

DE LA RECHERCHE À L'INDUSTRIE



Etude de l'hydrodynamique lagrangienne - application aux schémas centrés et décalés -

du 1 février au 31 juillet 2012

ENS Cachan | Clémentine Courtès | Mélanie Ingland
encadrées par Corinne Aymard et Christophe Fochesato

Cadre : Etude de l'hydrodynamique

■ Equations d'Euler compressibles en 2D

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} 1 dV = \int_{\Omega(t)} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} dV & \text{conservation du volume} \\ \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u} & \text{déplacement du maillage} \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho dV = 0 & \text{conservation de la masse} \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho \vec{u} dV = - \int_{\Omega(t)} \vec{\nabla} P & \text{conservation de la quantité de mouvement} \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho E dV = - \int_{\Omega(t)} \vec{\nabla} \cdot (P \vec{u}) dV & \text{conservation de l'énergie} \\ P = \mathcal{P}(\rho, e) & \end{array} \right.$$

■ Formalisme lagrangien : $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})$

Objectifs :

- Développement d'une plate-forme numérique pour comparer différents schémas numériques
- Réalisation de comparaisons
- Mise en évidence de certaines propriétés vérifiées par les schémas

- 1 Les différents schémas numériques
 - Deux familles de schémas
 - Discrétisation
 - Propriétés de conservation et d'entropie

- 2 Comparaison sur différents cas tests
 - Tube à choc de Sod
 - Sedov
 - Choc sur paroi oblique

- 3 Conclusion

■ Etude de deux familles de schémas :

- ▷ les schémas centrés (GLACE, EUCCLHYD) : $\rho, e, P, \vec{u}, \vec{x}$
- ▷ les schémas décalés (VNR, SGPC) : $\rho, e, P, \vec{u}, \vec{x}$

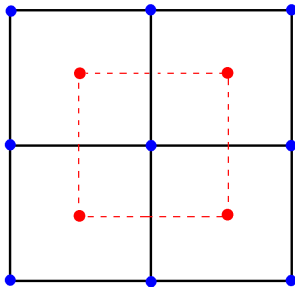


FIG.: Mailles primales et duales

■ GLACE ordre 1 espace et temps

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_p^{n+1} \\ \vec{u}_c^{n+1} \\ E_c^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}_p^n \\ \vec{u}_c^n \\ E_c^n \end{pmatrix} + \Delta t \begin{pmatrix} \vec{u}_p^n \\ \sum_{p \in \{c\}} \vec{F}_{cp}^n \\ \sum_{p \in \{c\}} \vec{F}_{cp}^n \cdot \vec{u}_p^n \end{pmatrix}$$

■ GLACE ordre 2 espace et temps**prédiction**

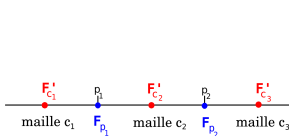
$$\begin{pmatrix} \vec{x}_p^{n+1,1} \\ \vec{u}_c^{n+1,1} \\ E_c^{n+1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}_p^n \\ \vec{u}_c^n \\ E_c^n \end{pmatrix} + \Delta t \begin{pmatrix} \vec{u}_p^n \\ \sum_{p \in \{c\}} \vec{F}_{cp}^n(\vec{x}_p) \\ \sum_{p \in \{c\}} \vec{F}_{cp}^n(\vec{x}_p) \cdot \vec{u}_p^n(\vec{x}_p) \end{pmatrix}$$

correction

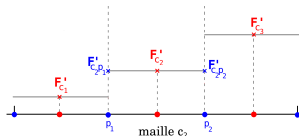
$$\begin{pmatrix} \vec{x}_p^{n+1} \\ \vec{u}_c^{n+1} \\ E_c^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}_p^n \\ \vec{u}_c^n \\ E_c^n \end{pmatrix} + \Delta t \begin{pmatrix} \frac{\vec{u}_p^n + \vec{u}_p^{n+1,1}}{2} \\ \sum_{p \in \{c\}} \frac{(\vec{F}_{cp}^n(\vec{x}_p) + \vec{F}_{cp}^{n+1,1}(\vec{x}_p))}{2} \\ \sum_{p \in \{c\}} \left(\frac{\vec{F}_{cp}^n(\vec{x}_p) + \vec{F}_{cp}^{n+1,1}(\vec{x}_p)}{2} \cdot \frac{\vec{u}_p^n(\vec{x}_p) + \vec{u}_p^{n+1,1}(\vec{x}_p)}{2} \right) \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_{cp} = \vec{F}'_{cp} + \vec{F}_p$$

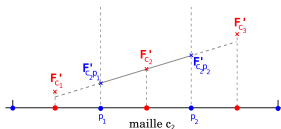
\vec{F}'_{cp} : force exercée par le nœud p sur la maille c .



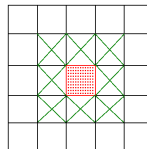
(a) Variables \vec{F}'_c et \vec{F}_p^n



(b) ordre 1 en espace : $\vec{F}'_{cp} \approx \vec{F}'_c$



(c) ordre 2 en espace : voir (1)



(d) Stencil

méthode des moindres-carrés :

$$\vec{\nabla} w_c = \operatorname{argmin}_{\vec{\nabla} w_c} \sum_{c' \in \{c\}} [w_{c'} - w_c - \vec{\nabla} w_c \cdot (x_{c'} - x_c)]^2 \quad (1)$$

■ VNR

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_p^{n+1} \\ \vec{u}_c^{n+\frac{1}{2}} \\ e_c^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}_p^n \\ \vec{u}_c^{n-\frac{1}{2}} \\ e_c^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta t \vec{u}_p^{n+\frac{1}{2}} \\ \Delta t \sum_{p \in \{c\}} \vec{F}_{cp}^n \\ -\frac{(P_c^n + Q_c^n)}{m_c} (\Delta V)_c^n \end{pmatrix}$$

- ▷ Nécessité d'une pseudo-viscosité Q_c^n pour :
- étaler les chocs , régulariser la solution,
 - stabiliser le schéma.

■ SGPC**prédiction**

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_p^{n+1,1} \\ e_c^{n+1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}_p^n \\ e_c^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta t \vec{u}_p^n \\ -\frac{(P_c^n + Q_c^n)}{m_c} (\Delta V)_c^n \end{pmatrix}$$

correction

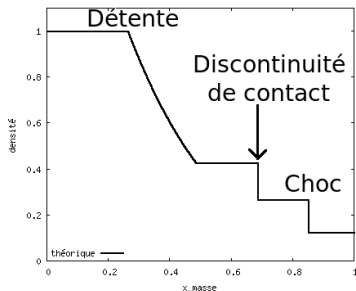
$$\begin{pmatrix} \vec{x}_p^{n+1} \\ \vec{u}_c^{n+1} \\ e_c^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}_p^n \\ \vec{u}_c^n \\ e_c^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta t \frac{\vec{u}_p^n + \vec{u}_p^{n+1}}{2} \\ \Delta t \sum_{p \in \{c\}} \frac{\vec{F}_{cp}^n + \vec{F}_{cp}^{n+1,1}}{2} \\ -\frac{(P_c^n + Q_c^n) + (P_c^{n+1,1} + Q_c^{n+1,1})}{2m_c} (\Delta V)_c^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

- Mise en évidence de propriétés théoriques sur tous les schémas et exhibition des termes d'erreur si nécessaire :
 - ▷ conservation de la masse,
 - ▷ conservation de la quantité de mouvement
 - ▷ conservation de l'énergie
 - ▷ vérification du 2nd principe de la thermodynamique
 - ▷ préservation du caractère isentropique
- Mesure de l'ordre numérique

GLACE	EUCCLHYD	VNR	SGPC
1.57	1.29	1.93	2.20

PARAMÈTRES

Matériau 1	Matériau 2
$\rho_d = 0.125 \text{ g.cm}^{-3}$	$\rho_g = 1 \text{ g.cm}^{-3}$
$p_d = 0.1 \text{ barye}$	$p_g = 1 \text{ barye}$
$\vec{u}_d = \vec{0} \text{ cm.s}^{-1}$	$\vec{u}_g = \vec{0} \text{ cm.s}^{-1}$
$\gamma = 1.4$	
$t_{\text{final}} = 0.2 \text{ s}$	
CFL = 0.5	
Maillage = 5000×2	

FIG.: profil théorique de densité à t_{final}

- **Objectif** : comparer les schémas à une solution théorique sur trois types d'ondes :
 - détente
 - discontinuité de contact
 - choc

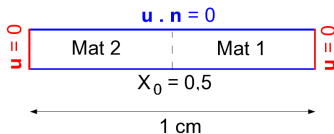
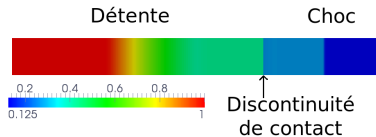
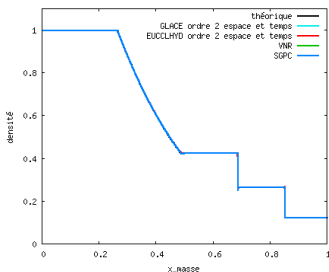


FIG.: maillage utilisé

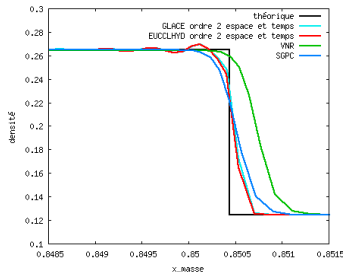


(a) densité

FIG.: Sod à t_{final}



(a) comparaison des 4 schémas d'ordre 2



(b) Zoom sur le choc

FIG.: Sod : Profil de densité à t_{final}

PARAMÈTRES	
densité	$\rho_0 = 1 \text{ g.cm}^{-2}$
pression	$P_0 = 10^{-5} \text{ bary}$
vitesse	$\vec{u} = \vec{0} \text{ cm.s}^{-1}$
énergie	$\mathcal{E}_0 = 8 \text{ erg}$
γ	5/3
t_{final}	0.1 s
CFL	0.1
MAILLAGE POLAIRE	
nb_couches	40
nb_secteurs	20

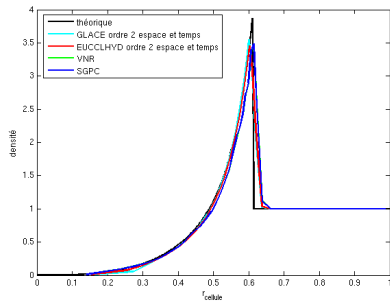
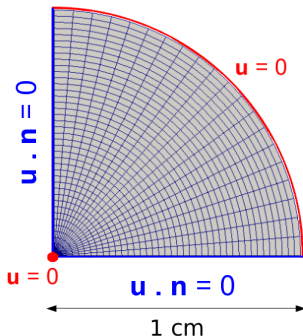


FIG.: Sedov à t_{final} : profil de densité

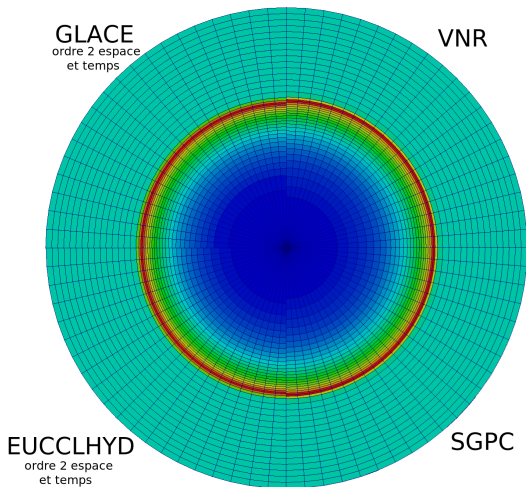
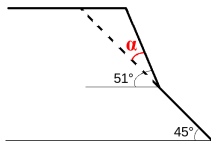


FIG.: Sedov : densité à t_{final}

PARAMÈTRES	
densité	$\rho_0 = 16.654 \text{ g.cm}^{-3}$
pression	$P_0 = 1. 10^6 \text{ baryes}$
vitesse	0 cm.s^{-1}
γ	1.67
t_{final}	$6.6 10^{-6} \text{ s}$
CFL	0.34
$u_{\text{imposée}}$	$45490.4356301 \text{ m.s}^{-1}$
Loi d'état	Mie-Grüneisen

Mesure de α à t_{final} :

α = inclinaison



$$\alpha_{\text{théo}} = 6.9857^\circ$$

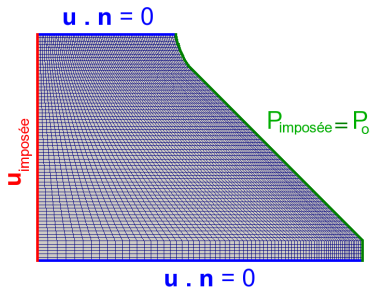


FIG.: Choc sur paroi oblique : maillage initial et conditions aux limites

- **Objectif** : - étudier les schémas sur un cas test à effets 2D.

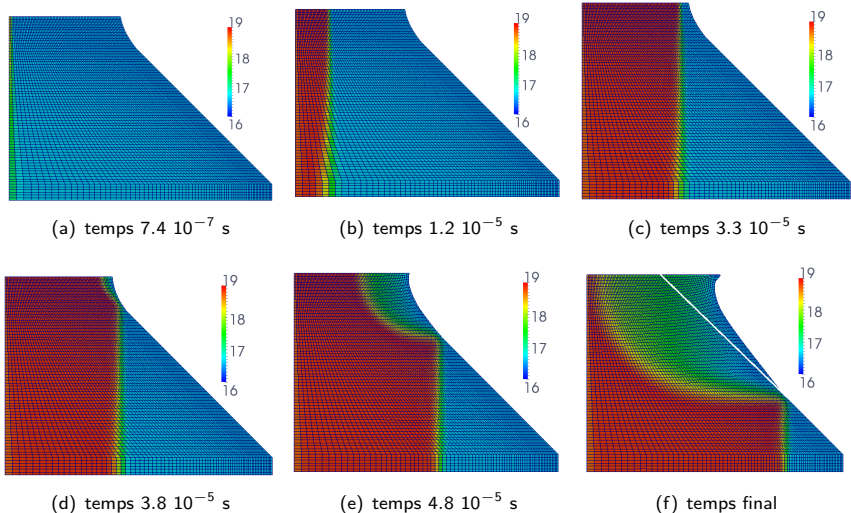
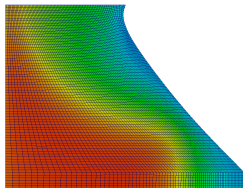
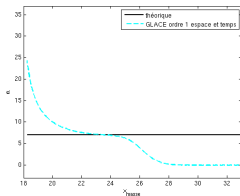
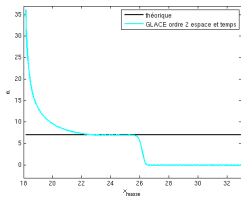
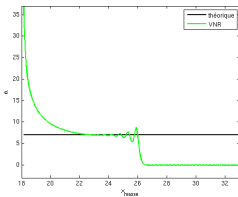
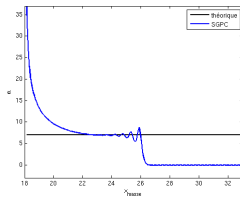


FIG.: densité : GLACE ordre 2 espace et temps

(a) maillage GLACE à t_{final} (b) GLACE/EUCCLHYD ordre 1
espace et temps(c) GLACE/EUCCLHYD ordre 2
espace et temps

(d) VNR



(e) SGPC

- Mise en place d'un code numérique, (GLACE ordre 2 espace et temps, EUCCLHYD ordre 2 espace et temps, VNR, SGPC, SGPC2)
- Réalisation de comparaisons sur des cas tests à symétrie 1D et d'autres à effets bidimensionnels,
- Mise en évidence de certaines propriétés vérifiées par les schémas et exhibition, si nécessaire, des termes d'erreur.

Aspects humains

- Accueil chaleureux de la part de toute l'équipe
- Rencontres nombreuses et diversifiées (ingénieurs, chercheurs, informaticiens, thésards ...)

Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives
Centre de Bruyères-le-Châtel | 91297 Arpaçon Cédex
T. (+33) 01.69.26.40.00

Etablissement public à caractère industriel et commercial | RCS Paris B 775 685 019