Surjonctivité des monoïdes fortement sofiques

Michel Coornaert

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université de Strasbourg

9 décembre 2024, Séométrie et Applications

Surjonctivité des monoïdes fortement sofiques

En collaboration avec Tullio Ceccherini-Silberstein et Xuan Kien Phung [CCP23b].

Surjonctivité

Surjonctivité

Définition

Soit E un ensemble. On dit qu'une application $f: E \to E$ est surjonctive si f est surjective ou non injective.

Surjonctivité

Définition

Soit E un ensemble. On dit qu'une application $f : E \to E$ est surjonctive si f est surjective ou non injective.

$$f \text{ surjonctive} \iff (f \text{ injective} \implies f \text{ surjective}).$$

Surjonctivité

Définition

Soit E un ensemble. On dit qu'une application $f\colon E \to E$ est surjonctive si f est surjective ou non injective.

$$f \text{ surjonctive } \iff (f \text{ injective } \implies f \text{ surjective}).$$

Le mot surjunctive a été créé par Gottschalk [Got73].

Objets surjonctifs

Objets surjonctifs

Définition

On dit qu'un objet X d'une catégorie concrète $\mathcal{C}$ est surjonctif si tout $\mathcal{C}$-endomorphisme de X est surjonctif.

Objets surjonctifs

Définition

On dit qu'un objet X d'une catégorie concrète $\mathcal{C}$ est surjonctif si tout $\mathcal{C}$-endomorphisme de X est surjonctif.

- Dans la catégorie des ensembles, les objects surjonctifs sont les ensembles finis.
- Dans la catégorie des espaces vectoriels, les objets surjonctifs sont les espaces vectoriels de dimension finie.
- Dans la catégorie des groupes, les objets surjonctifs sont les groupes co-hopfiens (groupes finis, $\mathbb{Q}$, $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$, ...).
- Le théorème d'Ax-Grothendieck dit que toute variété algébrique sur un corps algébriquement clos est un objet surjonctif.

Monoïdes

Monoïdes

Définition

Un monoïde est un ensemble muni d'une loi interne associative avec élément neutre.

Monoïdes

Définition

Un monoïde est un ensemble muni d'une loi interne associative avec élément neutre.

Autrement dit, un monoïde est un ensemble M muni d'une application $M \times M \to M$, $(m, m') \mapsto mm'$, vérifiant

Monoïdes

Définition

Un monoïde est un ensemble muni d'une loi interne associative avec élément neutre.

Autrement dit, un monoïde est un ensemble M muni d'une application $M \times M \to M$, $(m, m') \mapsto mm'$, vérifiant

- $\forall m_1, m_2, m_3 \in M \quad m_1(m_2 m_3) = (m_1 m_2) m_3$ et
- $\exists 1_M \in M, \forall m \in M \quad 1_M m = m 1_M = m$.

Monoïdes

Définition

Un monoïde est un ensemble muni d'une loi interne associative avec élément neutre.

Autrement dit, un monoïde est un ensemble M muni d'une application $M \times M \to M$, $(m, m') \mapsto mm'$, vérifiant

- $\forall m_1, m_2, m_3 \in M \quad m_1(m_2 m_3) = (m_1 m_2)m_3$ et
- $\exists 1_M \in M, \forall m \in M \quad 1_M m = m 1_M = m$.

Si M et N sont des monoïdes, on dit que $f : M \to N$ est un morphisme de monoïdes si

Monoïdes

Définition

Un monoïde est un ensemble muni d'une loi interne associative avec élément neutre.

Autrement dit, un monoïde est un ensemble M muni d'une application $M \times M \to M$, $(m, m') \mapsto mm'$, vérifiant

- $\forall m_1, m_2, m_3 \in M \quad m_1(m_2 m_3) = (m_1 m_2) m_3$ et
- $\exists 1_M \in M, \forall m \in M \quad 1_M m = m 1_M = m$.

Si M et N sont des monoïdes, on dit que $f \colon M \to N$ est un morphisme de monoïdes si $f(1_M) = 1_N$ et $f(mm') = f(m)f(m')$ quels que soient $m, m' \in M$.

Monoïdes

Définition

Un monoïde est un ensemble muni d'une loi interne associative avec élément neutre.

Autrement dit, un monoïde est un ensemble M muni d'une application $M \times M \to M$, $(m, m') \mapsto mm'$, vérifiant

- $\forall m_1, m_2, m_3 \in M \quad m_1(m_2 m_3) = (m_1 m_2) m_3$ et
- $\exists 1_M \in M, \forall m \in M \quad 1_M m = m 1_M = m$.

Si M et N sont des monoïdes, on dit que $f : M \to N$ est un morphisme de monoïdes si $f(1_M) = 1_N$ et $f(mm') = f(m)f(m')$ quels que soient $m, m' \in M$.
La catégorie des groupes est une sous-catégorie pleine de la catégorie des monoïdes.

Exemples de monoïdes

Exemples de monoïdes

- $(\mathbb{N}, +)$.

Exemples de monoïdes

- $(\mathbb{N}, +)$.
- $(\mathbb{N}, \times)$.

Exemples de monoïdes

- $(\mathbb{N}, +)$.
- $(\mathbb{N}, \times)$.
- monoïde symétrique d'un ensemble E : $(\mathrm{Map}(E), \circ)$ avec $\mathrm{Map}(E) \coloneqq \{f : E \to E\}$.

Exemples de monoïdes

- $(\mathbb{N}, +)$.
- $(\mathbb{N}, \times)$.
- monoïde symétrique d'un ensemble E : $(\mathrm{Map}(E), \circ)$ avec $\mathrm{Map}(E) \coloneqq \{f \colon E \to E\}$.
- monoïde bicyclique : sous-monoïde $B \subset \mathrm{Map}(\mathbb{N})$ engendré par $p, q \in \mathrm{Map}(\mathbb{N})$ définis par

$$p(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \quad p(n+1) = n \text{ et } q(n) = n+1.$$

Exemples de monoïdes

- $(\mathbb{N}, +)$.
- $(\mathbb{N}, \times)$.
- monoïde symétrique d'un ensemble E : $(\mathrm{Map}(E), \circ)$ avec $\mathrm{Map}(E) \coloneqq \{f\colon E \to E\}$.
- monoïde bicyclique : sous-monoïde $B \subset \mathrm{Map}(\mathbb{N})$ engendré par $p, q \in \mathrm{Map}(\mathbb{N})$ définis par

$$p(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \quad p(n+1) = n \text{ et } q(n) = n+1.$$

Tout élément $m \in B$ s'écrit de manière unique $m = q^a p^b$ avec $a, b \in \mathbb{N}$:

k	0	1	$\dots$	b	$b+1$	$b+2$	$\dots$
$m(k)$	a	a	$\dots$	a	$a+1$	$a+2$	$\dots$

Systèmes dynamiques

Systèmes dynamiques

Un système dynamique est un couple (X, M), où X est un espace topologique et M est un monoïde agissant continûment sur X.

Systèmes dynamiques

Un système dynamique est un couple (X, M), où X est un espace topologique et M est un monoïde agissant continûment sur X.
Cela signifie que l'on a une application $M \times X \to X$, $(m, x) \mapsto mx$, qui vérifie :

Systèmes dynamiques

Un système dynamique est un couple (X, M), où X est un espace topologique et M est un monoïde agissant continûment sur X.
Cela signifie que l'on a une application $M \times X \to X$, $(m, x) \mapsto mx$, qui vérifie :

- $\forall x \in X \quad 1_M x = x$,
- $\forall m_1, m_2 \in M, \forall x \in X \quad m_1(m_2 x) = (m_1 m_2)x$,
- $\forall m \in M \quad$ l'application $X \to X, x \mapsto mx,$ est continue.

Systèmes dynamiques

Un système dynamique est un couple (X, M), où X est un espace topologique et M est un monoïde agissant continûment sur X.
Cela signifie que l'on a une application $M \times X \to X$, $(m, x) \mapsto mx$, qui vérifie :

- $\forall x \in X \quad 1_M x = x$,
- $\forall m_1, m_2 \in M, \forall x \in X \quad m_1(m_2 x) = (m_1 m_2)x$,
- $\forall m \in M \quad$ l'application $X \to X, x \mapsto mx,$ est continue.

Si (X, M) et (Y, M) sont des systèmes dynamiques, on dit qu'une application $f : X \to Y$ est un morphisme de système dynamiques si f est continue et

$$\forall m \in M, \forall x \in X \quad f(mx) = mf(x) \quad M\text{-équivariance.}$$

Systèmes dynamiques

Un système dynamique est un couple (X, M), où X est un espace topologique et M est un monoïde agissant continûment sur X.
Cela signifie que l'on a une application $M \times X \to X$, $(m, x) \mapsto mx$, qui vérifie :

- $\forall x \in X \quad 1_M x = x$,
- $\forall m_1, m_2 \in M, \forall x \in X \quad m_1(m_2 x) = (m_1 m_2)x$,
- $\forall m \in M \quad$ l'application $X \to X, x \mapsto mx,$ est continue.

Si (X, M) et (Y, M) sont des systèmes dynamiques, on dit qu'une application $f : X \to Y$ est un morphisme de système dynamiques si f est continue et

$$\forall m \in M, \forall x \in X \quad f(mx) = mf(x) \quad M\text{-équivariance.}$$

Un isomorphisme de systèmes dynamiques s'appelle une conjugaison topologique.

Décalages

Décalages

Soient M un monoïde et A un ensemble fini.

Décalages

Soient M un monoïde et A un ensemble fini.
On munit A de la topologie discrète et $A^M = \{x\colon M \to A\} = \prod_{m \in M} A$ de la topologie produit.

Décalages

Soient M un monoïde et A un ensemble fini.
On munit A de la topologie discrète et $A^M = \{x \colon M \to A\} = \prod_{m \in M} A$ de la topologie produit.
L'espace A^M est compact, séparé, et totalement discontinu.

Décalages

Soient M un monoïde et A un ensemble fini.
On munit A de la topologie discrète et $A^M = \{x\colon M \to A\} = \prod_{m\in M} A$ de la topologie produit.
L'espace A^M est compact, séparé, et totalement discontinu.
On munit aussi A^M de l'action de M définie par

$$\forall m \in M, \forall x \in A^M \quad mx := x \circ R_m,$$

où $R_m\colon M \to M$ est la multiplication à droite par m.

Décalages

Soient M un monoïde et A un ensemble fini.
On munit A de la topologie discrète et $A^M = \{x\colon M \to A\} = \prod_{m\in M} A$ de la topologie produit.
L'espace A^M est compact, séparé, et totalement discontinu.
On munit aussi A^M de l'action de M définie par

$$\forall m \in M, \forall x \in A^M \quad mx := x \circ R_m,$$

où $R_m\colon M \to M$ est la multiplication à droite par m. On a donc

$$\forall m, m' \in M, \forall x \in A^M \quad (mx)(m') = x(m'm).$$

L'action de M sur A^M est continue.

Décalages

Soient M un monoïde et A un ensemble fini.
On munit A de la topologie discrète et $A^M = \{x \colon M \to A\} = \prod_{m \in M} A$ de la topologie produit.
L'espace A^M est compact, séparé, et totalement discontinu.
On munit aussi A^M de l'action de M définie par

$$\forall m \in M, \forall x \in A^M \quad mx := x \circ R_m,$$

où $R_m \colon M \to M$ est la multiplication à droite par m. On a donc

$$\forall m, m' \in M, \forall x \in A^M \quad (mx)(m') = x(m'm).$$

L'action de M sur A^M est continue. On dit que le système dynamique (A^M, M) est le décalage sur le monoïde M et l'alphabet A.

Décalages

Soient M un monoïde et A un ensemble fini.
On munit A de la topologie discrète et $A^M = \{x\colon M \to A\} = \prod_{m \in M} A$ de la topologie produit.
L'espace A^M est compact, séparé, et totalement discontinu.
On munit aussi A^M de l'action de M définie par

$$\forall m \in M, \forall x \in A^M \quad mx := x \circ R_m,$$

où $R_m\colon M \to M$ est la multiplication à droite par m. On a donc

$$\forall m, m' \in M, \forall x \in A^M \quad (mx)(m') = x(m'm).$$

L'action de M sur A^M est continue. On dit que le système dynamique (A^M, M) est le décalage sur le monoïde M et l'alphabet A. Un endomorphisme du décalage (A^M, M), c'est-à-dire une application continue équivariante $f\colon A^M \to A^M$, s'appelle un automate cellulaire.

Décalages

Soient M un monoïde et A un ensemble fini.
On munit A de la topologie discrète et $A^M = \{x \colon M \to A\} = \prod_{m \in M} A$ de la topologie produit.
L'espace A^M est compact, séparé, et totalement discontinu.
On munit aussi A^M de l'action de M définie par

$$\forall m \in M, \forall x \in A^M \quad mx := x \circ R_m,$$

où $R_m \colon M \to M$ est la multiplication à droite par m. On a donc

$$\forall m, m' \in M, \forall x \in A^M \quad (mx)(m') = x(m'm).$$

L'action de M sur A^M est continue. On dit que le système dynamique (A^M, M) est le décalage sur le monoïde M et l'alphabet A. Un endomorphisme du décalage (A^M, M), c'est-à-dire une application continue équivariante $f \colon A^M \to A^M$, s'appelle un automate cellulaire.
Un sous-décalage est un sous-ensemble fermé M-invariant $X \subset A^M$.

Monoïdes surjonctifs

Monoïdes surjonctifs

Définition

On dit qu'un monoïde M est surjonctif si le décalage (A^M, M) est surjonctif pour tout ensemble fini A.

Monoïdes surjonctifs

Définition

On dit qu'un monoïde M est surjonctif si le décalage (A^M, M) est surjonctif pour tout ensemble fini A.

$(M$ surjonctif$) \iff (\forall A$ ens. fini, $\forall f \colon A^M \to A^M$ aut. cell., f injectif $\implies f$ surjectif$)$.

Monoïdes surjonctifs

Définition

On dit qu'un monoïde M est surjonctif si le décalage (A^M, M) est surjonctif pour tout ensemble fini A.

(M surjonctif) $\iff$ ($\forall A$ ens. fini, $\forall f\colon A^M \to A^M$ aut. cell., f injectif $\implies$ f surjectif).
Soit M le monoïde bicyclique et $f\colon A^M \to A^M$, $x \mapsto x \circ L_p$, avec $L_p\colon M \to M$ la multiplication à gauche par p.

Monoïdes surjonctifs

Définition

On dit qu'un monoïde M est surjonctif si le décalage (A^M, M) est surjonctif pour tout ensemble fini A.

(M surjonctif) $\iff$ ($\forall A$ ens. fini, $\forall f \colon A^M \to A^M$ aut. cell., f injectif $\implies$ f surjectif).

Soit M le monoïde bicyclique et $f \colon A^M \to A^M$, $x \mapsto x \circ L_p$, avec $L_p \colon M \to M$ la multiplication à gauche par p. Donc

$$\forall x \in A^M, \forall m \in M \quad (f(x))(m) = x(pm).$$

On vérifie que f est un automate cellulaire injectif mais pas surjectif (pour $|A| \geq 2$).

Monoïdes surjonctifs

Définition

On dit qu'un monoïde M est surjonctif si le décalage (A^M, M) est surjonctif pour tout ensemble fini A.

$(M$ surjonctif$) \iff (\forall A$ ens. fini, $\forall f\colon A^M \to A^M$ aut. cell., f injectif $\implies f$ surjectif$)$.
Soit M le monoïde bicyclique et $f\colon A^M \to A^M$, $x \mapsto x \circ L_p$, avec $L_p\colon M \to M$ la multiplication à gauche par p. Donc

$$\forall x \in A^M, \forall m \in M \quad (f(x))(m) = x(pm).$$

On vérifie que f est un automate cellulaire injectif mais pas surjectif (pour $|A| \geq 2$). Donc le monoïde bicyclique n'est pas surjonctif.

Monoïdes surjonctifs

Définition

On dit qu'un monoïde M est surjonctif si le décalage (A^M, M) est surjonctif pour tout ensemble fini A.

$(M$ surjonctif$) \iff (\forall A$ ens. fini, $\forall f\colon A^M \to A^M$ aut. cell., f injectif $\implies f$ surjectif$)$.
Soit M le monoïde bicyclique et $f\colon A^M \to A^M$, $x \mapsto x \circ L_p$, avec $L_p\colon M \to M$ la multiplication à gauche par p. Donc

$$\forall x \in A^M, \forall m \in M \quad (f(x))(m) = x(pm).$$

On vérifie que f est un automate cellulaire injectif mais pas surjectif (pour $|A| \geq 2$). Donc le monoïde bicyclique n'est pas surjonctif.
On ne sait pas s'il existe des groupes non-surjonctifs.

Monoïdes surjonctifs

Définition

On dit qu'un monoïde M est surjonctif si le décalage (A^M, M) est surjonctif pour tout ensemble fini A.

$(M \text{ surjonctif}) \iff (\forall A$ ens. fini, $\forall f \colon A^M \to A^M$ aut. cell., f injectif $\implies f$ surjectif$)$.
Soit M le monoïde bicyclique et $f \colon A^M \to A^M$, $x \mapsto x \circ L_p$, avec $L_p \colon M \to M$ la multiplication à gauche par p. Donc

$$\forall x \in A^M, \forall m \in M \quad (f(x))(m) = x(pm).$$

On vérifie que f est un automate cellulaire injectif mais pas surjectif (pour $|A| \geq 2$). Donc le monoïde bicyclique n'est pas surjonctif.
On ne sait pas s'il existe des groupes non-surjonctifs.
Tout monoïde fini, tout monoïde résiduellement fini, tout monoïde commutatif de type fini, tout monoïde commutatif simplifiable, tout monoïde moyennable simplifiable, tout monoïde linéaire de type fini est surjonctif [CC15].

La distance de Hamming

La distance de Hamming

Soit Q un ensemble fini non vide.

La distance de Hamming

Soit Q un ensemble fini non vide.
On définit la distance de Hamming sur le monoïde $\mathrm{Map}(Q)$ par

La distance de Hamming

Soit Q un ensemble fini non vide.
On définit la distance de Hamming sur le monoïde $\mathrm{Map}(Q)$ par

$$\forall f, g \in \mathrm{Map}(Q) \quad d_Q^{\mathrm{Ham}}(f, g) := \frac{|\{q \in Q : f(q) \neq g(q)\}|}{|Q|}.$$

où $|\cdot|$ désigne le nombre d'éléments.

La distance de Hamming

Soit Q un ensemble fini non vide.
On définit la distance de Hamming sur le monoïde $\mathsf{Map}(Q)$ par

$$\forall f, g \in \mathsf{Map}(Q) \quad d_Q^{\mathrm{Ham}}(f,g) := \frac{|\{q \in Q : f(q) \neq g(q)\}|}{|Q|}.$$

où $|\cdot|$ désigne le nombre d'éléments.
On a toujours $0 \leq d_Q^{\mathrm{Ham}}(f,g) \leq 1$.

Monoïdes sofiques

Monoïdes sofiques

Définition (cf. [CC14])

On dit qu'un monoïde M est sofique si

$$\forall K \subset M \text{ fini}, \forall \varepsilon > 0, \exists \varnothing \neq Q = Q_{K,\varepsilon} \text{ fini}, \exists \sigma = \sigma_{K,\varepsilon} \colon M \to \mathrm{Map}(Q) \ :$$

- $\sigma(1_M) = \mathrm{Id}_Q$;
- $\forall k_1, k_2 \in K \quad d_Q^{\mathrm{Ham}}(\sigma(k_1 k_2), \sigma(k_1)\sigma(k_2)) \leq \varepsilon$;
- $\forall k_1, k_2 \in K \quad k_1 \neq k_2 \implies d_Q^{\mathrm{Ham}}(\sigma(k_1), \sigma(k_2)) \geq 1 - \varepsilon$.

On dit alors que la famille $\Sigma := (\sigma_{K,\varepsilon})$ est une approximation sofique de M.

Monoïdes sofiques

Définition (cf. [CC14])

On dit qu'un monoïde M est sofique si

$$\forall K \subset M \text{ fini}, \forall \varepsilon > 0, \exists \varnothing \neq Q = Q_{K,\varepsilon} \text{ fini}, \exists \sigma = \sigma_{K,\varepsilon} \colon M \to \mathrm{Map}(Q) \ :$$

- $\sigma(1_M) = \mathrm{Id}_Q$;
- $\forall k_1, k_2 \in K \quad d_Q^{\mathrm{Ham}}(\sigma(k_1 k_2), \sigma(k_1)\sigma(k_2)) \leq \varepsilon$;
- $\forall k_1, k_2 \in K \quad k_1 \neq k_2 \implies d_Q^{\mathrm{Ham}}(\sigma(k_1), \sigma(k_2)) \geq 1 - \varepsilon$.

On dit alors que la famille $\Sigma := (\sigma_{K,\varepsilon})$ est une approximation sofique de M.

La classe des groupes sofiques a été introduite par Gromov [Gro99] et Weiss [Wei00].

Monoïdes sofiques

Définition (cf. [CC14])

On dit qu'un monoïde M est sofique si

$$\forall K \subset M \text{ fini}, \forall \varepsilon > 0, \exists \varnothing \neq Q = Q_{K,\varepsilon} \text{ fini}, \exists \sigma = \sigma_{K,\varepsilon} : M \to \mathrm{Map}(Q) \quad :$$

- $\sigma(1_M) = \mathrm{Id}_Q$;
- $\forall k_1, k_2 \in K \quad d_Q^{\mathrm{Ham}}(\sigma(k_1 k_2), \sigma(k_1)\sigma(k_2)) \leq \varepsilon$;
- $\forall k_1, k_2 \in K \quad k_1 \neq k_2 \implies d_Q^{\mathrm{Ham}}(\sigma(k_1), \sigma(k_2)) \geq 1 - \varepsilon$.

On dit alors que la famille $\Sigma := (\sigma_{K,\varepsilon})$ est une approximation sofique de M.

La classe des groupes sofiques a été introduite par Gromov [Gro99] et Weiss [Wei00]. Ils ont montré que tout groupe sofique est surjonctif.

Monoïdes sofiques

Définition (cf. [CC14])

On dit qu'un monoïde M est sofique si

$$\forall K \subset M \text{ fini}, \forall \varepsilon > 0, \exists \varnothing \neq Q = Q_{K,\varepsilon} \text{ fini}, \exists \sigma = \sigma_{K,\varepsilon} \colon M \to \mathrm{Map}(Q) \ :$$

- $\sigma(1_M) = \mathrm{Id}_Q$;
- $\forall k_1, k_2 \in K \quad d_Q^{\mathrm{Ham}}(\sigma(k_1 k_2), \sigma(k_1)\sigma(k_2)) \leq \varepsilon$;
- $\forall k_1, k_2 \in K \quad k_1 \neq k_2 \implies d_Q^{\mathrm{Ham}}(\sigma(k_1), \sigma(k_2)) \geq 1 - \varepsilon$.

On dit alors que la famille $\Sigma := (\sigma_{K,\varepsilon})$ est une approximation sofique de M.

La classe des groupes sofiques a été introduite par Gromov [Gro99] et Weiss [Wei00]. Ils ont montré que tout groupe sofique est surjonctif. On ne sait pas s'il existe des groupes non-sofiques.

Monoïdes sofiques

Définition (cf. [CC14])

On dit qu'un monoïde M est sofique si

$$\forall K \subset M \text{ fini}, \forall \varepsilon > 0, \exists \varnothing \neq Q = Q_{K,\varepsilon} \text{ fini}, \exists \sigma = \sigma_{K,\varepsilon} \colon M \to \mathrm{Map}(Q) \ :$$

- $\sigma(1_M) = \mathrm{Id}_Q$;
- $\forall k_1, k_2 \in K \quad d_Q^{\mathrm{Ham}}(\sigma(k_1 k_2), \sigma(k_1)\sigma(k_2)) \leq \varepsilon$;
- $\forall k_1, k_2 \in K \quad k_1 \neq k_2 \implies d_Q^{\mathrm{Ham}}(\sigma(k_1), \sigma(k_2)) \geq 1 - \varepsilon$.

On dit alors que la famille $\Sigma := (\sigma_{K,\varepsilon})$ est une approximation sofique de M.

La classe des groupes sofiques a été introduite par Gromov [Gro99] et Weiss [Wei00]. Ils ont montré que tout groupe sofique est surjonctif. On ne sait pas s'il existe des groupes non-sofiques.
Le monoïde bicyclique n'est pas sofique [CC14].

Monoïdes sofiques

Définition (cf. [CC14])

On dit qu'un monoïde M est sofique si

$$\forall K \subset M \text{ fini}, \forall \varepsilon > 0, \exists \varnothing \neq Q = Q_{K,\varepsilon} \text{ fini}, \exists \sigma = \sigma_{K,\varepsilon} \colon M \to \mathrm{Map}(Q) \ :$$

1. $\sigma(1_M) = \mathrm{Id}_Q$;
2. $\forall k_1, k_2 \in K \quad d_Q^{\mathrm{Ham}}(\sigma(k_1 k_2), \sigma(k_1)\sigma(k_2)) \leq \varepsilon$;
3. $\forall k_1, k_2 \in K \quad k_1 \neq k_2 \implies d_Q^{\mathrm{Ham}}(\sigma(k_1), \sigma(k_2)) \geq 1 - \varepsilon$.

On dit alors que la famille $\Sigma := (\sigma_{K,\varepsilon})$ est une approximation sofique de M.

La classe des groupes sofiques a été introduite par Gromov [Gro99] et Weiss [Wei00]. Ils ont montré que tout groupe sofique est surjonctif. On ne sait pas s'il existe des groupes non-sofiques.
Le monoïde bicyclique n'est pas sofique [CC14].
Tout monoïde fini, tout monoïde résiduellement fini, tout monoïde commutatif, tout monoïde moyennable simplifiable, tout monoïde linéaire est sofique [CC14].

Monoïdes fortement sofiques

Monoïdes fortement sofiques

Définition (cf. [CCP23b])

On dit qu'un monoïde M est fortement sofique si

$$\forall K \subset M \text{ fini}, \exists \Delta_K < \infty, \forall \varepsilon > 0, \exists \varnothing \neq Q \text{ fini}, \exists \sigma \colon M \to \mathrm{Map}(Q) \quad :$$

- $\sigma(1_M) = \mathrm{Id}_Q$;
- $\forall k_1, k_2 \in K \quad d_Q^{\mathrm{Ham}}(\sigma(k_1 k_2), \sigma(k_1)\sigma(k_2)) \leq \varepsilon$;
- $\forall k_1, k_2 \in K \quad k_1 \neq k_2 \implies d_Q^{\mathrm{Ham}}(\sigma(k_1), \sigma(k_2)) \geq 1 - \varepsilon$.
- $\forall k \in K, \forall q \in Q \quad |\sigma(k)^{-1}(q)| \leq \Delta_K$.

On dit alors que la famille $\Sigma := (\sigma_{K,\varepsilon})$ est une approximation fortement sofique de M.

Monoïdes fortement sofiques

Définition (cf. [CCP23b])

On dit qu'un monoïde M est fortement sofique si

$$\forall K \subset M \text{ fini}, \exists \Delta_K < \infty, \forall \varepsilon > 0, \exists \varnothing \neq Q \text{ fini}, \exists \sigma \colon M \to \mathrm{Map}(Q) \ :$$

- $\sigma(1_M) = \mathrm{Id}_Q$;
- $\forall k_1, k_2 \in K \quad d_Q^{\mathrm{Ham}}(\sigma(k_1 k_2), \sigma(k_1)\sigma(k_2)) \leq \varepsilon$;
- $\forall k_1, k_2 \in K \quad k_1 \neq k_2 \implies d_Q^{\mathrm{Ham}}(\sigma(k_1), \sigma(k_2)) \geq 1 - \varepsilon$.
- $\forall k \in K, \forall q \in Q \quad |\sigma(k)^{-1}(q)| \leq \Delta_K$.

On dit alors que la famille $\Sigma := (\sigma_{K,\varepsilon})$ est une approximation fortement sofique de M.

Pour tout groupe G, on a

$$G \text{ fortement sofique} \iff G \text{ sofique.}$$

Monoïdes fortement sofiques

Monoïdes fortement sofiques

Pour tout monoïde M, on a

$$M \text{ fortement sofique} \implies M \text{ sofique.}$$

Monoïdes fortement sofiques

Pour tout monoïde M, on a

$$M \text{ fortement sofique} \implies M \text{ sofique.}$$

La réciproque est fausse : le monoïde multiplicatif $\{0, 1\}$ est sofique mais pas fortement sofique.

Monoïdes fortement sofiques

Pour tout monoïde M, on a

$$M \text{ fortement sofique} \implies M \text{ sofique.}$$

La réciproque est fausse : le monoïde multiplicatif $\{0, 1\}$ est sofique mais pas fortement sofique. Dans un monoïde fortement sofique, tout élément d'ordre fini doit être inversible.

Monoïdes fortement sofiques

Pour tout monoïde M, on a

$$M \text{ fortement sofique} \implies M \text{ sofique.}$$

La réciproque est fausse : le monoïde multiplicatif $\{0, 1\}$ est sofique mais pas fortement sofique. Dans un monoïde fortement sofique, tout élément d'ordre fini doit être inversible.

Tout sous-monoïde d'un monoïde fortement sofique est fortement sofique.

Monoïdes fortement sofiques

Pour tout monoïde M, on a

$$M \text{ fortement sofique} \implies M \text{ sofique.}$$

La réciproque est fausse : le monoïde multiplicatif $\{0, 1\}$ est sofique mais pas fortement sofique. Dans un monoïde fortement sofique, tout élément d'ordre fini doit être inversible.
Tout sous-monoïde d'un monoïde fortement sofique est fortement sofique. En particulier, tout sous-monoïde d'un groupe sofique est fortement sofique.

Monoïdes fortement sofiques

Pour tout monoïde M, on a

$$M \text{ fortement sofique} \implies M \text{ sofique.}$$

La réciproque est fausse : le monoïde multiplicatif $\{0, 1\}$ est sofique mais pas fortement sofique. Dans un monoïde fortement sofique, tout élément d'ordre fini doit être inversible.

Tout sous-monoïde d'un monoïde fortement sofique est fortement sofique. En particulier, tout sous-monoïde d'un groupe sofique est fortement sofique.

Il y a des monoïdes fortement sofiques qui ne peuvent pas se plonger dans un groupe.

Surjonctivité des monoïdes fortement sofiques

Surjonctivité des monoïdes fortement sofiques

Théorème (Gromov-Weiss [Gro99], [Wei00])

Tout groupe sofique est surjonctif.

Surjonctivité des monoïdes fortement sofiques

Théorème (Gromov-Weiss [Gro99], [Wei00])

Tout groupe sofique est surjonctif.

On ne sait pas si tout monoïde sofique est surjonctif mais nous avons obtenu le résultat suivant qui généralise le théorème de Gromov-Weiss.

Surjonctivité des monoïdes fortement sofiques

Théorème (Gromov-Weiss [Gro99], [Wei00])

Tout groupe sofique est surjonctif.

On ne sait pas si tout monoïde sofique est surjonctif mais nous avons obtenu le résultat suivant qui généralise le théorème de Gromov-Weiss.

Théorème A ([CCP23b])

Tout monoïde fortement sofique est surjonctif.

Surjonctivité des monoïdes fortement sofiques

Théorème (Gromov-Weiss [Gro99], [Wei00])

Tout groupe sofique est surjonctif.

On ne sait pas si tout monoïde sofique est surjonctif mais nous avons obtenu le résultat suivant qui généralise le théorème de Gromov-Weiss.

Théorème A ([CCP23b])

Tout monoïde fortement sofique est surjonctif.

La démonstration du théorème A dans [CCP23b] suit celle du théorème de Gromov-Weiss donnée par Kerr et Li dans [KL16].

Esquisse de démonstration du théorème A

Soient M un monoïde fortement sofique et A un ensemble fini.

Esquisse de démonstration du théorème A

Soient M un monoïde fortement sofique et A un ensemble fini.
Soit Σ une approximation fortement sofique de M.

Esquisse de démonstration du théorème A

Soient M un monoïde fortement sofique et A un ensemble fini.
Soit Σ une approximation fortement sofique de M.
Pour tout sous-décalage $X \subset A^M$, on définit l'entropie sofique

$$h_\Sigma(X, M) \in \{-\infty\} \cup [0, \infty]$$

du système dynamique (X, M) relativement à Σ.

Esquisse de démonstration du théorème A

Soient M un monoïde fortement sofique et A un ensemble fini.
Soit Σ une approximation fortement sofique de M.
Pour tout sous-décalage $X \subset A^M$, on définit l'entropie sofique

$$h_\Sigma(X, M) \in \{-\infty\} \cup [0, \infty]$$

du système dynamique (X, M) relativement à Σ. L'entropie sofique est un invariant de conjugaison topologique.

Théorème B ([CCP23b])

On a toujours $h_\Sigma(X, M) \leq \log |A|$. L'égalité a lieu si et seulement si $X = A^M$.

Esquisse de démonstration du théorème A

Soient M un monoïde fortement sofique et A un ensemble fini.
Soit Σ une approximation fortement sofique de M.
Pour tout sous-décalage $X \subset A^M$, on définit l'entropie sofique

$$h_\Sigma(X, M) \in \{-\infty\} \cup [0, \infty]$$

du système dynamique (X, M) relativement à Σ. L'entropie sofique est un invariant de conjugaison topologique.

Théorème B ([CCP23b])

On a toujours $h_\Sigma(X, M) \leq \log |A|$. L'égalité a lieu si et seulement si $X = A^M$.

Démonstration du théorème A.

On se donne un automate cellulaire injectif $f \colon A^M \to A^M$.

Esquisse de démonstration du théorème A

Soient M un monoïde fortement sofique et A un ensemble fini.
Soit Σ une approximation fortement sofique de M.
Pour tout sous-décalage $X \subset A^M$, on définit l'entropie sofique

$$h_\Sigma(X, M) \in \{-\infty\} \cup [0, \infty]$$

du système dynamique (X, M) relativement à Σ. L'entropie sofique est un invariant de conjugaison topologique.

Théorème B ([CCP23b])

On a toujours $h_\Sigma(X, M) \leq \log |A|$. L'égalité a lieu si et seulement si $X = A^M$.

Démonstration du théorème A.

On se donne un automate cellulaire injectif $f \colon A^M \to A^M$. On considère le sous-décalage $X \coloneqq f(A^M)$.

Esquisse de démonstration du théorème A

Soient M un monoïde fortement sofique et A un ensemble fini.
Soit Σ une approximation fortement sofique de M.
Pour tout sous-décalage $X \subset A^M$, on définit l'entropie sofique

$$h_\Sigma(X, M) \in \{-\infty\} \cup [0, \infty]$$

du système dynamique (X, M) relativement à Σ. L'entropie sofique est un invariant de conjugaison topologique.

Théorème B ([CCP23b])

On a toujours $h_\Sigma(X, M) \leq \log |A|$. L'égalité a lieu si et seulement si $X = A^M$.

Démonstration du théorème A.

On se donne un automate cellulaire injectif $f \colon A^M \to A^M$. On considère le sous-décalage $X \coloneqq f(A^M)$. On veu montrer que f est surjectif, c'est-à-dire que $X = A^M$.

Esquisse de démonstration du théorème A

Soient M un monoïde fortement sofique et A un ensemble fini.
Soit Σ une approximation fortement sofique de M.
Pour tout sous-décalage $X \subset A^M$, on définit l'entropie sofique

$$h_\Sigma(X, M) \in \{-\infty\} \cup [0, \infty]$$

du système dynamique (X, M) relativement à Σ. L'entropie sofique est un invariant de conjugaison topologique.

Théorème B ([CCP23b])

On a toujours $h_\Sigma(X, M) \leq \log|A|$. L'égalité a lieu si et seulement si $X = A^M$.

Démonstration du théorème A.

On se donne un automate cellulaire injectif $f\colon A^M \to A^M$. On considère le sous-décalage $X := f(A^M)$. On veu montrer que f est surjectif, c'est-à-dire que $X = A^M$. Les systèmes dynamiques (A^M, M) et (X, M) sont conjugués topologiquement par f.

Esquisse de démonstration du théorème A

Soient M un monoïde fortement sofique et A un ensemble fini.
Soit Σ une approximation fortement sofique de M.
Pour tout sous-décalage $X \subset A^M$, on définit l'entropie sofique

$$h_\Sigma(X, M) \in \{-\infty\} \cup [0, \infty]$$

du système dynamique (X, M) relativement à Σ. L'entropie sofique est un invariant de conjugaison topologique.

Théorème B ([CCP23b])

On a toujours $h_\Sigma(X, M) \leq \log |A|$. L'égalité a lieu si et seulement si $X = A^M$.

Démonstration du théorème A.

On se donne un automate cellulaire injectif $f\colon A^M \to A^M$. On considère le sous-décalage $X \coloneqq f(A^M)$. On veu montrer que f est surjectif, c'est-à-dire que $X = A^M$. Les systèmes dynamiques (A^M, M) et (X, M) sont conjugués topologiquement par f. On a donc $h_\Sigma(X, M) = h_\Sigma(A^M, M)$, ce qui implique $X = A^M$ d'après le théorème B. □

Application du théorème A aux algèbres de monoïdes

Application du théorème A aux algèbres de monoïdes

Soient M un monoïde et K un corps.

Application du théorème A aux algèbres de monoïdes

Soient M un monoïde et K un corps. L'algèbre de monoïde $K[M]$ est la K-algèbre défini ainsi :

- $K[M]$ est le K-espace vectoriel de base M ;
- la multiplication sur $K[M]$ s'obtient en étendant K-linéairement la multiplication (loi interne) sur M.

Application du théorème A aux algèbres de monoïdes

Soient M un monoïde et K un corps. L'algèbre de monoïde $K[M]$ est la K-algèbre défini ainsi :

- $K[M]$ est le K-espace vectoriel de base M ;
- la multiplication sur $K[M]$ s'obtient en étendant K-linéairement la multiplication (loi interne) sur M.

Définition

On dit qu'un anneau R est stablement fini si

$$\forall d \geq 1, \forall A, B \in \mathrm{Mat}_d(R) \quad AB = I_d \implies BA = I_d.$$

Application du théorème A aux algèbres de monoïdes

Soient M un monoïde et K un corps. L'algèbre de monoïde $K[M]$ est la K-algèbre défini ainsi :

- $K[M]$ est le K-espace vectoriel de base M ;
- la multiplication sur $K[M]$ s'obtient en étendant K-linéairement la multiplication (loi interne) sur M.

Définition

On dit qu'un anneau R est stablement fini si

$$\forall d \geq 1, \forall A, B \in \mathrm{Mat}_d(R) \quad AB = I_d \implies BA = I_d.$$

Dans [CCP23a], nous montrons que si M est un monoïde surjonctif alors $K[M]$ est stablement fini pour tout corps K.

Application du théorème A aux algèbres de monoïdes

Soient M un monoïde et K un corps. L'algèbre de monoïde $K[M]$ est la K-algèbre défini ainsi :

- $K[M]$ est le K-espace vectoriel de base M ;
- la multiplication sur $K[M]$ s'obtient en étendant K-linéairement la multiplication (loi interne) sur M.

Définition

On dit qu'un anneau R est stablement fini si

$$\forall d \geq 1, \forall A, B \in \mathrm{Mat}_d(R) \quad AB = I_d \implies BA = I_d.$$

Dans [CCP23a], nous montrons que si M est un monoïde surjonctif alors $K[M]$ est stablement fini pour tout corps K. Le théorème A nous donne alors :

Application du théorème A aux algèbres de monoïdes

Soient M un monoïde et K un corps. L'algèbre de monoïde $K[M]$ est la K-algèbre défini ainsi :

- $K[M]$ est le K-espace vectoriel de base M ;
- la multiplication sur $K[M]$ s'obtient en étendant K-linéairement la multiplication (loi interne) sur M.

Définition

On dit qu'un anneau R est stablement fini si

$$\forall d \geq 1, \forall A, B \in \mathrm{Mat}_d(R) \quad AB = I_d \implies BA = I_d.$$

Dans [CCP23a], nous montrons que si M est un monoïde surjonctif alors $K[M]$ est stablement fini pour tout corps K. Le théorème A nous donne alors :

Corollaire ([CCP23b])

Soit M un monoïde fortement sofique. Alors $K[M]$ est stablement fini pour tout corps K.

Application du théorème A aux algèbres de monoïdes (suite)

Application du théorème A aux algèbres de monoïdes (suite)

Remarque

Si M est le monoïde bicyclique alors $K[M]$ n'est jamais stablement fini car $p, q \in M \subset K[M]$ vérifient $pq = 1 \neq qp$.

Application du théorème A aux algèbres de monoïdes (suite)

Remarque

Si M est le monoïde bicyclique alors $K[M]$ n'est jamais stablement fini car $p, q \in M \subset K[M]$ vérifient $pq = 1 \neq qp$.

Remarque

Le corollaire étend le thorème d'Elek et Szabo [ES04] qui dit que $K[G]$ est stablement fini pour tout groupe sofique G et tout corps K. Kaplansky [Kap57], [Kap69] a montré que $K[G]$ est stablement fini pour tout groupe G et tout corps K de caractéristique 0. On ne sait pas si $K[G]$ est stablement fini pour tout groupe G et tout corps K. C'est l'une des conjectures de Kaplansky sur les algèbres de groupes.

Références I

[CC14] Tullio Ceccherini-Silberstein et Michel Coornaert, “On sofic monoids”, in : *Semigroup Forum* 89.3 (2014), p. 546-570, issn : 0037-1912,1432-2137, doi : 10.1007/s00233-014-9596-x, url : https://doi.org/10.1007/s00233-014-9596-x.

[CC15] T. Ceccherini-Silberstein et M. Coornaert, “On surjunctive monoids”, in : *Internat. J. Algebra Comput.* 25.4 (2015), p. 567-606, issn : 0218-1967,1793-6500, doi : 10.1142/S0218196715500113, url : https://doi.org/10.1142/S0218196715500113.

[CCP23a] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert et Xuan Kien Phung, “Stable finiteness of monoid algebras and surjunctivity”, in : *arXiv:2405.18287* (2023).

[CCP23b] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert et Xuan Kien Phung, “Strongly sofic monoids, sofic topological entropy, and surjunctivity”, in : *arXiv:2405.18287* (2023).

Références II

[ES04] G. Elek et E. Szabó, “Sofic groups and direct finiteness”, in : *J. Algebra* 280.2 (2004), p. 426-434, issn : 0021-8693, doi : 10.1016/j.jalgebra.2004.06.023, url : http://dx.doi.org/10.1016/j.jalgebra.2004.06.023.

[Got73] W. Gottschalk, “Some general dynamical notions”, in : *Recent advances in topological dynamics (Proc. Conf. Topological Dynamics, Yale Univ., New Haven, Conn., 1972; in honor of Gustav Arnold Hedlund)*, Berlin : Springer, 1973, 120-125. Lecture Notes in Math., Vol. 318.

[Gro99] M. Gromov, “Endomorphisms of symbolic algebraic varieties”, in : *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 1.2 (1999), p. 109-197, issn : 1435-9855, doi : 10.1007/PL00011162, url : http://dx.doi.org/10.1007/PL00011162.

[Kap57] Irving Kaplansky, “Problems in the theory of rings”, in : *Report of a conference on linear algebras, June, 1956*, Publ. 502, Nat. Acad. Sci., Washington, DC, 1957, p. 1-3.

Références III

[Kap69] Irving Kaplansky, *Fields and rings*, University of Chicago Press, Chicago, Ill.-London, 1969, p. ix+198.

[KL16] D. Kerr et H. Li, *Ergodic theory*, Springer Monographs in Mathematics, Independence and dichotomies, Springer, Cham, 2016, p. xxxiv+431, isbn : 978-3-319-49845-4; 978-3-319-49847-8, doi : 10.1007/978-3-319-49847-8, url : https://doi.org/10.1007/978-3-319-49847-8.

[Wei00] B. Weiss, "Sofic groups and dynamical systems", in : *Sankhyā Ser. A* 62.3 (2000), Ergodic theory and harmonic analysis (Mumbai, 1999), p. 350-359, issn : 0581-572X.