anneau fini est stablement fini.
- Tout anneau commutatif est stablement fini.

Exemples d'anneaux stablement finis

- Tout anneau fini est stablement fini.
- Tout anneau commutatif est stablement fini.
- Tout corps est stablement fini.

Exemples d'anneaux stablement finis

- Tout anneau fini est stablement fini.
- Tout anneau commutatif est stablement fini.
- Tout corps est stablement fini.
- Tout anneau à division est stablement fini.

Exemples d'anneaux stablement finis

- Tout anneau fini est stablement fini.
- Tout anneau commutatif est stablement fini.
- Tout corps est stablement fini.
- Tout anneau à division est stablement fini.
- Tout anneau noethérien d'un côté est stablement fini.

Exemples d'anneaux stablement finis

- Tout anneau fini est stablement fini.
- Tout anneau commutatif est stablement fini.
- Tout corps est stablement fini.
- Tout anneau à division est stablement fini.
- Tout anneau noethérien d'un côté est stablement fini.
- Si V est un espace vectoriel sur un corps K alors $\mathrm{End}_K(V)$ est stablement fini si et seulement si $\dim_K(V) < \infty$.

Exemples d'anneaux stablement finis

- Tout anneau fini est stablement fini.
- Tout anneau commutatif est stablement fini.
- Tout corps est stablement fini.
- Tout anneau à division est stablement fini.
- Tout anneau noethérien d'un côté est stablement fini.
- Si V est un espace vectoriel sur un corps K alors $\mathrm{End}_K(V)$ est stablement fini si et seulement si $\dim_K(V) < \infty$.
- Il existe des anneaux qui sont directement finis mais pas stablement finis (voir l'exercice 1.18 dans [Lam07]).

Anneaux de groupes

Soit G un groupe et K un corps.

Anneaux de groupes

Soit G un groupe et K un corps. Alors

$$K^G := \{\alpha\colon G \to K\}$$

est un K-espace vectoriel.

Anneaux de groupes

Soit G un groupe et K un corps. Alors

$$K^G \coloneqq \{\alpha\colon G \to K\}$$

est un K-espace vectoriel.
Le support de $\alpha \in K^G$ est

$$\mathrm{supp}(\alpha) \coloneqq \{g \in G : \alpha(g) \neq 0\} \subset G.$$

Anneaux de groupes

Soit G un groupe et K un corps. Alors

$$K^G := \{\alpha\colon G \to K\}$$

est un K-espace vectoriel.
Le support de $\alpha \in K^G$ est

$$\mathrm{supp}(\alpha) := \{g \in G : \alpha(g) \neq 0\} \subset G.$$

On considère le sous-espace vectoriel $K[G] \subset K^G$ défini par

$$K[G] := \{\alpha \in K^G : |\mathrm{supp}(\alpha)| < \infty\}.$$

Anneaux de groupes

Soit G un groupe et K un corps. Alors

$$K^G := \{\alpha\colon G \to K\}$$

est un K-espace vectoriel.
Le support de $\alpha \in K^G$ est

$$\mathrm{supp}(\alpha) := \{g \in G : \alpha(g) \neq 0\} \subset G.$$

On considère le sous-espace vectoriel $K[G] \subset K^G$ défini par

$$K[G] := \{\alpha \in K^G : |\,\mathrm{supp}(\alpha)| < \infty\}.$$

Le produit de convolution de $\alpha, \beta \in K[G]$ est $\alpha\beta \in K[G]$ donné par

$$\forall g \in G, \quad (\alpha\beta)(g) := \sum_{\substack{h_1, h_2 \in G \\ h_1 h_2 = g}} \alpha(h_1)\beta(h_2).$$

Anneaux de groupes

Soit G un groupe et K un corps. Alors

$$K^G := \{\alpha \colon G \to K\}$$

est un K-espace vectoriel.
Le support de $\alpha \in K^G$ est

$$\operatorname{supp}(\alpha) := \{g \in G : \alpha(g) \neq 0\} \subset G.$$

On considère le sous-espace vectoriel $K[G] \subset K^G$ défini par

$$K[G] := \{\alpha \in K^G : |\operatorname{supp}(\alpha)| < \infty\}.$$

Le produit de convolution de $\alpha, \beta \in K[G]$ est $\alpha\beta \in K[G]$ donné par

$$\forall g \in G, \quad (\alpha\beta)(g) := \sum_{\substack{h_1, h_2 \in G \\ h_1 h_2 = g}} \alpha(h_1)\beta(h_2).$$

Avec le produit de convolution, $K[G]$ est une K-algèbre et donc un anneau. On dit que c'est l'anneau du groupe G à coefficients dans K.

Anneaux de groupes (suite)

Pour $g \in G$, soit $\delta_g \in K[G]$ défini par

$$\forall h \in G, \quad \delta_g(h) := \begin{cases} 1 & \text{si } h = g, \\ 0 & \text{si } h \neq g. \end{cases}$$

Anneaux de groupes (suite)

Pour $g \in G$, soit $\delta_g \in K[G]$ défini par

$$\forall h \in G, \quad \delta_g(h) := \begin{cases} 1 & \text{si } h = g, \\ 0 & \text{si } h \neq g. \end{cases}$$

$$\forall \alpha \in K[G], \quad \alpha = \sum_{g \in G} \alpha(g)\delta_g.$$

Anneaux de groupes (suite)

Pour $g \in G$, soit $\delta_g \in K[G]$ défini par

$$\forall h \in G, \quad \delta_g(h) := \begin{cases} 1 & \text{si } h = g, \\ 0 & \text{si } h \neq g. \end{cases}$$

$$\forall \alpha \in K[G], \quad \alpha = \sum_{g \in G} \alpha(g)\delta_g.$$

$(\delta_g)_{g \in G}$ est une base de $K[G]$.

Anneaux de groupes (suite)

Pour $g \in G$, soit $\delta_g \in K[G]$ défini par

$$\forall h \in G, \quad \delta_g(h) := \begin{cases} 1 & \text{si } h = g, \\ 0 & \text{si } h \neq g. \end{cases}$$

$$\forall \alpha \in K[G], \quad \alpha = \sum_{g \in G} \alpha(g)\delta_g.$$

$(\delta_g)_{g \in G}$ est une base de $K[G]$. On a

$$\forall g, h \in G, \quad \delta_g \delta_h = \delta_{gh} \text{ et } \delta_{1_G} = 1.$$

Anneaux de groupes (suite)

Pour $g \in G$, soit $\delta_g \in K[G]$ défini par

$$\forall h \in G, \quad \delta_g(h) := \begin{cases} 1 & \text{si } h = g, \\ 0 & \text{si } h \neq g. \end{cases}$$

$$\forall \alpha \in K[G], \quad \alpha = \sum_{g \in G} \alpha(g)\delta_g.$$

$(\delta_g)_{g \in G}$ est une base de $K[G]$. On a

$$\forall g, h \in G, \quad \delta_g \delta_h = \delta_{gh} \text{ et } \delta_{1_G} = 1.$$

$g \mapsto \delta_g$ est un plongement du groupe G dans le groupe des unités de $K[G]$.

Anneaux de groupes (suite)

Pour $g \in G$, soit $\delta_g \in K[G]$ défini par

$$\forall h \in G, \quad \delta_g(h) := \begin{cases} 1 & \text{si } h = g, \\ 0 & \text{si } h \neq g. \end{cases}$$

$$\forall \alpha \in K[G], \quad \alpha = \sum_{g \in G} \alpha(g)\delta_g.$$

$(\delta_g)_{g \in G}$ est une base de $K[G]$. On a

$$\forall g, h \in G, \quad \delta_g \delta_h = \delta_{gh} \text{ et } \delta_{1_G} = 1.$$

$g \mapsto \delta_g$ est un plongement du groupe G dans le groupe des unités de $K[G]$.

$$\forall \alpha, \beta \in K[G], \quad \alpha\beta = \sum_{g,h \in G} \alpha(g)\beta(h)\delta_{gh}.$$

Finitude stable des anneaux de groupes en caractéristique 0

Théorème (Kaplansky [Kap69])

Soit G un groupe et K un corps de caractéristique 0. Alors l'anneau $K[G]$ est stablement fini.

Dynamique symbolique

Soit G un groupe et A un ensemble fini.

Dynamique symbolique

Soit G un groupe et A un ensemble fini. On munit l'ensemble

$$A^G := \{x \colon G \to A\}$$

Dynamique symbolique

Soit G un groupe et A un ensemble fini. On munit l'ensemble

$$A^G := \{x\colon G \to A\}$$

du G-décalage et de la topologie prodiscrète définis comme suit.

Dynamique symbolique

Soit G un groupe et A un ensemble fini. On munit l'ensemble

$$A^G := \{x\colon G \to A\}$$

du G-décalage et de la topologie prodiscrète définis comme suit. Le G-décalage est l'action à gauche donnée par :

$$\begin{aligned} G \times A^G &\to A^G \\ (g, x) &\mapsto gx := x \circ L_{g^{-1}} \end{aligned}$$

où $L_{g^{-1}}\colon G \to G$ est la multiplication à gauche par g^{-1}.

Dynamique symbolique

Soit G un groupe et A un ensemble fini. On munit l'ensemble

$$A^G := \{x \colon G \to A\}$$

du G-décalage et de la topologie prodiscrète définis comme suit. Le G-décalage est l'action à gauche donnée par :

$$\begin{aligned} G \times A^G &\to A^G \\ (g, x) &\mapsto gx := x \circ L_{g^{-1}} \end{aligned}$$

où $L_{g^{-1}} \colon G \to G$ est la multiplication à gauche par g^{-1}.
La topologie prodiscrète sur A^G est la topologie produit obtenue en prenant la topologie discrète sur chaque facteur A de A^G.

Dynamique symbolique

Soit G un groupe et A un ensemble fini. On munit l'ensemble

$$A^G := \{x \colon G \to A\}$$

du G-décalage et de la topologie prodiscrète définis comme suit. Le G-décalage est l'action à gauche donnée par :

$$\begin{aligned} G \times A^G &\to A^G \\ (g, x) &\mapsto gx := x \circ L_{g^{-1}} \end{aligned}$$

où $L_{g^{-1}} \colon G \to G$ est la multiplication à gauche par g^{-1}.
La topologie prodiscrète sur A^G est la topologie produit obtenue en prenant la topologie discrète sur chaque facteur A de A^G. Le G-décalage sur A^G est continu. L'espace A^G est homéomorphe à l'ensemble de Cantor pour $|A| \geq 2$ et G infini dénombrable.

Groupes surjonctifs

Les groupes surjonctifs ont été introduits par Gottschalk [Got73].

Définition

On dit qu'un groupe G est surjonctif si, pour tout ensemble fini A et pour toute application continue et G-équivariante $\tau\colon A^G \to A^G$, on a

$$\tau \text{ injective} \implies \tau \text{ surjective.}$$

Groupes surjonctifs

Les groupes surjonctifs ont été introduits par Gottschalk [Got73].

Définition

On dit qu'un groupe G est surjonctif si, pour tout ensemble fini A et pour toute application continue et G-équivariante $\tau\colon A^G \to A^G$, on a

$$\tau \text{ injective } \implies \tau \text{ surjective.}$$

On ne sait pas s'il existe des groupes qui ne sont pas surjonctifs.

Groupes sofiques

Les groupes sofiques ont été introduits par Gromov [Gro99] et Weiss [Wei00].

Groupes sofiques

Les groupes sofiques ont été introduits par Gromov [Gro99] et Weiss [Wei00]. En gros, un groupe est sofique s'il peut être « bien approché » par des groupes symétriques finis.

Groupes sofiques

Les groupes sofiques ont été introduits par Gromov [Gro99] et Weiss [Wei00].
En gros, un groupe est sofique s'il peut être « bien approché » par des groupes symétriques finis.
Tout groupe fini, tout groupe résiduellement fini, tout groupe commutatif, tout groupe nilpotent, tout groupe résoluble, tout groupe moyennable, tout groupe résiduellement moyennable, tout groupe linéaire est sofique.

Groupes sofiques

Les groupes sofiques ont été introduits par Gromov [Gro99] et Weiss [Wei00].
En gros, un groupe est sofique s'il peut être « bien approché » par des groupes symétriques finis.
Tout groupe fini, tout groupe résiduellement fini, tout groupe commutatif, tout groupe nilpotent, tout groupe résoluble, tout groupe moyennable, tout groupe résiduellement moyennable, tout groupe linéaire est sofique.
On ne sait pas s'il existe des groupes qui ne sont pas sofiques.

Groupes sofiques

Les groupes sofiques ont été introduits par Gromov [Gro99] et Weiss [Wei00].
En gros, un groupe est sofique s'il peut être « bien approché » par des groupes symétriques finis.
Tout groupe fini, tout groupe résiduellement fini, tout groupe commutatif, tout groupe nilpotent, tout groupe résoluble, tout groupe moyennable, tout groupe résiduellement moyennable, tout groupe linéaire est sofique.
On ne sait pas s'il existe des groupes qui ne sont pas sofiques.

Théorème (Gromov [Gro99] et Weiss [Wei00])

Tout groupe sofique est surjonctif.

Définition des groupes sofiques

Étant donné un ensemble fini non vide X, on note $\mathrm{Sym}(X)$ le groupe symétrique de X et on définit la distance de Hamming d_X sur $\mathrm{Sym}(X)$ par

$$\forall \sigma, \eta \in \mathrm{Sym}(X), \quad d_X(\sigma, \eta) := \frac{|\{x \in X : \sigma(x) \neq \eta(x)\}|}{|X|}.$$

Définition des groupes sofiques

Étant donné un ensemble fini non vide X, on note $\mathrm{Sym}(X)$ le groupe symétrique de X et on définit la distance de Hamming d_X sur $\mathrm{Sym}(X)$ par

$$\forall \sigma, \eta \in \mathrm{Sym}(X), \quad d_X(\sigma, \eta) := \frac{|\{x \in X : \sigma(x) \neq \eta(x)\}|}{|X|}.$$

Définition

On dit qu'un groupe G est sofique si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout sous-ensemble fini $F \subset G$, il existe un ensemble fini non vide X et une application $\phi \colon F \to \mathrm{Sym}(X)$ telle que

- $\forall g, h \in F, \quad gh \in F \implies d_X(\phi(gh), \phi(g)\phi(h)) \leq \varepsilon$;
- $\forall g, h \in F, \quad g \neq h \implies d_X(\phi(g), \phi(h)) \geq 1 - \varepsilon$.

Finitude stable des anneaux de groupes surjonctifs

Le résultat suivant a été obtenu par Xuan Kien Phung en utilisant de la géométrie algébrique.

Finitude stable des anneaux de groupes surjonctifs

Le résultat suivant a été obtenu par Xuan Kien Phung en utilisant de la géométrie algébrique.

Théorème A (Phung [Phu23a])

Soit G un groupe surjonctif et K un corps. Alors l'anneau $K[G]$ est stablement fini.

Finitude stable des anneaux de groupes surjonctifs

Le résultat suivant a été obtenu par Xuan Kien Phung en utilisant de la géométrie algébrique.

Théorème A (Phung [Phu23a])

Soit G un groupe surjonctif et K un corps. Alors l'anneau $K[G]$ est stablement fini.

Corollaire (Elek et Szabó [ES04])

Soit G un groupe sofique et K un corps. Alors l'anneau $K[G]$ est stablement fini.

Corps élémentairement équivalents

On dit que deux corps sont élémentairement équivalents s'ils vérifient les mêmes énoncés du premier ordre dans le langage des anneaux $L = \{+, -, \times, 0, 1\}$.

Corps élémentairement équivalents

On dit que deux corps sont élémentairement équivalents s'ils vérifient les mêmes énoncés du premier ordre dans le langage des anneaux $L = \{+, -, \times, 0, 1\}$.

Exemples

- L'énoncé $\forall x, \exists y, x = y^3$ est vérifié par $\mathbb{R}$ mais pas par $\mathbb{Q}$. Donc $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont pas élémentairement équivalents.

Corps élémentairement équivalents

On dit que deux corps sont élémentairement équivalents s'ils vérifient les mêmes énoncés du premier ordre dans le langage des anneaux $L = \{+, -, \times, 0, 1\}$.

Exemples

- L'énoncé $\forall x, \exists y, x = y^3$ est vérifié par $\mathbb{R}$ mais pas par $\mathbb{Q}$. Donc $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont pas élémentairement équivalents.
- Deux corps isomorphes sont toujours élémentairement équivalents.

Corps élémentairement équivalents

On dit que deux corps sont élémentairement équivalents s'ils vérifient les mêmes énoncés du premier ordre dans le langage des anneaux $L = \{+, -, \times, 0, 1\}$.

Exemples

- L'énoncé $\forall x, \exists y, x = y^3$ est vérifié par $\mathbb{R}$ mais pas par $\mathbb{Q}$. Donc $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont pas élémentairement équivalents.
- Deux corps isomorphes sont toujours élémentairement équivalents.
- Si deux corps n'ont pas la même caractéristique, alors ils ne sont pas élémentairement équivalents.

Principes de Lefschetz

Une référence pour les résultats suivants est le livre de Marker [Mar02].

Principes de Lefschetz

Une référence pour les résultats suivants est le livre de Marker [Mar02].

Théorème (Premier principe de Lefschetz)

Deux corps algébriquement clos de même caractéristique sont élémentairement équivalents.

Principes de Lefschetz

Une référence pour les résultats suivants est le livre de Marker [Mar02].

Théorème (Premier principe de Lefschetz)

Deux corps algébriquement clos de même caractéristique sont élémentairement équivalents.

Exemple

Soit $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$. Les corps $\overline{\mathbb{Q}}$ et $\mathbb{C}$ sont élémentairement équivalents.
Les corps $\overline{\mathbb{Q}}$ et $\mathbb{C}$ ne sont pas isomorphes puisque $\overline{\mathbb{Q}}$ est dénombrable mais pas $\mathbb{C}$.

Principes de Lefschetz

Une référence pour les résultats suivants est le livre de Marker [Mar02].

Théorème (Premier principe de Lefschetz)

Deux corps algébriquement clos de même caractéristique sont élémentairement équivalents.

Exemple

Soit $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$. Les corps $\overline{\mathbb{Q}}$ et $\mathbb{C}$ sont élémentairement équivalents.
Les corps $\overline{\mathbb{Q}}$ et $\mathbb{C}$ ne sont pas isomorphes puisque $\overline{\mathbb{Q}}$ est dénombrable mais pas $\mathbb{C}$.

Théorème (Second principe de Lefschetz)

Soit ψ un énoncé du premier ordre dans le langage des anneaux qui est vérifié par un corps algébriquement clos de caractéristique 0 (et donc par tous les corps algébriquement clos de caractéristique 0). Alors il existe un entier N tel que ψ est vérifié par tous les corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq N$.

Preuve du théorème A

Lemme

Soit G un groupe, $d \geq 1$ un entier, et S un sous-ensemble fini de G. Alors il existe un énoncé du premier ordre $\psi_{d,S}$ dans le langage des anneaux tel que un corps K vérifie $\psi_{d,S}$ si et seulement si il existe des matrices $A, B \in \mathrm{Mat}_d(K[G])$ telles que

1. *le support de chaque coefficient de A et de chaque coefficient de B est contenu dans S ;*
2. *$AB = 1$ et $BA \neq 1$.*

Preuve du théorème A (suite)

On se donne un groupe surjonctif G et un corps K.

Preuve du théorème A (suite)

On se donne un groupe surjonctif G et un corps K. On veut montrer que $K[G]$ est stablement fini.

Preuve du théorème A (suite)

On se donne un groupe surjonctif G et un corps K. On veut montrer que $K[G]$ est stablement fini.

Cas 1 : K est fini

Preuve du théorème A (suite)

On se donne un groupe surjonctif G et un corps K. On veut montrer que $K[G]$ est stablement fini.

Cas 1 : K est fini Soit $d \geq 1$. Posons $A \coloneqq K^d$.

Preuve du théorème A (suite)

On se donne un groupe surjonctif G et un corps K. On veut montrer que $K[G]$ est stablement fini.

Cas 1 : K est fini Soit $d \geq 1$. Posons $A \coloneqq K^d$. Un résultat dans [CC07] dit que $\mathrm{Mat}_d(K[G])$ est directement fini si et seulement si toute application K-linéaire, injective, G-équivariante et continue $\tau \colon A^G \to A^G$ est surjective.

Preuve du théorème A (suite)

On se donne un groupe surjonctif G et un corps K. On veut montrer que $K[G]$ est stablement fini.

Cas 1 : K est fini Soit $d \geq 1$. Posons $A \coloneqq K^d$. Un résultat dans [CC07] dit que $\mathrm{Mat}_d(K[G])$ est directement fini si et seulement si toute application K-linéaire, injective, G-équivariante et continue $\tau\colon A^G \to A^G$ est surjective. Comme A est fini (de cardinal $|A| = |K|^d$), toute application injective, G-équivariante et continue $\tau\colon A^G \to A^G$ est surjective puisque le groupe G est surjonctif.

Preuve du théorème A (suite)

On se donne un groupe surjonctif G et un corps K. On veut montrer que $K[G]$ est stablement fini.

Cas 1 : K est fini Soit $d \geq 1$. Posons $A := K^d$. Un résultat dans [CC07] dit que $\mathrm{Mat}_d(K[G])$ est directement fini si et seulement si toute application K-linéaire, injective, G-équivariante et continue $\tau\colon A^G \to A^G$ est surjective. Comme A est fini (de cardinal $|A| = |K|^d$), toute application injective, G-équivariante et continue $\tau\colon A^G \to A^G$ est surjective puisque le groupe G est surjonctif. Donc $\mathrm{Mat}_d(K[G])$ est directement fini.

Preuve du théorème A (suite)

Cas 2 : K est la clôture algébrique de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier

Preuve du théorème A (suite)

Cas 2 : K est la clôture algébrique de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier On considère l'automorphisme de Frobenius $\phi\colon K \to K$ défini par

$$\forall \lambda \in K, \quad \phi(\lambda) \coloneqq \lambda^p$$

Preuve du théorème A (suite)

Cas 2 : K est la clôture algébrique de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier On considère l'automorphisme de Frobenius ϕ: $K \to K$ défini par

$$\forall \lambda \in K, \quad \phi(\lambda) := \lambda^p$$

Pour $n \geq 1$, soit $K_n \subset K$ défini par

$$K_n := \mathrm{Fix}(\underbrace{\phi \circ \phi \circ \cdots \circ \phi}_{n \text{ fois}}).$$

Preuve du théorème A (suite)

- K_n est l'ensemble des zéros du polynôme $X^{p^n} - X$.

Preuve du théorème A (suite)

- K_n est l'ensemble des zéros du polynôme $X^{p^n} - X$.
- K_n est un sous-corps de K de cardinal p^n.

Preuve du théorème A (suite)

- K_n est l'ensemble des zéros du polynôme $X^{p^n} - X$.
- K_n est un sous-corps de K de cardinal p^n.
- $K_n \subset K_m$ si n divise m.

Preuve du théorème A (suite)

- K_n est l'ensemble des zéros du polynôme $X^{p^n} - X$.
- K_n est un sous-corps de K de cardinal p^n.
- $K_n \subset K_m$ si n divise m.
- $K = \bigcup_{n \geq 1} K_n$.

Preuve du théorème A (suite)

- K_n est l'ensemble des zéros du polynôme $X^{p^n} - X$.
- K_n est un sous-corps de K de cardinal p^n.
- $K_n \subset K_m$ si n divise m.
- $K = \bigcup_{n \geq 1} K_n$.

Donc K est la réunion croissante des sous-corps finis $L_n \coloneqq K_{n!}$, $n \geq 1$.

Preuve du théorème A (suite)

- K_n est l'ensemble des zéros du polynôme $X^{p^n} - X$.
- K_n est un sous-corps de K de cardinal p^n.
- $K_n \subset K_m$ si n divise m.
- $K = \bigcup_{n \geq 1} K_n$.

Donc K est la réunion croissante des sous-corps finis $L_n := K_{n!}$, $n \geq 1$.
Soient $A, B \in \mathrm{Mat}_d(K[G])$ tels que $AB = 1$.

Preuve du théorème A (suite)

- K_n est l'ensemble des zéros du polynôme $X^{p^n} - X$.
- K_n est un sous-corps de K de cardinal p^n.
- $K_n \subset K_m$ si n divise m.
- $K = \bigcup_{n \geq 1} K_n$.

Donc K est la réunion croissante des sous-corps finis $L_n := K_{n!}$, $n \geq 1$.
Soient $A, B \in \mathrm{Mat}_d(K[G])$ tels que $AB = 1$. Il existe $n_0 \geq 1$ tel que $A, B \in \mathrm{Mat}_d(L_{n_0}[G])$.

Preuve du théorème A (suite)

- K_n est l'ensemble des zéros du polynôme $X^{p^n} - X$.
- K_n est un sous-corps de K de cardinal p^n.
- $K_n \subset K_m$ si n divise m.
- $K = \bigcup_{n \geq 1} K_n$.

Donc K est la réunion croissante des sous-corps finis $L_n := K_{n!}$, $n \geq 1$. Soient $A, B \in \mathrm{Mat}_d(K[G])$ tels que $AB = 1$. Il existe $n_0 \geq 1$ tel que $A, B \in \mathrm{Mat}_d(L_{n_0}[G])$. On a donc $BA = 1$ d'après le cas 1.

Preuve du théorème A (suite)

Cas 3 : K est un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$

Preuve du théorème A (suite)

Cas 3 : K est un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ Résulte du lemme, du cas 2, et du premier principe de Lefschetz.

Preuve du théorème A (suite)

Cas 3 : K est un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ Résulte du lemme, du cas 2, et du premier principe de Lefschetz.

Cas 4 : K est un corps algébriquement clos de caractéristique 0

Preuve du théorème A (suite)

Cas 3 : K est un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ Résulte du lemme, du cas 2, et du premier principe de Lefschetz.

Cas 4 : K est un corps algébriquement clos de caractéristique 0 Résulte du lemme, du cas 3, et du second principe de Lefschetz.

Preuve du théorème A (suite)

Cas 3 : K est un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ Résulte du lemme, du cas 2, et du premier principe de Lefschetz.

Cas 4 : K est un corps algébriquement clos de caractéristique 0 Résulte du lemme, du cas 3, et du second principe de Lefschetz.

Cas 5 : K est un corps quelconque

Preuve du théorème A (suite)

Cas 3 : K est un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ Résulte du lemme, du cas 2, et du premier principe de Lefschetz.

Cas 4 : K est un corps algébriquement clos de caractéristique 0 Résulte du lemme, du cas 3, et du second principe de Lefschetz.

Cas 5 : K est un corps quelconque On considère la clôture algébrique L de K.

Preuve du théorème A (suite)

Cas 3 : K est un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ Résulte du lemme, du cas 2, et du premier principe de Lefschetz.

Cas 4 : K est un corps algébriquement clos de caractéristique 0 Résulte du lemme, du cas 3, et du second principe de Lefschetz.

Cas 5 : K est un corps quelconque On considère la clôture algébrique L de K. L'anneau $L[G]$ est stablement fini d'après les cas 3 et 4.

Preuve du théorème A (suite)

Cas 3 : K est un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ Résulte du lemme, du cas 2, et du premier principe de Lefschetz.

Cas 4 : K est un corps algébriquement clos de caractéristique 0 Résulte du lemme, du cas 3, et du second principe de Lefschetz.

Cas 5 : K est un corps quelconque On considère la clôture algébrique L de K. L'anneau $L[G]$ est stablement fini d'après les cas 3 et 4. Comme $K[G] \subset L[G]$, on en déduit que $K[G]$ est stablement fini.

Références I

[BF22] Henry Bradford et Francesco Fournier-Facio, “Hopfian wreath products and the stable finiteness conjecture”, in : *arXiv:2211.01510* (2022).

[CC07] T. Ceccherini-Silberstein et M. Coornaert, “Injective linear cellular automata and sofic groups”, in : *Israel J. Math.* 161 (2007), p. 1-15, issn : 0021-2172, doi : `10.1007/s11856-007-0069-8`, url : `http://dx.doi.org/10.1007/s11856-007-0069-8`.

[CC10] T. Ceccherini-Silberstein et M. Coornaert, *Cellular automata and groups*, Springer Monographs in Mathematics, Berlin : Springer-Verlag, 2010, p. xx+439, isbn : 978-3-642-14033-4, doi : `10.1007/978-3-642-14034-1`, url : `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-14034-1`.

[CC23] T. Ceccherini-Silberstein et M. Coornaert, *Exercises in cellular automata and groups*, Springer Monographs in Mathematics, Berlin : Springer-Verlag, 2023.

Références II

[CCP23] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert et Xuan Kien Phung, "First-order model theory and Kaplansky's stable finiteness conjecture", in : *arXiv:2310.09451* (2023).

[CL15] V. Capraro et M. Lupini, *Introduction to sofic and hyperlinear groups and Connes' embedding conjecture*, t. 2136, Lecture Notes in Mathematics, With an appendix by Vladimir Pestov, Springer, Cham, 2015, p. viii+151, isbn : 978-3-319-19332-8; 978-3-319-19333-5, doi : 10.1007/978-3-319-19333-5, url : https://doi.org/10.1007/978-3-319-19333-5.

[DJ15] Ken Dykema et Kate Juschenko, "On stable finiteness of group rings", in : *Algebra Discrete Math.* 19.1 (2015), p. 44-47, issn : 1726-3255,2415-721X.

[ES04] G. Elek et E. Szabó, "Sofic groups and direct finiteness", in : *J. Algebra* 280.2 (2004), p. 426-434, issn : 0021-8693, doi : 10.1016/j.jalgebra.2004.06.023, url : http://dx.doi.org/10.1016/j.jalgebra.2004.06.023.

Références III

[Gar21] G. Gardam, “A counterexample to the unit conjecture for group rings”, in : *Ann. of Math. (2)* 194.3 (2021), p. 967-979, issn : 0003-486X, doi : 10.4007/annals.2021.194.3.9, url : https://doi-org.scd-rproxy.u-strasbg.fr/10.4007/annals.2021.194.3.9.

[Got73] W. Gottschalk, “Some general dynamical notions”, in : *Recent advances in topological dynamics (Proc. Conf. Topological Dynamics, Yale Univ., New Haven, Conn., 1972; in honor of Gustav Arnold Hedlund)*, Berlin : Springer, 1973, 120-125. Lecture Notes in Math., Vol. 318.

[Gro99] M. Gromov, “Endomorphisms of symbolic algebraic varieties”, in : *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 1.2 (1999), p. 109-197, issn : 1435-9855, doi : 10.1007/PL00011162, url : http://dx.doi.org/10.1007/PL00011162.

[Kap57] Irving Kaplansky, “Problems in the theory of rings”, in : *Report of a conference on linear algebras, June, 1956*, Publ. 502, Nat. Acad. Sci., Washington, DC, 1957, p. 1-3.

Références IV

[Kap69] Irving Kaplansky, *Fields and rings*, University of Chicago Press, Chicago, Ill.-London, 1969, p. ix+198.

[Lam07] T. Y. Lam, *Exercises in modules and rings*, Problem Books in Mathematics, Springer, New York, 2007, p. xviii+412, isbn : 978-0-387-98850-4; 0-387-98850-5, doi : 10.1007/978-0-387-48899-8, url : https://doi.org/10.1007/978-0-387-48899-8.

[Lam99] T. Y. Lam, *Lectures on modules and rings*, t. 189, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1999, p. xxiv+557, isbn : 0-387-98428-3, doi : 10.1007/978-1-4612-0525-8, url : https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0525-8.

[Mar02] David Marker, *Model theory*, t. 217, Graduate Texts in Mathematics, An introduction, Springer-Verlag, New York, 2002, p. viii+342, isbn : 0-387-98760-6.

Références V

[Pas77] D. S. Passman, *The algebraic structure of group rings*, Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York-London-Sydney, 1977, p. xiv+720, isbn : 0-471-02272-1.

[Phu23a] Xuan Kien Phung, “A geometric generalization of Kaplansky’s direct finiteness conjecture”, in : *Proc. Amer. Math. Soc.* 151.7 (2023), p. 2863-2871, issn : 0002-9939,1088-6826, doi : `10.1090/proc/16333`, url : `https://doi.org/10.1090/proc/16333`.

[Phu23b] Xuan Kien Phung, “Weakly surjunctive groups and symbolic group varieties”, in : *arXiv:2111.13607* (2023).

[Wei00] B. Weiss, “Sofic groups and dynamical systems”, in : *Sankhyā Ser. A* 62.3 (2000), Ergodic theory and harmonic analysis (Mumbai, 1999), p. 350-359, issn : 0581-572X.