Université de Lorraine
Masterclasse EDP, Janvier 2023

Institut Élie Cartan de Lorraine (IECL)
Clémentine Courtès (courtes@math.unistra.fr)

Introduction aux EDP dispersives : étude de l'équation de Korteweg-de Vries

1 L'équation de Korteweg-de Vries : une équation dispersive

Cadre. Dans ce mini-cours, nous étudierons les EDP modélisant des phénomènes de propagation d'ondes en milieu dispersif.

Historique. L'EDP étudiée est l'équation de Korteweg-de Vries (abrégée en (KdV), en hommage à Diederik Korteweg et Gustave de Vries, deux chercheurs néerlandais qui l'ont étudiée en 1895, bien que l'équation ait fait l'objet des travaux de recherche de Joseph Boussinesq (chercheur français) en 1877. L'histoire de cette équation démarre avec John-Scott Russell qui observe en 1834 la formation d'une grande élévation d'eau dans le canal de l'Union (entre Edimbourg et Forth-Clyde) suite à l'arrêt brusque d'une barge. Cette élévation d'eau remonta le sens du canal et J.S. Russell l'a suivie à cheval pendant plusieurs km en constatant que sa forme, son amplitude et sa vitesse ne variaient pas au cours du temps.

Modélisation. L'équation de KdV peut ainsi modéliser le mouvement de la surface de l'eau et plus particulièrement le mouvement des vagues de faible amplitude en eau peu profonde sans effet transverse (les conditions d'un canal). En adimentionnant toutes les grandeurs, cette équation s'écrit

$$\partial_t u + u\partial_x u + \partial_{xxx} u = 0 \quad \text{pour } t > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}. \tag{KdV}$$

Dans ce qui précède, t correspond à la variable temporelle et $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ la dérivée partielle par rapport à t, x correspond à la variable spatiale orientée dans le sens du canal (on se placera en 1 dimension ici) et $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ la dérivée partielle par rapport à x. L'inconnue u correspond à la surface de l'eau.

Les différents termes de l'EDP. La dérivée temporelle va régir la dynamique du mouvement, grâce à ce terme l'EDP est dite "d'évolution" car il y a une dynamique en temps. Cette EDP possède également un terme non linéaire $u\partial_x u$ et un terme dispersif $\partial_{xxx} u$. De manière heuristique, une EDP est dite dispersive si elle propage des fréquences différentes à des vitesses différentes. Autrement dit, un paquet d'ondes se sépare au cours du temps en les différentes ondes qui le composent. Nous allons maintenant étudier une définition plus précise de la dispersion.

Institut Élie Cartan de Lorraine (IECL)
Clémentine Courtès (courtes@math.unistra.fr)

Définition 1 (EDP dispersive)**.** *Soit $u(t,x) = e^{i(\xi_0 x - \omega_0 t)}$ une onde plane de nombre d'onde ξ_0 ($\xi_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$, avec λ_0 la longueur d'onde, c'est-à-dire la période spatiale) et ω_0 la pulsation temporelle.*

- *L'onde u est solution d'une EDP linéaire si et seulement si il existe une relation entre ξ_0 et ω_0 appelée **relation de dispersion** $\omega_0 = W(\xi_0)$.*
- *L'EDP linéaire est dite **dispersive** si et seulement si $W''(\xi) \neq 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^*$. (en dimension supérieure à un, cette condition devient $\det\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(\xi)\right)_{1 \leq i,j \leq d} \neq 0$, autrement dit la matrice hessienne de W doit être inversible.)*
- *Une équation (non linéaire) est dite dispersive si son équation linéarisée l'est.*

Remarque 1. *L'équation de KdV linéarisée autour de l'état d'équilibre 0 devient l'équation (linéaire) d'Airy suivante :*

$$\partial_t \tilde{u} + \partial_{xxx} \tilde{u} = 0 \qquad \text{pour } t > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}. \tag{Airy}$$

Pour cela, on remplace u par $u(t,x) = 0 + \tilde{u}(t,x)$ dans (KdV) et on ne garde que les termes d'ordre 1 en la perturbation $\tilde{u}$. Vérifions que l'équation d'Airy est bien dispersive. On cherche $\tilde{u}$ sous la forme $e^{i(\xi_0 x - \omega_0 t)}$ ce qui donne la relation $-i\omega_0 + (i\xi_0)^3 = 0$. Donc ici, $W(\xi) = -\xi^3$. On obtient $W''(\xi) = -6\xi \neq 0$ pour tout ξ non nul. L'équation de KdV linéarisée (équation d'Airy) est dispersive et ainsi par extension, l'équation de KdV est dispersive.

Remarque 2. *Une définition équivalente est la suivante : une équation linéaire est dite dispersive si la vitesse de phase (i.e. la vitesse de $\xi_0 x - \omega_0 t$) qui vaut $v_\varphi = \frac{\omega_0}{\xi_0}$ est différente de la vitesse de groupe (i.e. la vitesse de l'enveloppe) qui vaut $v_g = W'(\xi_0)$.*

Pour l'équation d'Airy, on a $v_\varphi = \frac{\omega_0}{\xi_0} = \frac{W(\xi_0)}{\xi_0} = -\xi_0^2$ et $v_g = W'(\xi_0) = -3\xi_0^2$.

Exemples. L'équation de Schrödinger est une équation dispersive, par contre l'équation des ondes ne l'est pas.

Nous listons ci-dessous quelques propriétées vérifiées par l'équation de KdV.

Proposition 1 (Quantités conservées)**.** *La masse L^2 et l'hamiltonien (ou énergie) sont tous deux conservés au cours du temps avec*
- *Masse L^2 : $\mathscr{P}(u)(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |u(t,x)|^2 dx$*
- *Hamiltonien : $\mathscr{H}(u)(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\left(\partial_x u(t,x)\right)^2 - \frac{1}{6} u(t,x)^3 dx$.*

Proposition 2 (Changement d'échelle)**.** *Si u est solution de (KdV) alors pour tout $\lambda > 0$ $u_\lambda(t,x) = \lambda^2 u(\lambda^3 t, \lambda x)$ l'est également.*
Cela revient à dire qu'un phénomène se réalisant à une échelle du mêtre sur un temps de l'ordre de la seconde se retrouve de manière identique si on zoome à l'échelle des décimêtres sur un temps de l'ordre de la milliseconde. Il y a une invariance d'échelle.

Proposition 3 (Invariance par translation)**.** *Si u est solution de KdV alors pour tout $h \in \mathbb{R}$, la fonction $(t,x) \mapsto u(t, x+h)$ l'est également.*
On dit que (KdV) admet un groupe d'invariance à un paramêtre : le groupe des translations.

Organisation. Dans la suite du cours, nous nous intéresserons à deux questions principales :

1. Existence d'une solution quand on prescrit une donnée initiale $u_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Nous étudierons le temps d'existence de cette solution, il sera dit local s'il dépend de la donnée initiale u_0 et global si la solution existe sur tout $t \in \mathbb{R}^+$.
2. Existence de la solution particulière observée par Russell, qu'on appelle soliton en mathématique. Nous étudierons sa stabilité qui revient à savoir si le soliton se "reforme naturellement" après une petite perturbation.

Institut Élie Cartan de Lorraine (IECL)
Clémentine Courtès (courtes@math.unistra.fr)

2 Le problème de Cauchy pour (KdV)

Equation. On étudie le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \partial_t u + u\partial_x u + \partial_{xxx} u = 0, & \text{sur } \mathbb{R}, \\ u_{|t=0} = u_0. \end{cases}$$

Question. A u_0 donné, existe-t-il une solution u ? Si oui, sur quel temps $[0,T]$ cette solution est-elle définie ?

2.1 Transformée de Fourier et espaces de Sobolev

Définition 2 (Espace de Schwartz)**.** *L'espace de Schwartz est l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables et à décroissance rapide :*

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \quad \|x^\alpha f^{(\beta)}\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha f^{(\beta)}| < +\infty \right\}.$$

Définition 3 (Transformée de Fourier)**.** *Pour $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on définit la transformée de Fourier $\mathscr{F}$ par $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R})$ avec*

$$\mathscr{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

Proposition 4. *La transformée de Fourier $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R})$ est bijective et*

$$\mathscr{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} f(\xi) d\xi.$$

De plus, $\mathscr{F}$ s'étend en une isométrie bijective de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$: $\mathscr{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$. L'identité de Parseval suivante a lieu pour toute fonction f de $L^2(\mathbb{R})$

$$\|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}. \tag{Parseval}$$

Proposition 5. *Au niveau des dérivées, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a $\widehat{\partial_x f}(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi)$.*

Définition 4 (Espace de Sobolev d'exposant entier)**.** *On appelle espace de Sobolev d'exposant entier $k \in \mathbb{N}$, l'espace suivant noté*

$$H^k(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}), \ \forall n \leq k, \ f^{(n)} \in L^2(\mathbb{R}) \right\}.$$

Ainsi, pour tout $f \in H^k(\mathbb{R})$, on a $\|f\|_{H^k}^2 = \sum_{n=0}^k \int_{\mathbb{R}} |f^{(n)}|^2(x) dx < +\infty$.

Heuristique. Avec la transformée de Fourier et l'égalité de Parseval, on a donc :

$$\begin{aligned} H^k(\mathbb{R}) &= \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}), \ \|f\|_{L^2} < +\infty, \ \|f'\|_{L^2} < +\infty, \ ..., \ \|f^{(k)}\|_{L^2} < +\infty \right\} \\ &= \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}), \ \|\widehat{f}\|_{L^2} < +\infty, \ \|\widehat{f'}\|_{L^2} = \|\xi \widehat{f}\|_{L^2} < +\infty, \ ..., \ \|\widehat{f^{(k)}}\|_{L^2} = \|\xi^k \widehat{f}\|_{L^2} < +\infty \right\}. \end{aligned}$$

C'est équivalent à dire que $H^k(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}), \ \|(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}} \widehat{f}\|_{L^2} < +\infty \right\}$. On peut étendre cette définition au cas des exposants non entiers.

Définition 5 (Espace de Sobolev d'exposant réel)**.** *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on définit l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ d'exposant réel par*

$$H^s(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}), (1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}) \right\}.$$

Ainsi, pour tout $f \in H^s(\mathbb{R})$, on a $\|f\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{f}|^2(\xi) d\xi < +\infty$.

Proposition 6. *On a l'inclusion continue suivante : $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ avec injection continue, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction $f \in H^1(\mathbb{R})$ on a $\|f\|_{H^1} \leq C\|f\|_\infty$.*

Institut Élie Cartan de Lorraine (IECL)
Clémentine Courtès (courtes@math.unistra.fr)

Quelques opérateurs utiles. La transformée de Fourier permet de définir certains opérateurs directement via leur transformée de Fourier.

opérateur	transformée de Fourier de l'opérateur
$\partial_x f$	$\widehat{\partial_x f}(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi)$
$\Lambda^s f$	$\widehat{\Lambda^s f}(\xi) = (1+\|\xi\|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}(\xi)$
$\mathcal{S}(t)f$	$\widehat{\mathcal{S}(t)f}(\xi) = e^{it\xi^3} \widehat{f}(\xi)$
$\|\partial_x\|^{\frac{1}{4}} f$	$\widehat{\|\partial_x\|^{\frac{1}{4}} f}(\xi) = \|\xi\|^{\frac{1}{4}} \widehat{f}(\xi)$
$J_\varepsilon f$	$\widehat{J_\varepsilon f}(\xi) = \chi(\varepsilon\xi)\widehat{f}(\xi)$ avec $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$

On reviendra plus tard sur les deux opérateurs J_ϵ et $\mathcal{S}(t)$.

2.2 Equation d'Airy, problème linéaire

Remarque 3. *L'inconnue de l'EDP est une fonction $u : (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to u(t,x) \in \mathbb{R}$ avec t la variable temporelle $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ la variable spatiale. La régularité de la fonction ne sera pas la même selon la variable t ou la variable x. Il est classique dans ce cas de considérer u comme une fonction du temps à valeurs dans un espace de fonctions en la variable x :*

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ t &\longrightarrow u(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad x \longrightarrow u(t)(x) = u(t,x). \end{aligned}$$

avec $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ un espace de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (en la variable x) à déterminer.

Si u est de régularité L^4 par rapport à la variable de temps et L^∞ par rapport à la variable d'espace x, on écrira $u \in L^4([0,T], L^\infty(\mathbb{R}))$ que nous simplifierons en $u \in L^4_T L^\infty_x$.

Equation. Nous nous intéressons au problème de Cauchy pour l'équation (linéaire) d'Airy suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_{xxx} u = 0, & \text{sur } \mathbb{R}, \\ u_{|t=0} = u_0. \end{cases} \tag{Airy}$$

Le lemme suivant permet de résoudre le problème de Cauchy lié à l'équation d'Airy et à écrire la solution sous forme d'un groupe à un paramètre agissant sur la donnée initiale.

Lemme 1. *Pour tout $u_0 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, il existe un unique $u \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathscr{S}'(\mathbb{R}))$ défini par $\widehat{u}(t,\xi) = e^{it\xi^3}\widehat{u_0}(\xi)$ (pour tout $\xi \in \mathbb{R}$), solution du problème de Cauchy associé à l'équation d'Airy.*

On écrira $u(t) = \mathcal{S}(t)u_0$ avec

$$\widehat{\mathcal{S}(t)u_0}(\xi) = e^{it\xi^3}\widehat{u_0}(\xi).$$

On peut remarquer que :
- *$(\mathcal{S}(t))_t$ est un groupe à un paramètre ($\mathcal{S}(t+\tau) = \mathcal{S}(t) \circ \mathcal{S}(\tau)$ et $\mathcal{S}(0) = id$).*
- *$\mathcal{S}(t) : H^s_x(\mathbb{R}) \longrightarrow H^s_x(\mathbb{R})$ est continue et linéaire et $\|\mathcal{S}(t)u_0\|_{H^s_x} = \|u_0\|_{H^s_x}$.*

Proposition 7. *On peut réecrire la solution de l'équation d'Airy sous la forme d'un produit de convolution avec un noyau :*

$$\mathcal{S}(t)u_0 = K_t * u_0, \text{ avec } K_t(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi + it\xi^3} d\xi.$$

Quand on étudie des équations dispersives et plus particulièrement les questions d'existence de solutions aux problèmes de Cauchy associés, un point clé est d'utiliser une famille d'estimées appelées les estimées de Strichartz. Ces estimées classiques pour les équations dispersives servent à établir la décroissance des normes des solutions dans des espaces mixtes (espaces qui dépendent à la fois de la variable t et de la variable x).

Proposition 8 (Estimation de Strichartz)**.** *Il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ et pour tout $t > 0$ on a*

$$\| \, |\partial_x|^{\frac{1}{4}} \mathcal{S}(t) u_0 \, \|_{L^4_t L^\infty_x} \leq c \|u_0\|_{L^2}, \tag{Strichartz}$$

avec $\widehat{\|\partial_x\|^{\frac{1}{4}} f}(\xi) = |\xi|^{\frac{1}{4}} \widehat{f}(\xi)$ et

$$\| \, |\partial_x|^{\frac{1}{4}} \mathcal{S}(t) u_0 \, \|_{L^4_t L^\infty_x} = \| \, |\partial_x|^{\frac{1}{4}} \mathcal{S}(t) u_0 \, \|_{L^4(\mathbb{R}^+, L^\infty(\mathbb{R}))} = \left(\int_0^{+\infty} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} | \, |\partial_x|^{\frac{1}{4}} \mathcal{S}(t) u_0(x)| \right)^4 dt \right)^{\frac{1}{4}}.$$

2.3 Le problème non linéaire

Equation. On revient sur le problème de Cauchy pour l'équation non linéaire de KdV :

$$\begin{cases} \partial_t u + u\partial_x u + \partial_{xxx} u = 0, & \text{sur } \mathbb{R}, \\ u_{|t=0} = u_0. \end{cases} \tag{KdV}$$

Le théorème suivant donne un résultat d'existence locale (le temps d'existence dépend de la donnée initiale) pour des données initiales de faible régularité de Sobolev.

Théorème 1 ($s > \frac{3}{4}$, existence locale)**.** *Soit $\boxed{s > \frac{3}{4}}$, pour tout $u_0 \in H^s_x(\mathbb{R})$, il existe un temps $T = T(\|u_0\|_{H^s_x})$ (ne dépendant que de la norme $\|u_0\|_{H^s_x}$) et il existe une unique fonction $u \in \mathscr{C}^0_t([0,T], H^s_x(\mathbb{R}))$ telle que $\partial_x u \in L^4_t([0,T], L^\infty_x(\mathbb{R}))$, solution de (KdV).*

Remarque 4. *On a ici existence locale puisque le temps d'existence dépend de la donnée initiale. En fonction de $\|u_0\|_{H^s_x}$, la solution existera sur un temps plus ou moins long.*

Pour $s > \frac{3}{4}$ et $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, la donnée initiale n'est même pas continue en espace et la solution $u(t)$ ne l'est pas non plus en tout temps t. Quel sens donner à $\partial_t u$, $\partial_x u$? On donne à ces dérivées un sens faible et on dit que u est solution faible si pour tout $\varphi \in L^1([0,T[, L^2(\mathbb{R}))$, on a

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \partial_t u \varphi dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) \varphi dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \partial_{xxx} u \varphi dx dt = 0.$$

Lorsque la donnée initiale est un peu plus régulière, on peut espérer avoir existence globale (*i.e.* en tout temps) de la solution.

Corollaire 1 ($s = 1$, existence globale)**.** *Pour tout $u_0 \in H^1_x(\mathbb{R})$, il existe une unique fonction $u \in \mathscr{C}_t(\mathbb{R}^+, H^1_x(\mathbb{R}))$ telle que $\partial_x u \in L^4_t(\mathbb{R}^+, L^\infty(\mathbb{R}))$ solution (en tout temps) de (KdV).*

Puisque $u(t) \in H^1_x(\mathbb{R})$, la solution est ici continue en espace.

Démonstration. Le corollaire se prouve en combinant le théorème d'existence locale précédent et la conservation de l'Hamiltonien (qui a bien un sens ici car u_0 est suffisamment régulière pour donner un sens à $\mathscr{H}(u_0)$). □

3 Etude du soliton de (KdV)

3.1 Existence du soliton

Remarque 5. *On cherche une solution mathématique proche de l'élévation d'eau observée par Russell dans le canal. Mathématiquement, on cherche une solution de (KdV) sous la forme $u(t,x) = Q_c(x - ct)$ avec $c > 0$ et $Q_c(\zeta), Q_c'(\zeta), Q_c''(\zeta) \underset{\zeta\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$ (c'est-à-dire qu'on cherche un profil se déplaçant à vitesse $c > 0$ joignant 0 en $-\infty$ et en $+\infty$ de manière très plate). On l'appelle un soliton.*

Institut Élie Cartan de Lorraine (IECL)
Clémentine Courtès (courtes@math.unistra.fr)

Remarque 6. *Le profil Q_c vérifie une EDO*

$$-cQ_c' + Q_cQ_c' + Q_c''' = 0.$$

En intégrant et en considérant que $Q_c(\zeta), Q_c'(\zeta), Q_c''(\zeta) \underset{\zeta\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient $-cQ_c + \frac{Q_c^2}{2} + Q_c'' = 0$, soit encore

$$Q_c'' = cQ_c - \frac{Q_c^2}{2}.$$

On pose $Q(\zeta) = \frac{1}{c}Q_c(\frac{\zeta}{\sqrt{c}})$ alors on remarque que Q est solution de

$$Q'' = Q - \frac{Q^2}{2}.$$

La solution de $Q" = Q - \frac{Q^2}{2}$ avec limite nulle en l'infini vaut

$$Q(\zeta) = \frac{3}{\mathrm{ch}^2(\frac{\zeta}{2})}.$$

On a donc toute une famille de solitons, tous solutions de (KdV) et indexés avec des vitesses c différentes :

$$Q_c(\zeta) = cQ(\sqrt{c}\zeta) = \frac{3c}{\mathrm{ch}^2(\frac{\sqrt{c}\zeta}{2})}.$$

Remarque 7. *On a donc $u(t,x) = Q_c(x-ct) = \frac{3c}{\mathrm{ch}^2(\frac{\sqrt{c}(x-ct)}{2})}$. La vitesse c est donc directement liée à l'amplitude du soliton et à son étalement :*

$$u(t,x) = \underbrace{c}_{\substack{\textit{amplitude}\\ \textit{(grand c = grande amplitude)}}} Q(\underbrace{\sqrt{c}}_{\substack{\textit{étalement}\\ \textit{(grand c = profil étroit)}}}(x - \underbrace{c}_{\substack{\textit{vitesse}\\ \textit{(grand c = grande vitesse)}}} t)).$$

Il n'y a donc qu'un seul degré de liberté au niveau du soliton (si on choisit une vitesse par exemple, azlors l'amplitude et l'étalement seront imposés).

Question. La question qu'on se pose est celle de la stabilité de ce soliton.

3.2 Notion de stabilité

Rappel. On considère une EDO du type

$$\begin{cases} u' = F(u), & \text{avec } u \in \mathbb{R}^n, \\ u_{|t=0} = u_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Soit $\overline{u} \in \mathbb{R}^n$ tel que $F(\overline{u}) = 0$, alors $t \mapsto \overline{u}$ est une solution (constante) de l'EDO.

Définition 6 (Stabilité au sens de Lyapunov de $\overline{u}$)**.** *$\overline{u}$ est stable si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\forall u_0 \in \mathbb{R}^n, |u_0 - \overline{u}| \le \delta \Rightarrow |u(t) - \overline{u}| \le \varepsilon$, pour tout $t \ge 0$.*

(En particulier, les solutions de l'EDO partant proches de $\overline{u}$ sont globales).

Définition 7 (Stabilité asymptotique)**.** *Si de plus $u(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \overline{u}$, on dit que $\overline{u}$ est asymptotiquement stable.*

Cas des EDO hamiltoniennes. On considère l'EDO suivante

$$\begin{cases} u' = J\nabla H(u), \\ u_{|t=0} = u_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

On suppose que $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ et que J est un opérateur anti-symétrique ($J^* = -J$.)

Théorème 2. *Soit $\overline{u}$ un point critique (ie. $\nabla H(\overline{u}) = 0$). Si $\nabla^2 H(\overline{u})$ est définie positive ou définie négative alors $\overline{u}$ est stable au sens de Lyapunov.*

Remarque 8. *Si H a un groupe d'invariance (ie. $H(u) = H(u(\cdot + \gamma))$ (translation) ou $H(u) = H(e^{i\gamma}u)$ (rotation), etc), on ne peut espérer avoir le théorème précédent. En effet, soit $\{\varphi_\theta\}_\theta$ un groupe à un paramètre*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow GL(\mathbb{R}^n) \\ \theta &\longrightarrow \varphi_\theta \end{aligned}$$

avec $\varphi_0 = Id$. Par exemple, ce groupe représente les translations ($\varphi_\theta u = u(\cdot + \theta)$) ou les rotations ($\varphi_\theta u = e^{i\theta}u$).

H a un groupe d'invariance ssi $H(u) = H(\varphi_\theta)$ pour tout θ. Dérivons cette relation par rapport à θ. On obtient, pour tout u et tout θ :

$$0 = \nabla H(\varphi_\theta u) \cdot \frac{d\varphi_\theta}{d\theta} u.$$

En dérivant une nouvelle fois, on trouve

$$0 = \nabla^2 H(\varphi_\theta u) \frac{d\varphi_\theta}{d\theta} u \cdot \frac{d\varphi_\theta}{d\theta} u + \nabla H(\varphi_\theta u) \cdot \frac{d^2\varphi_\theta}{d\theta^2} u.$$

En appliquant cette relation à $\theta = 0$ et $u = \overline{u}$, et en notant $L = \frac{d\varphi_\theta}{d\theta}_{|\theta=0}$, on trouve $0 = \nabla^2 H(\overline{u}) L\overline{u} \cdot L\overline{u} + \underbrace{\nabla H(\overline{u})}_{=0} \cdot \frac{d^2\varphi_\theta}{d\theta^2}_{|\theta=0} u$, soit encore

$$0 = \nabla^2 H(\overline{u}) L\overline{u} \cdot L\overline{u}.$$

Donc $\nabla^2 H(\overline{u})$ n'est pas définie positive ni définie négative (si $L\overline{u} \neq 0$). Les hypothèses du théorème précédent ne s'appliquent pas.

Retour aux EDP. On voudrait écrire une stabilité de type Lyapunov mais pour les EDP. Se pose alors la question du choix de l'espace fonctionnel. On voudrait pouvoir écrire quelque chose comme : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\forall u_0 \in X, \|u_0 - \overline{u}\|_X \leq \delta \Rightarrow \|u(t) - \overline{u}\|_Y \leq \varepsilon$ en tout temps $t \geq 0$, avec $u(t)$ solution de l'EDP partant de u_0 et X et Y des espaces fonctionnels à trouver (par exemple L^2 ou H^1).

Question. Y a-t-il stabilité au sens de Lyapunov de Q_c ? Soit $c_1 < c_2$ et Q_{c_1}, Q_{c_2} les deux solitons associés. Si c_1 est proche de c_2 alors ${Q_{c_1}}_{|t=0}$ est proche de ${Q_{c_2}}_{|t=0}$. Cependant, à $t > 0$, l'écart entre Q_{c_1} et Q_{c_2} sera du type $|c_1 - c_2|t$. Les deux solitons ne pourront donc pas rester dans un voisinage l'un de l'autre en temps long.

Bilan : la stabilité de Lyapunov est trop restrictive pour les EDP. Pourtant, on aurait envie de dire que le soliton est stable dans un autre sens, car quitte à translater, les deux solitons restent proches. En mathématique, le "quitte à translater" correspond à quotienter par le groupe des invariances (ici, le groupe des translations). On ne distingue pas deux objets qui diffèrent d'une translation. C'est la notion de stabilité orbitale (une orbite étant toutes les translations possibles d'une solution).

Définition 8 (Stabilité orbitale)**.** *$\overline{u}$ est dit orbitalement stable dans l'espace fonctionnel X si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\forall u_0 \in X,\ \|u_0 - \overline{u}\|_X \leq \delta \Rightarrow \forall t \geq 0,\ \inf_{h \in \mathbb{R}} \|u(t, \cdot + h) - \overline{u}\|_X \leq \varepsilon$.*

Explications. On regarde toutes les translations possibles de $u(t)$ et on vérifie s'il y en a une qui reste dans un voisinage de $\overline{u}$. L'idée est de prendre en compte les invariances de l'équation (on quotiente par les invariances, c'est-à-dire qu'on teste la solution $u(t)$ modulo les translations, les rotations, etc.)

Généralisation. On peut réécrire la stabilité orbitale de la manière suivante : $\overline{u}$ est dit orbitalement stable dans l'espace fonctionnel X si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ et $\exists h(t)$ tels que $\forall u_0 \in X$,
$\|u_0 - \overline{u}\|_X \leq \delta \Rightarrow \forall t \geq 0,\ \|u(t) - \overline{u}(\cdot + h(t))\|_X \leq \varepsilon$.

L'idée est à chaque fois de trouver une transformation $g(t)$ et un espace X tels que $\|u(t) - g(t)\overline{u}\|_X \leq \varepsilon$ pour tout temps $t \geq 0$. Dans ce qui précède, $g(t)$ est appelée une jauge et la théorie qui revient à trouver le meilleur $g(t)$ possible en regardant les invariances de l'équation s'appelle la théorie de la modulation.

Institut Élie Cartan de Lorraine (IECL)
Clémentine Courtès (courtes@math.unistra.fr)

Remarque 9. *Puisque (KdV) possède un groupe d'invariances à un paramètre (les translations) les hypothèses du théorèmes des EDO ne sont pas vérifiées et il va falloir étudier l'opérateur de (KdV) de manière plus fine pour savoir s'il y a stabilité du soliton. Cela passe par l'étude du spectre de cet opérateur.*

3.3 Quelques résultats de théorie spectrale

Définition 9 (Spectre d'un opérateur L)**.** *On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ appartient au spectre de l'opérateur L si $L - \lambda Id$ n'est pas inversible. On note $\sigma(L)$ le spectre de L.*

Rappel. En dimension finie, dire qu'une matrice L carrée est inversible (bijective) équivaut à dire qu'elle est injective. Donc $\lambda \in \sigma(L) \Leftrightarrow L - \lambda Id$ n'est pas injectif. On dit que λ est une valeur propre et on note $\sigma_p(L)$ l'ensemble des valeurs propres (c'est le spectre ponctuel). En dimension finie, $\sigma(L) = \sigma_p(L)$.

Proposition 9. *En dimension infinie, être inversible équivaut à être injectif, d'image dense et d'image fermée. Donc ne pas être inversible signifie que l'une des trois propositions n'est pas vérifiée.*

$$\lambda \in \sigma(L) \Leftrightarrow \begin{cases} \textit{ou bien } L - \lambda Id \textit{ n'est pas injectif } (= \sigma_p(L), \textit{ spectre ponctuel}) \\ \textit{ou bien } L - \lambda Id \textit{ n'est pas d'image dense } (= \sigma_r(L), \textit{ spectre résiduel}) \\ \textit{ou bien } L - \lambda Id \textit{ n'est pas d'image fermée } (= \sigma_c(L), \textit{ spectre continu}) \end{cases}$$

Ces trois sous-ensembles sont disjoints et leur union disjointe forme tout le spectre de L :

$$\sigma(L) = \sigma_p(L) \cup \sigma_r(L) \cup \sigma_c(L).$$

Remarque 10. *Ainsi, quand on veut étudier le spectre d'un opérateur en dimension infini, il faut donc étudier non pas seulement les valeurs propres mais ces trois sous ensembles. Étudier $\sigma_c(L)$ et $\sigma_r(L)$ peut s'avérer un peu compliqué. Il existe dans ce cas une autre décomposition du spectre : on note $\sigma_{disc}(L)$ (spectre discret) les valeurs propres isolées (de multiplicité finie) et on note $\sigma_{ess}(L)$ (spectre essentiel) le reste. Ainsi $\sigma(L) \backslash \sigma_{ess}(L) = \sigma_{disc}(L)$.*

Opérateur. Prenons un exemple d'opérateur en dimension infinie et étudions son spectre. Soit $V \in \mathscr{C}_b^\infty(\mathbb{R})$ (toutes ses dérivées existent et sont bornées) tel qu'il existe $c, \alpha, a > 0$ tels que

$$|V(x) - \alpha| \leq Ce^{-\alpha|x|}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Le potentiel V a donc une décroissance exponentielle au voisinage de α.

On définit L un opérateur non borné tel que

$$\begin{aligned} L : D(L) = H^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ u &\longrightarrow Lu = -u'' + V(x)u. \end{aligned}$$

Proposition 10. *L'opérateur L est auto-adjoint*
• *$L^* = L$, donc pour tout $u, v \in H^2(\mathbb{R})$, on a $\langle Lu, v\rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} -u''v + V(x)uvdx = \int_{\mathbb{R}} -uv'' + V(x)uvdx = \langle u, Lv\rangle_{L^2}$.*
• *et $D(L^*) = H^2(\mathbb{R})$.*

On peut décrire totalement le spectre de L grâce aux deux propositions suivantes.

Corollaire 2. *Puisque L est auto-adjoint alors $\sigma(L) \subset \mathbb{R}$.*

Proposition 11. • $[\alpha, +\infty[\subset \sigma(L)$
• *$\sigma(L) \backslash [\alpha, +\infty[$ est consitué de valeurs propres isolées de multiplicité finie.*
On a donc $\sigma_{ess}(L) = [\alpha, +\infty[$ et $\sigma(L) \backslash [\alpha, +\infty[$ est formé de points de $\mathbb{R}$ isolés.

Pour connaitre exactement le spectre discret de L, nous pouvons utiliser le théorème de Sturm-Liouville.

Théorème 3 (Sturm-Liouville)**.** *Si de plus il existe $\varphi \in H^2(\mathbb{R}) \backslash \{0\}$ tel que $L\varphi = 0$ et si $\alpha > 0$ alors le nombre de valeurs propres négatives de L est égal au nombre de zéros de φ (comptés avec multiplicité).*

Remarque 11. *On va utiliser cette théorie spectrale pour montrer la stabilité orbitale du soliton de (KdV).*

Institut Élie Cartan de Lorraine (IECL)
Clémentine Courtès (courtes@math.unistra.fr)

3.4 Stabilité orbitale du soliton de (KdV)

Théorème 4 (Stabilité orbitale)**.** *Soit Q_c le soliton de (KdV), alors $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ tel que $\forall u_0\in H^1_x(\mathbb{R})$ tel que $\|u_0-Q_c\|_{H^1}\leq\delta$ alors $\inf\limits_{\gamma\in\mathbb{R}}\|u(t,\cdot+\gamma)-Q_c(\cdot-ct)\|_{H^1}\leq\varepsilon, \forall t\geq 0$, avec u solution de (KdV) partant de u_0.*

Ce théorème contient deux choses comme pour les EDO :
• existence globale (déjà fait pour $u_0\in H^1_x(\mathbb{R})$ précédemment)
• la solution reste dans un voisinage du soliton.

Remarque 12. *Au lieu de se placer dans un référentiel fixe et de voir le soliton Q_c en translation ($Q_c(x-ct)$), il est classique de changer de référentiel, de se placer dans un référentiel en translation à vitesse c et de voir Q_c immobile ($Q_c(x)$).*

Dans ce nouveau référentiel, (KdV) devient (KdV$_c$) (avec même donnée initiale) :

$$\partial_t u - c\partial_x u + u\partial_x u + \partial_{xxx}u = 0. \tag{KdV$_c$}$$

Avec (KdV$_c$), Q_c ne dépend plus que de x.

Proposition 12. *(KdV$_c$) est encore hamiltonienne et les deux grandeurs suivantes sont conservées au cours du temps :*
• *La masse L^2 : $\mathscr{P}_c(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|u|^2dx=\mathscr{P}(u)$.*
• *l'hamiltonien $\mathscr{H}_c(u)=\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2}(\partial_x u)^2+\frac{c}{2}u^2-\frac{u^3}{6}dx=\mathscr{H}+c\mathscr{P}$.*

Remarque 13. *Essayons comme pour les EDO de calculer la différentielle seconde de $\mathscr{H}_c$ en Q_c. Pour cela, on a :*

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_c(Q_c+w)-\mathscr{H}_c(Q_c)&=\int_{\mathbb{R}}Q_c'\partial_x w+\frac{1}{2}(\partial_x w)^2+cQ_cw+\frac{c}{2}w^2-\frac{1}{2}Q_c^2w-\frac{1}{2}Q_cw^2+\frac{w^3}{6}dx\\&=\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2}(\partial_x w)^2-Q_c''w+cQ_cw+\frac{c}{2}w^2-\frac{Q_c^2}{2}w-\frac{Q_cw^2}{2}+\frac{w^3}{6}dx.\end{aligned}$$

Or Q_c est solution (stationnaire) de (KdV$_c$) c'est-à-dire que $cQ_c'+Q_c'''+Q_cQ_c'=0$. En intégrant une fois en x et en se rappelant que les limites en $\pm\infty$ de Q_c valaient 0, on obtient $-cQ_c+Q_c''+\frac{Q_c^2}{2}=0$.

Donc

$$\mathscr{H}_c(Q_c+w)-\mathscr{H}_c(Q_c)=\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2}(\partial_x w)^2+\frac{c}{2}w^2-\frac{Q_c}{2}w^2+\frac{w^3}{6}dx.$$

Ainsi en notant L_c l'opérateur tel que $\mathscr{H}_c(Q_c+w)-\mathscr{H}_c(Q_c)=\frac{1}{2}\langle L_cw,w\rangle_{L^2}+$termes cubiques, on obtient

$$L_cw=-\partial_x^2w+cw-Q_cw.$$

Si L_c est coercive, *i.e.* s'il existe $\beta>0$ tel que $\langle L_cw,w\rangle_{L^2}\geq\beta\|w\|^2_{H^1}$, alors on sera ramené au même cas que les EDO (lorsque la matrice hessienne est définie positive) et on pourra facilement conclure. Il faut donc étudier le spectre de L_c.

Remarque 14. *On a $L_cw=-\partial_x^2w+(c-Q_c)w$, c'est donc du type $Lu=-u''+V(x)u$ avec $V(x)=c-Q_c$. Puisque $Q_c(x)=cQ(\sqrt{c}x)$ avec $Q(x)=\frac{3}{ch^2(\frac{x}{2})}$ alors*

$$|Q_c(x)|\leq\frac{6c}{e^{\sqrt{c}x}+2+e^{-\sqrt{c}x}}\leq\begin{cases}\dfrac{6c}{e^{\sqrt{c}x}} & si\ x>0,\\[2mm] \dfrac{6c}{e^{-\sqrt{c}x}} & si\ x<0.\end{cases}$$

Dans tous les cas on a $|V(x)-c|=|c-Q_c(x)-c|=|Q_c(x)|\leq Ce^{-\sqrt{c}|x|}$. Nous sommes donc exactement dans l'exemple développé à la sous-section précédente.

Lemme 2 (Propriétés spectrales de L_c)**.** *Avec ce qui précède, on a :*
• $[c, +\infty[\subset \sigma(L_c)$.
• 0 *est valeur propre.*
• L_c *a une unique valeur propre négative notée* $-\lambda$*, avec* $\lambda > 0$.

Démonstration. • On a $L_c(Q_c') = 0$ donc 0 est bien valeur propre.
• Puisque $L_c(Q_c') = 0$ et que Q_c' ne s'annule qu'une seule fois (en le maximum de Q_c) alors par le théorème de Sturm-Liouville, L_c n'aura qu'une seule valeur propre négative. ☐

On peut même montrer que $\{-\lambda\} \cup \{0\} \cup [c, +\infty[= \sigma(L_c)$.

Remarque 15. *On lit dans le spectre de l'opérateur* L_c *les propriétés d'invariance de l'EDP :*

$$\underbrace{\{-\lambda\}}_{\text{chgt d'echelle}} \cup \underbrace{\{0\}}_{\text{inv. par translation}} \cup [c, +\infty[= \sigma(L_c).$$

On retrouve ainsi le fait que si l'EDP n'a pas d'invariance, alors l'opérateur L_c *serait coercive et on aurait tout de suite la stabilité du soliton, par un argument similaire à celui des EDO.*

Visuellement. Soit ψ un vecteur propre associé à la valeur propre $-\lambda$. On sait aussi que Q_c' est un vecteur propre associé à la valeur propre 0. Donc sur $\mathrm{Vect}(Q_c', \psi)^\perp$, L_c est coercive pour la norme L^2 : $\langle L_c w, w\rangle_{L_c} \geq c\|w\|_{L^2}^2$. On peut améliorer le résultat en montrant une propriété de coercivité pour la norme $H^1(\mathbb{R})$, quitte à changer légèrement l'espace en question.

Lemme 3 (Positivité)**.** *Il existe* $\beta > 0$*, tel que pour tout* $w \in$ *Vect*$(Q_c', Q_c)^\perp$*, alors* $\langle L_c w, w\rangle_{L^2} \geq \beta \|w\|_{H^1}^2$.

Pour la preuve de stabilité orbitale, on va donc essayer de choisir convenablement les paramètres pour appartenir à l'espace $\mathrm{Vect}(Q_c', Q_c)^\perp$. Le paramètre en question sur lequel on a un degré de liberté est le paramètre le jauge : le choix de la meilleure translation possible.

Lemme 4 (Choix du paramètre de modulation)**.** *Il existe* $\delta > 0$ *tel que* $\forall v \in H^1(\mathbb{R})$ *tel que* $\|v - Q_c\|_{H_x^1} \leq \delta$*, il existe* $h \in \mathbb{R}$ *et* $w \in H^1(\mathbb{R})$ *tels que* $v(\cdot + h) = Q_c + w$ *avec* $\langle w, Q_c'\rangle_{L^2} = 0$.

Remarque 16. *On cherche la jauge* g *telle que* $\|u(t) - g(t)Q_c\|_{H_x^1}$ *a une chance de rester petit. On doit prendre en compte l'invariance par translation donc on veut regarder* $\|u(t) - Q_c(\cdot + h(t))\|_{H_x^1} = \|u(t, \cdot + h(t)) - Q_c\|_{H_x^1}$*. L'idée est de choisir la bonne translation* $h(t)$ *pour que* $u(t, \cdot + h(t)) - Q_c$ *soit orthogonal à* Q_c' *(pour le produit scalaire* L^2*).*

4 Conclusion

On peut faire la même étude sur l'équation de KdV généralisée :

$$\partial_t u + u^p \partial_x u + \partial_{xxx} u = 0,$$

pour $p \geq 2$ (le cas $p = 1$ correspond à (KdV)).

Pour l'équation de KdV généralisée, les ondes solitaires Q_c existent pour $c > 0$. Elles sont stables pour $p < 4$ et instables pour $p > 4$. Pour le cas critique $p = 4$, on a explosion en temps fini dans $H_x^1(\mathbb{R})$.