Analyse.

Fonctions de plusieurs variables L2 S3 MPA

Thomas Delzant

Prologue

Ce cours est un cours sur les fonctions de plusieurs variables. Il ne contient rien d'original.

Pour l'écrire, nous sommes parti du livre de B. Démidovich *Recueil d'exercices et de problèmes d'analyse mathématique*. Traduit du russe, Mir Moscou 1977, Ellipses 1994. Ce livre, assez exceptionnel, contient une liste fantastique d'exercices intéressants, d'indications de solutions et de rappels de cours. Il peut servir de base à tout étudiant de licence souhaitant maitriser les notions de l'analyse élémentaire. Nous avons repris la plupart de nos exercices des chapitres 2 et 3 de cet ouvrage.

Pour le cours, nous avons utilisé plusieurs ouvrages, en particulier :

J. Lelong Ferrand, J.-M. Arnaudiès, Analyse. Dunod 1996

F. Liret, D. Martinais, Analyse 2. Dunod, 1998

V. Komornik, Précis d'analyse réelle. Topologie, calcul différentiel et méthode d'approximation, Ellipses, 2001.

Plusieurs exercices sont pris dans « Exercices d'analyse », J. Rivaud Vuibert 1959, qui contient beaucoup d'exemples venant de la mécanique.

Table des matières

Chapitre 1

Topologie de $\mathbb{R}^n$.

1.1. Notions fondamentales.

1.1.1. Rappel.

Une fonction sur un ensemble E à valeurs dans un ensemble F est la donnée d'une partie $D \subset E$ appelé *domaine de définition* est d'une partie $\Gamma \subset D \times F$ appelé *graphe* de f qui satisfait

$\forall x \in D \exists! y \in F, (x, y) \in \Gamma$

On note $f(x)$ l'unique point y tel que $(x, f(x)) \in \Gamma$

Exemple 1.1. La fonction $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ est bien définie sur le disque $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Son graphe est l'hémisphère $z \geqslant 0, z^2 + x^2 + y^2 = 1$

Le but de ce cours est d'étudier les fonctions définies sur un espace numérique $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$. Les questions que nous nous poserons sont par exemple : quelles sont les valeurs maximales de la fonction f, comment dessiner le graphe de f, comment écrire les ensembles $\{x \in E / f(x) = c\}$, appelés courbes de niveau de f, et d'autres questions très naturelles.

Dans l'exemple 1.1 les *courbes de niveau* de f sont des cercles $x^2 + y^2 = 1 - c^2$, et la *valeur maximale* de f et 1 atteinte au point $(0, 0)$.

Qu'appelle-t-on isotherme, isobare dans une carte météo?

Remarque 1.2. La notion de domaine de définition est souvent revue par les circonstances. On a une formule compliquée et on se demande pour quelle valeur cette formule est définie.

Exemple 1.3. $z(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$. La formule est bien définie si $x^2 + y^2 < 4$, c'est à dire à l'intérieur du disque centré en 0 et de rayon 2.

Pour comprendre cette fonction on dessine d'abord son domaine de définition et ensuite son graphe.

1.1.2. Composée de deux fonctions.

Si $f: E \rightarrow F$ a pour domaine de définition D et $g: F \rightarrow G$ a pour domaine de définition D', la fonction $g \circ f$ est définie sur $\{x \in D / f(x) \in D'\}$, elle vaut $g(f(x))$.

Il est souvent utile de décomposer une fonction comme composée pour l'étudier.

Exemple 1.4. $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ est la composée de $\frac{1}{\sqrt{1 - z}}$ et $z(x, y) = x^2 + y^2$, elle est définie sur l'intervalle $0 \leqslant z < 1$ et atteint son minimum pour $z(x, y) = 0$, c'est à dire en $(0, 0)$

DÉFINITION 1.5. *Si* $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est une fonction on appelle ligne ou courbe de niveau de* f *les « courbes »* $f(x, y) = c$. *Dans le cas d'une fonction de trois variables les ensembles* $f(x, y, z) = c$ *s'appellent les surfaces de niveau.*

Remarque 1.6. Météo France publie les courbes de niveau de la température ou de la pression, appelées les isothermes ou les isobares.

Exemple 1.7. On pose $f(x, y) = x^2 + y^2$. Les courbes de niveau de f sont les cercles centrés à l'origine.

1.1.3. Exercices.

Exercice 1.1. Une boite de chaussure a pour cotés x, y, z.

Quelle est son volume ? Quelle est l'aire de sa surface ? On admet qu'il y a une boite d'aire minimale ayant un volume donné. Quelle est cette aire ?

Indication. Si on fixe le volume v, alors $z = \frac{v}{x y}$. Du coup l'aire devient une fonction $A(x, y)$. Si en un point (x_0, y_0) la fonction est minimale, alors les deux fonctions $x \to A(x, y_0)$ et $y \to A(x_0, y)$ sont minimale.

Exercice 1.2. Dessiner le domaine de définition de la fonction $z(x, y) = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{x y}$

Exercice 1.3. On considère une pyramide égyptienne de base un carré de coté b et de hauteur h. Son volume est donc $V = \frac{1}{3} b^2 h$. Exprimer V en fonction de sa hauteur et de la longueur de l'une de ses grandes arêtes.

Exercice 1.4. Domaine de définition des fonctions (en fait des formules) suivantes (avec dessin S.V.P.) :

$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $f(x, y) = \sqrt{y \sin(x)}$
$f(x, y) = 1 + \sqrt{-(x^2 - y^2)}$, $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$
$f(x, y) = \ln(x + y)$ $f(x, y) = \operatorname{arct} \frac{x - y}{1 + x^2 y^2}$
$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$
$f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$

Plus généralement si $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $g: B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ sont définies sur des sous-ensembles A, B. Démontrer que le domaine de définition de $g \circ f$ est $f^{-1}(B) \cap A$. Déterminer, f, g A, B dans les exemples précédents.

Exercice 1.5. Lignes de niveau des fonctions
$\ln(x^2 + y)$, $f(y - 3x)$, $\arcsin(x y)$, $f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$

Plus généralement si $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g: B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, les lignes de niveau de $g \circ f$ sont contenues dans celle de f.

Exercice 1.6. * Inégalité de Young. Nous allons démontrer ladite inégalité. On suppose $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$x > 0, y > 0 \Rightarrow x. y \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$

Dans le plan réduit à un repère $0x, y$, on considère la fonction définie par $x > 0, y > 0$ $f(x, y) = x y$
Dessiner les lignes de niveau $f(x, y) = 1$, $f(x, y) = 2$ et plus *gén*éralement $f(x, y) = c$.

On veut étudier la restriction de la fonction $F(x, y) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ à la courbe de niveau $f(x, y) = c$. En paramétrant cette courbe par $x = (c)^{1/p} t$, $y = c^{1/q}(1/t)$, avec $t \in]0, \infty[$, démontrer que son minimum est atteint en un seul point.

En déduire le résultat.

1.2. NORMES SUR UN ESPACE VECTORIEL.

1.2.1. Définitions.

Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, une norme sur E est une application notée $\|.\|$ de E à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ qui vérifie les trois axiomes

1. Homogénéité : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E$, $\|\lambda. x\| = |\lambda| \|x\|$

2. Inégalité triangulaire $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$
3. Séparation : $\|x\|=0 \Rightarrow x=0$.

Par exemple si E est l'espace usuel de dimension 3, on peut choisir pour norme du vecteur x la distance euclidienne entre l'origine 0 et x.

Nous appellerons *sphère unité* de E l'ensemble des vecteurs de norme 1, et boule unité l'ensemble $B(0,1)=\{x/\|x\|\leqslant 1\}$. Plus généralement :

Définition 1.8. *La boule ouverte (resp. fermée) de centre x et de rayon r est $B(x,r)=\{y/\|y\|<r\}$ (resp. $\bar{B}(x,r)=\{y/\|y\|\leqslant r\}$).*

Noter que si $r=0$, la boule ouverte est vide, la boule fermée est réduite à son centre.

Notons que, si $v\neq 0$, $\frac{v}{\|v\|}$ est toujours de norme 1 d'après l'axiome de séparation.

De plus, la demi droite $[0,\mathbb{R}^+.v[$ rencontre la sphère unité en un unique point, $\frac{v}{\|v\|}$, grâce à l'axiome d'homogénéité. Ainsi, une norme est bien définie par sa sphère unité, ou par sa boule unité.

1.2.2. Exemples dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^n$.

Dans $\mathbb{R}^2$, nous avons trois normes très sympathiques.

La norme $\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|_1 = |x|+|y|$
La norme $\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|_\infty = \mathrm{Sup}\,(|x|,|y|)$
Et la norme euclidienne $\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$

Dans les trois cas, les axiomes d'homogénéité et de séparation sont assez immédiats à vérifier. Seuls l'inégalité triangulaire demande un petit peu de travail. Considérons donc deux vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et essayons.

1. $\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right\|_1 = |x+x'|+|y+y'| \leqslant |x|+|y|+|x'|+|y'| = \left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|_1 + \left\|\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right\|_1$
2. $\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right\|_\infty = \mathrm{Sup}\,(|x+x'|,|y+y'|) \leqslant \mathrm{Sup}\,(|x|+|x'|,|y|+|y'|) \leqslant \left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|_\infty + \left\|\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right\|_\infty$

3. Pour la norme euclidienne, il faut se convaincre de l'inégalité triangulaire usuelle.
Pour cela considérons un triangle A,B,C tel que $\overrightarrow{AB}=u, \overrightarrow{BC}=v$ et soit $H\in[AC]$ le pied de la hauteur h issue de B. Par Pythagore $\|h\|^2+\|AH\|^2=\|u\|^2$ (donc $\|AH\|\leqslant\|u\|$) et $\|h\|^2+\|HB\|^2=\|v\|^2$ (donc $\|\mathrm{HB}\|\leqslant\|v\|$)
Donc $\|u+v\|=\|AH\|+\|HB\|\leqslant\|u\|+\|v\|$

Ces exemples se généralisent facilement dans l'espace $\mathbb{R}^n$ avec les trois normes

La norme $\left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix}\right\|_1 = \Sigma_{i=1}^n |x_i|$

La norme $\left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix}\right\|_\infty = \mathrm{Sup}\,_i(|x_i|)$

Et la norme euclidienne $\left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix}\right\|_2 = \sqrt{\Sigma_{i=1}^n x_i^2}$

Pour démontrer qu'il s'agit bien de normes, on fait exactement comme le cas de la dimension 2. Pour la norme euclidienne, noter que le théorème de Pythagore reste vrai en toute dimension.

Il est important de savoir comparer les normes.

PROPOSITION 1.9. *Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on a*

1. $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty$
2. $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty$

Cela invite à poser la

DÉFINITION 1.10. *Deux normes $\|.\|, \|.\|'$ définie sur un espace vectoriel sont dites équivalentes si il existe deux constantes a, b telles que pour tout x, on ait $\|x\| \leqslant a\|x\|'$ et $\|x\|' \leqslant b\|x\|$.*

PROPOSITION 1.11. *Les trois normes $\|.\|_1, \|.\|_2, \|.\|_\infty$ sont équivalentes.*

1.2.3. Exercices.

Exercice 1.7. Si $B(x, r)$ et $B(x', r')$ sont deux boules ouvertes, construire une application affine bijective transformant la première dans la seconde. Même question pour deux boules fermées.

Exercice 1.8. Dessiner, dans $\mathbb{R}^2$ les boules $B(0,1) = \{(x, y) / N(x, y) < 1\}$ pour les normes $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$, $\|(x, y)\|_\infty = \mathrm{Sup}(|x|, |y|)$, $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Inventer d'autres normes et dessiner leur boule unité.

Exercice 1.9. On identifie $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$, montrer que le module défini une norme sur $\mathbb{C}$.

Montrer que sur $\mathbb{C}^n$ les fonctions $N_1\begin{pmatrix} z_1 \\ \\ z_n \end{pmatrix} = \Sigma_{i=1}^n |z_i|$, $N_\infty\begin{pmatrix} z_1 \\ \\ z_n \end{pmatrix} = \mathrm{Sup}_i |z_i|$et $N_2\begin{pmatrix} z_1 \\ \\ z_n \end{pmatrix} = \sqrt{\Sigma_{i=1}^n |z_i|^2}$ sont des normes.

Exercice 1.10. Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, et A une application linéaire de E dans F.

1.On suppose que F est équipé d'une norme $\|.\|$. Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

i. L'application $E \to \mathbb{R}$ définie par $N(x) = \|Ax\|$ est une norme

ii. L'application linéaire A est injective.

2. On suppose que A est injective, $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$ de sorte qu'une application linéaire est une matrice $A = (a_{ji})_{1 \leqslant j \leqslant m, 1 \leqslant i \leqslant n}$.

On suppose que $\|y\| = \mathrm{Sup}_j(|y_j|)$, démontrer que $N\begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \mathrm{Sup}_j |\Sigma a_{ji} x_i|$

4. Démontrer que la norme N et la norme $\|.\|_\infty$ sont équivalentes.

Exercice 1.11. * On dit qu'un sous ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est **convexe** si pour tout couple de point x, y de cet ensemble le segment $[x, y]$ est contenu dans C. Autrement dit si pour tout $t \in [0, 1], tx + (1 - t)y$ est dans C. On muni $\mathbb{R}^n$ d'une certaine norme $\|.\|$.

1. Démontrer que la boule unité $\bar{B} = \{x / \|x\| \leqslant 1\}$ est convexe.
2. Démontrer que la boule $\bar{B}(x_0, R) = \{x / \|x - x_0\| \leqslant R\}$ est convexe
3. Construire une bijection naturelle entre $\bar{B}$ et $\bar{B}(x_0, R)$
4. Si $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ démontrer que $\frac{1}{\|x\|} = \mathrm{Sup}\{t \in \mathbb{R}^+ / tx \in B\}$
5. Soit C un partie convexe de $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe deux constantes ε, A tel que $B(0, \varepsilon) \subset C \subset B(0, A)$ Démontrer que pour tout x non nul $\{t \in \mathbb{R}^+ / tx \in C\}$ est non vide, majoré.
6. * Sous la même hypothèse on pose $j(x) = (\mathrm{Sup}\{t \in \mathbb{R}^+ / tx \in C)^{-1}$, et $j(0) = 0$ Démontrer que $j(x + y) \leqslant j(x) + j(y)$ et que si $\lambda > 0$ $j(\lambda x) = \lambda j(x)$
7. Montrer que si de plus $C = -C$, alors j est une norme.

1.3. Topologie.

On tout ce paragraphe ou fixe un espace vectoriel normé $E, \|.\|$. On suppose que $\|.\|$ est équivalente à l'une des normes déjà étudiées. Nous démontrerons en fait plus tard que toutes les normes sont équivalentes.

Etant donnés deux points x, y de E, la norme $\|x-y\|$ s'appelle la **distance** de x à y ; on la note souvent $d(x,y)$.

1.3.1. Ouverts, voisinages.

Définition 1.12. *Une partie V de E est un voisinage de x_0 si il existe un $r>0$ tel que $B(x_0,r)\subset V$.*

Nous noterons $\mathcal{V}(x_0)$ l'ensemble de tous les voisinages de x_0.

Exemple 1.13. Les boules ouvertes $B(x_0,r)$ sont des voisinages de x_0

Exemple 1.14. Si $y\in B(x_0,r)$, alors $B(x_0,r)\in\mathcal{V}(y)$.

Proposition 1.15. *Si N est une norme équivalente à $\|.\|$, alors N et $\|.\|$ ont les mêmes voisinages.*

Démonstration. On va montrer qu'un voisinage de x_0 pour la norme N est aussi un voisinage pour la norme $\|.\|$. Soit V un tel voisinage alors il existe un r tel que $V\supset B_N(x_0,r)=\{x/N(x-x_0)<r\}$. Comme les deux normes sont équivalentes, il existe un A tel que $N(x)<A\,\|x\|$. Alors $B_N(x_0,r)$ contient $B_{\|.\|}\big(x_0,\frac{r}{A}\big)$. en effet si $\|y-x_0\|<r/A$, alors $N(y-x_0)<r$. □

C'est très commode pour nous parce que les boules dépendent des normes, mais pas les voisinages.

Proposition 1.16. *L'ensemble $\mathcal{V}(x_0)$ des voisinages de x_0 satisfait.*

1. *L'ensemble vide n'est pas un voisinage de x_0.*
2. *L'intersection de deux voisinages de x_0 est un voisinage de x_0.*
3. *Si V est un voisinage de x_0 et $W\supset V$, alors W est un voisinage de x_0.*

Remarque 1.17. On peut écrire ça avec des quantificateurs.
$\varnothing\in\mathcal{V}(x_0)$
$\forall V,W\in\mathcal{V}(x_0), V\cap W\in\mathcal{V}(x_0)$
$\forall V\in\mathcal{V}(x_0), \forall W\in\mathcal{P}(E), W\supset V\Rightarrow W\subset\mathcal{V}(x_0)$
Ça n'aide pas beaucoup à expliquer la situation, mais ça fait savant.

Remarque 1.18. Une famille de parties satisfaisant ces axiomes s'appelle un *filtre*. L'ensemble $\mathcal{V}(x_0)$ est souvent appelé *le filtre des voisinages de x_0*.

Définition 1.19. *Une partie O de E est un ouvert si c'est un voisinage de tout ses points.*

Proposition 1.20. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

i. *O est un ouvert*
ii. $\forall x\in O, \exists V\in\mathcal{V}(x), V\subset O$
iii. $\forall x\in O, \exists r>0\, B(x,r)\subset O$

Démonstration. $i\Rightarrow ii$ est la définition du mot ouvert, puisque ii veut dire que pour tout x on peut trouver un voisinage de x contenu dans O et donc que O est un voisinage de x.

$ii \Rightarrow iii$ est le définition de voisinage : si V est un voisinage de x alors il existe un $r>0$ tel que $V \supset B(x,r)$. Et $iii \Rightarrow i$, car si O satisfait iii, c'est un voisinage de tous ses points. □

1.3.2. Suites convergentes.

On rappelle qu'une suite d'éléments d'un ensemble E est une application de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$ à valeurs dans E; au lieu de noter $x(n)$ la valeur au point n de la suite, on la note plutôt x_n. La suite s'écrit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On va étudier ici les suites à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie.

Si c'est $\mathbb{R}^2$ une suite est une suite de points du plan que l'on note $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}}$. Dans $\mathbb{R}^3$ on peut la noter (x_n, y_n, z_n), ou $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. Dans $\mathbb{R}^p$ soit on la note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, soit si l'on veut mettre des coordonnées $(x_{1,n}, ...x_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$, ou $\begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \\ \\ x_{p,n} \end{pmatrix}$.

La définition utile est celle de convergence dans un espace vectoriel normé.

DÉFINITION 1.21. *On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l si pour tout voisinage V de l, il existe un entier n_0 tel que si $n \geqslant n_0$, $x_n \in V$. Le vecteur l s'appelle alors **la** limite de la suite.*

L'intérêt de cette définition, c'est qu'elle marche pour toutes les normes à la fois (pourvues qu'elles soit équivalentes : en effet deux normes équivalentes définissent les mêmes voisinages.

PROPOSITION 1.22. *La limite d'une suite, si elle existe, est unique.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il y ait deux limites l, l' distinctes et soit $0 < r < \|l - l'\|/2$. Grâce à l'inégalité triangulaire, on voit que les deux boules ouvertes $B(l,r)$ et $B(l',r)$ sont disjointes. Il est donc impossible que l'on ait simultanément $\|x_n - l\| < r$, $\|x_n - l'\| < r$. □

PROPOSITION 1.23. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

i. *La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.*

ii. *Pour tout ouvert O contenant l, il existe un entier n_0 tel que si $n \geqslant n_0$ $x_n \in 0$.*

iii. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geqslant n_0 \Rightarrow \|x_n - l\| < \varepsilon$.

Remarque 1.24. Le iii peut aussi s'exprimer en français. Pour tout ε (sous entendu arbitrairement petit), il existe un entier à partir duquel la distance de x_n à l est inférieure à ε. C'est assez utile pour les calculs numériques. Si ε est la plus petit précision donnée par un ordinateur, par exemple 10^{-30}, on voit que si $n > n_0$ les 30 premières décimales de x_n vont être constante.

Démonstration. On démontre successivement $i \Rightarrow ii \Rightarrow iii \Rightarrow i$.

$i \Rightarrow ii$ Car tout ouvert contenant l est un voisinage de l.
$ii \Rightarrow iii$. Je suppose donc que ii est réalisée. M'est donné $\varepsilon > 0$, je dois trouver un entier n_0 tel que si $n > n_0$, $\|x_n - l\| < \varepsilon$. Je sais que l'ensemble $B(l, \varepsilon)$ est un ouvert contenant l. Donc cet entier existe.
$iii \Rightarrow i$. Soit V un voisinage de l. Par définition, il existe un ε tel que $B(l,\varepsilon) \subset V$. En appliquant iii, je vois qu'il existe un n_0 tel que si $n \geqslant n_0$, $\|x_n - l\| < \varepsilon$, et alors $x_n \in V$. □

En regardant de près la condition iii, nous en déduisons

PROPOSITION 1.25. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

i. *la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l*

ii. la suite (de nombres réels) des distances $\|x_n - l\|$ *converge vers 0.*

iii. $\|x_n - l\| = o(1)$ *(quand* $n \to +\infty$*), ou* $x_n - l$ *converge vers 0.*

En fait, dans un espace vectoriel de dimension p, rapporté à une base une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est souvent définie par ses coordonnées $x_n = (x_{1,n}, \ldots . x_{p,n})$

Proposition 1.26. *La suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $l = (l_1, \ldots . l_p)$ *si et seulement si pour tout* $i = 1, 2, \ldots p$ *les coordonnées* $x_{i,n}$ *forment une suite qui converge vers* l_i*.*

Par soucis de simplicité, nous nous mettons dans le cas de $\mathbb{R}^2$ et nous étudions la convergence de (x_n, y_n) vers (a, b). Choisissons comme norme la norme $\|.\|_\infty$

Une application importante de cette proposition est le critère de Cauchy[1.1] pour la convergence d'une suite.

Définition 1.27. *La suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 / \forall p, q \geqslant n_0, \|x_q - x_p\| < \varepsilon$$

Proposition 1.28. *Une suite convergente est de Cauchy.*

Proposition 1.29. *Dans un espace vectoriel de dimension finie, toute suite de Cauchy est convergente.*

Démonstration. Cette proposition résulte du résultat démontré en première année dans le cas de la dimension 1. Il suffit de vérifier coordonnées par coordonnées. Nous en donnerons une seconde démonstration un peu plus tard dans le cours à partir de l'idée de compacité. □

Remarque 1.30. Très souvent les objets mathématiques sont définis non pas par des formules exactes, mais par des suites (ou des séries). Pour démontrer que ces suites convergent, on vérifie le critère de Cauchy. Par exemple le nombre e est défini par la suite de Cauchy $\Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}$. Si x est un nombre réel son développement décimal $x = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{10^k}$, avec $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $d_k \in [[1, 9]]$ est en fait une façon de dire que x est défini par la suite de Cauchy $x_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{10^k}$. Notons en effet que si $m \geqslant n$ $|x_n - x_m| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{1}{10^n}$.

Quand on a une suite de points p_n, pour démontrer qu'elle converge, soit on « connait » sa limite l et on essaye de démontrer que la suite $\|l - p_n\|$ tend vers 0, soit on n'a aucune idée de sa limite, et alors on essaye de vérifier le critère de Cauchy.

On a aussi une notion de suite bornée, ou de suite convergente vers $+\infty$

Définition 1.31. *La suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée si il existe un nombre* A *tel que pour tout* n*,* $\|x_n\| \leqslant A$*.*

Elle converge vers ∞ *si* $\|x_n\| \to +\infty$*, autrement dit si pour tout* A *il existe un entier* n_0 *tel que si* $n \geqslant n_0$*, alors* $\|x_n\| \geqslant A$*.*

Question. Donner un exemple de suite ni bornée ni qui tend vers ∞.

Proposition 1.32. *La suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée si toutes ses suites coordonnées* $(x_{i,n})_n$ *le sont.*

Remarque 1.33. Dans la recherche récente, on a beaucoup étudier les suite récurrentes $z_{n+1} = F(z_n)$, ou F est une fonction holomorphe. Les ensembles de Julia sont ainsi définis. Si $c \in \mathbb{C}$, et $F(z) = z^2 + c$, alors $J_c = \{z /$ la suite récurrente $z_{n+1} = F(z_n)$ est bornée.$\}$

Comme dans le cas de nombre réels, on parle facilement de sous-suite ou de suite extraite.

1.1. Augustin Louis Cauchy 1789-1857. Auteur de 800 articles et 7 livres.

DÉFINITION 1.34. *Si* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de* E *et si* $i\to n_i$ *est une injection de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$, *la suite* $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ *est une suite extraite de la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque si $\mathbb{N}'\subset\mathbb{N}$ est un sous ensemble infini, il existe une unique injection de $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ croissante et dont l'image est I : $i(k)$ est simplement le $k-$ième élément de i.

NOTATION 1.35. *Au lieu de noter* $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ *une suite extraite de la suite* (x_n), *on peut avoir intérêt à la noter* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$. *Dans ce cas, sa limite, si elle existe, s'écrit* $\lim_{n\to\infty,n\in\mathbb{N}'}x_n$

Exemple : $\lim_{n\to\infty, n\,\text{pair}}(-1)^n=1$.

1.3.3. Points d'accumulation. Ensembles fermés, ouverts.

DÉFINITION 1.36. *Si* $A\subset E$ *est un sous ensemble, un point* p *de* E *est d'un point d'accumulation de* A *si il existe une suite d'éléments de* A *qui converge vers* p. *On dit aussi que* p *est adhérent à* A. *L'ensemble des points d'accumulation de* A *s'appelle l'adhérence de* A, *et est notée* $\bar{A}$.

Exemple 1.37. Tout point de A est un point d'accumulation de A, autrement dit $A\subset\bar{A}$. Si a est dans A, la suite constante $a_n=a$ converge vers a.

Si $A=\{(x,y)/x>0,y\geqslant 0,x>y\}$, l'adhérence de A est $\{(x,y)/x\geqslant 0,y\geqslant 0,x\geqslant y\}$.

DÉFINITION 1.38. *Un sous-ensemble* $A\subset E$ *est dit fermé si* $A=\bar{A}$

PROPOSITION 1.39. *Soit* $A\subset E$ *un sous-ensemble. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i. *A est fermé.*

ii. *Toute suite d'éléments de A qui converge dans E a sa limite dans A.*

iii. $\forall p\in A^c\quad\exists\varepsilon>0$ *tel que* $B(p,\varepsilon)\cap A=\varnothing$

iv. *Le complémentaire* A^c *de* A *est ouvert.*

Démonstration. $i\Rightarrow ii$ est juste la définition. Pour $ii\Rightarrow iii$, on considère un point p qui n'est pas dans A. Démontrons qu'il existe un $\varepsilon>0$ tel que $B(x,\varepsilon)\cap A=\varnothing$. Sinon pour chaque entier n il existe un point x_n à une distance $<1/n$ de a. La suite x_n converge vers a. L'implication $iii\Rightarrow iv$ est la définition de ouvert. Pour $iv\Rightarrow i$, on raisonne en démontrant la contraposée. On suppose que A n'est pas fermé. Il existe donc une suite a_n d'éléments de A qui converge vers un élément $p\in A^c$. Par construction, quel que soit $\varepsilon>0$, il y a au moins un terme de la suite a_n dans $B(p,\varepsilon)$ donc quel que soit $\varepsilon>0, B(p,\varepsilon)\cap A\neq 0$ et $B(p,\varepsilon)$ n'est pas contenue dans A^c. □

En résumant, on obtient.

PROPOSITION 1.40. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i. *A est un ouvert.*

ii. *Pour tout point* p *de* A *il existe un* $\varepsilon>0$ *tel que* A *contient* $B(p,\varepsilon)$.

iii. *A est un voisinage de tous ses points.*

iv. A^c *est fermé.*

v. *Si* x_n *est une suite de point de* A^c *qui converge a sa limite dans* A^c.

1.3.4. Exercices

Exercice 1.12. Si tout voisinage de x est un voisinage de y alors $x=y$.

Exercice 1.13. Après les avoir dessiné, déterminer si les ensembles suivants sont ouverts dans $\mathbb{R}^{2\cdot}$
$x>0, y>0$
$x>y^2$
$x\leqslant 0, y<4$
$y^2-x^2>-1$
$x^2+y^2\geqslant 4, x>0, y>0$

Exercice 1.14. L'intersection de deux ouverts est un ouvert. La réunion de deux ouverts est un ouvert.

Exercice 1.15. Soit x_n une suite d'éléments de E, et $l\in E$. Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

i. x_n converge vers l

ii. $\forall\varepsilon>0, \exists n_0/n\geqslant n_0\Rightarrow \|x_n-l\|<123\varepsilon$

iii. $\forall\varepsilon>0, \exists n_0/n\geqslant n_0\Rightarrow \|x_n-l\|<12\sqrt{\varepsilon}$

Exercice 1.16. Démontrer l'équivalence entre :
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite qui converge vers ∞.

Exercice 1.17. Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, alors la suite x_n+y_n n'est pas bornée.

Exercice 1.18. Si les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de limites respectives x^* et y^*, alors la somme x_n+y_n converge vers x^*+y^*. Si de plus λ_n est une suite de réels qui converge vers λ^*, alors $\lambda_n x_n$ converge vers λx^*.

Exercice 1.19. Calculer les adhérences des sous ensembles définis à l'exercice 1.13.

Exercice 1.20. Les boules fermées sont des fermés.

Exercice 1.21. Distance à une partie. Si $A\subset E$, on pose $d(.,A)\colon E\to\mathbb{R}^+$ la distance à E définie par $d(x, A)=\operatorname{Inf}_{y\in A}\|x-y\|$. Démontrer que $\bar{A}=\{x/d(x,A)=0\}$

Exercice 1.22. Si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés, $\cap_{i\in I}F_i$ est un fermé.
Si $(O_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts, $\cup_{i\in I}O_i$ est un ouvert.
Quel est le rapport entre ces deux résultats ?

Exercice 1.23. * Ensemble de Julia[1.2]. On rappelle que $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ est muni de sa norme usuelle le module. Si $z=x+iy$ $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. On fixe un nombre complexe c, et on considère le polynôme $P(z)=z^2+c$, et on veut étudier la suite récurrente $z_n=P(z_{n-1})$ de premier terme fixé $z_0=w$. L'ensemble de Julia est par définition, l'ensemble des nombres complexes w telle que cette suite récurrente est bornée.
1. Si $c=0$, démontrer que $J_c=\{|z|\leqslant 1\}$
2. Démontrer que $|P(z)|\geqslant|z|^2-|c|$ et en déduire qu'il existe un nombre R tel que $|z|\geqslant R\Rightarrow|P(z)|\geqslant|z|+1$
3. En déduire que $J_c\subset\{|z|\leqslant R\}$
4. Démontrer que $w\in J_c$ si et seulement si pour tout entier n $|P^n(w)|\leqslant R$. On écrit $J_c=\cap_{n\geqslant 1}(P^n)^{-1}\{|z|\leqslant R\}$
5. En utilisant le fait qu'une intersection quelconque de fermés est un fermé, en déduire que J_c est un fermé contenu dans $\{|z|\leqslant R\}$

1.4. CONTINUITÉ ET LIMITES.

Dans cette partie on considère des espaces vectoriels de dimension finie $E, F, \ldots.$ munis de normes. On supposera que ces normes sont équivalentes aux normes usuelles sur $\mathbb{R}^d$ ou d désigne la dimension. Nous verrons un peu plus tard que c'est toujours le cas.

1.4.1. Limite d'une fonction en un point.

DÉFINITION 1.41. *Soit $A\subset\mathbb{R}^n=E$ un sous-ensemble et $f\colon A\to\mathbb{R}^m$ une fonction. Si $a\in\bar{A}$ est un point adhérent à A, on dit que la limite $\lim_{x\to a, x\in A}f(x)$ existe et vaut l si pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A qui converge vers a, la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et converge vers l.*

On garde les notations précédentes.

1.2. Gaston Julia, mathématicien français, 1893-1978, gravement blessé pendant la guerre de 14-18.

PROPOSITION 1.42. *Si* $f=(f_1,\ldots,f_m)$, $\lim_{x\to a, x\in A} f(x)$ *existe et vaut* $l=(l_1,\ldots l_m)$ *si et seulement si pour toutes les fonctions* f_i *les limites* $\lim_{x\to a, x\in A} f(x)$ *existe et vaut* l_i.

On garde les notations précédentes.

THÉORÈME 1.43. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

i. $\lim_{x\to a, x\in A} f(x)$ *existe et vaut* l.

ii. $\forall \varepsilon>0, \exists \alpha>0 / \forall x\in A, \|x-a\|<\alpha \Rightarrow \|f(x)-l\|<\varepsilon$.

Démonstration.

On démontre d'abord que $i\Rightarrow ii$, en considérant la **contraposée**.

Rappel. La contraposée de $i\Rightarrow ii$ est non$(ii)\Rightarrow$ non(i). Ces deux assertions ont la même valeur de vérité.

Avant de la démontrer, écrivons bien proprement la négation de ii.

$\exists \varepsilon_0>0 / \forall r>0 \exists x_r\in A/ \ \|x_r-a\|<r$ et $\|f(x_r)-l\|\geqslant \varepsilon_0$

On suppose non (ii).Il existe donc un ε_0 tel que blabla bla. Fixons donc cet ε_0. Comme pour chaque choix de r on peut trouver un point de A qui est à une distance $<r$ de a mais tel que $\|f(x_r)-l\|\geqslant\varepsilon_0$, on peut trouver, pour chaque entier n un point a_n dans A tel que $\|a_n-a\|<1/n$ et $f(a_n)$ ne converge pas vers l. Evidemment la suite a_n converge vers a, mais la suite $f(a_n)$ reste loin de l donc ne converge pas vers l.

La réciproque est plus facile.

On suppose ii et on veut démontrer que pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A qui converge vers a, la suite $(f(a_n))$ est convergente et converge vers l. Fixons donc une telle suite. M'est donné un $\varepsilon>0$, je dois trouver un entier n_0 tel que si $n>n_0$, $\|f(a_n)-l\|<\varepsilon$. Je sais que pour ce ε, il existe un $\alpha>0$ tel que $\|x-a\|<\alpha\Rightarrow\|f(x)-l\|<\varepsilon$. Fixons ce α. Comme a_n converge vers a, je sais qu'il existe un entier n_0 tel que $n>n_0\Rightarrow\|a_n-a\|<\alpha$. Cet entier n_0 répond à notre problème.

□

*Notation de Landau[1.3]

DÉFINITION 1.44. *Si f, g sont deux fonctions définies sur A et si* $x_0\in\bar{A}$, *on dit que* $f=o(g)$ *quand* x *tend vers* x_0 *si :*

$$\forall\varepsilon>0, \exists\alpha>0/\|x-x_0\|<\alpha\Rightarrow\|f(x)\|<\varepsilon\|g(x)\|.$$

Exemple 1.45. Les propriété suivantes sont équivalentes $\lim_{x\to x_o} f(x)=l$ et $\|f(x)-l\|=o(1)$ (quand $x\to x_0$).

DÉFINITION 1.46. *Si f, g sont deux fonctions définies sur A et si* $x_0\in\bar{A}$, *on dit que* $f=O(g)$ *quand* x *tend vers* x_0 *si* $\exists A>0$, $\exists\alpha>0/\|x-x_0\|<\alpha\Rightarrow\|f(x)\|\leqslant A\|g(x)\|$

Exemple 1.47. Si $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ et $f=O(g)$, alors $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$.

1.4.2. Continuité en un point.

De la même façon qu'on a défini les fonctions continues d'une variable réelle on définit les fonctions continues de plusieurs variables.

DÉFINITION 1.48. *Soit* $A\subset\mathbb{R}^n=E$ *un sous ensemble et* $f\colon A\to\mathbb{R}^m$ *une fonction. Si* $x_0\in A$, *on dit que* f *est continue au point* x_0 *si la limite* $\lim_{x\to x_0, x\in A} f(x)$ *existe et vaut* $f(x_0)$.

THÉORÈME 1.49. *Soit* $f\colon A\to\mathbb{R}^m$ *une fonction, et* $x_0\in A$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

i. La fonction f *est continue en* x_0.

1.3. Edmund Landau, mathématicien allemand 1877-1938. Expulsé de l'université de Göttingen 1933 par les nazis. La notation O avait été inventée par Bachmann, et la notation o par Landau.

ii. $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in A, \|x - x_0\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$.

iii. L'image réciproque de tout voisinage de $f(x_0)$ par f est l'intersection de A et un voisinage de x_0.

Remarque 1.50. Remarque. On peut aussi écrire (iii) avec des quantificateurs :
$\forall W \in \mathcal{V}(f(x_0)) \, \exists V \in \mathcal{V}(x_0) / f^{-1}(W) = V \cap A$

Démonstration. L'équivalence de i et ii résume immédiatement de l'équivalence de l'énoncé analogue pour les limites.

Démontrons que $ii \Rightarrow iii$. Soit $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$. Il existe donc un $\varepsilon > 0$ tel que la boule $B(f(x_0), \varepsilon)$ soit contenue dans V. Par ii il existe un α tel que si $x \in A \cap B(x_0, \alpha)$, $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$, donc $f(x) \in V$. L'image réciproque de V contient donc l'intersection de A et $B(x_0, \alpha)$, c'est donc bien l'intersection de A avec un voisinage de x_0.

Réciproquement si $\varepsilon > 0$ m'est donné, je remarque que $B(f(x_0), \varepsilon)$ est un voisinage de $f(x_0)$: son image réciproque est donc l'intersection de A et d'un voisinage de x_0. Cet ensemble contient l'intersection de A avec une boule ouverte $B(x_0, \alpha)$, pour un certain α. D'où le résultat. □

Corollaire 1.51. *Pour que la fonction f soit continue x_0 il faut et il suffit que pour toute suite qui $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers x_0, $f(x_n)$ converge vers $f(x_0)$.*

Démonstration. En effet on applique la définition sur les limites : on sait que f admet la limite l quand x tend vers x_0 si et seulement si pour toute suite qui $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers x_0, $f(x_n)$ converge vers l. □

Proposition 1.52. *Soit $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_m \end{pmatrix}$ une fonction, et $x_0 \in A$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i. Les m fonctions coordonnées $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ sont continues en x_0.

ii. La fonction f est continue en x_0.

Démonstration. Cela résulte de l'énoncé analogue pour les limites. □

1.4.3. Continuité.

La continuité en un point était une étape intermédiaire pour définir la continuité partout

Définition 1.53. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n = E$ un sous ensemble et $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction. On dit que f est continue si elle est continue en tout point de A.*

Evidemment une fonction $f = (f_1, \ldots f_m)$ est continue si et seulement si chacune des fonctions f_i l'est.

Exemple 1.54. Une fonction f est dite lipshitzienne[1.4] si il existe un nombre réel k tel que $\forall x$, $y \in A$, $\|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\|$. Si k est connu on dit que f est k-lipshitzienne

Proposition 1.55. *Une fonction lipshitzienne est continue.*

En effet quand $x \rightarrow x_0$ $\|f(x) - f(x_0)\| = O(\|x - x_0\|) = o(1)$

Proposition 1.56. *Les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ sont continues.*
$s(x, y) = x + y$
$p(x, y) = x.y$

Démonstration. On prend la norme usuelle $\|(x, y)\| = \text{Sup}\,(|x|, |y|)$
On note que s est $1 -$ lipshitzienne, donc continue.

1.4. En l'honneur de Rudolph Lipshitz, mathématicien allemand 1832-1903.

Pour démontrer que p l'est aussi fixons un point (x_0, y_0) de la boule ouverte $\mathrm{Sup}\,(|x|, |y|) < A$
On a $p(x, y) - p(x_0, y_0) = xy - x_0y_0 = (x - x_0)\, y + x_0(y - y_0)$
En prenant des valeurs absolues, $\|p(x, y) - p(x_0, y_0)\| \leqslant 2A\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = o(1)$ □

PROPOSITION 1.57. *Soit $f\colon A \subset E \to F$ et $g\colon B \subset F \to G$ deux fonctions. On suppose que $B \supset f(A)$.*
1. On suppose que $x_0 \in A$, quef est continue en x_0 et g en $f(x_0) \in B$. Alors $g \circ f$ est continue en x_0.
2. On suppose que f et g sont continues. Alors $g \circ f$ aussi.

Démonstration. Le point 2 résulte du point 1, puisque « continue » veut dire continue en tout point de A.

Pour 1 on donne deux démonstrations.

1. Soit $W \in \mathcal{V}(g(f(x_0)))$, alors il existe $V \in \mathcal{V}(f(x_0))/\ \ g^{-1}(W) = V \cap B$. Donc $f^{-1}(g^{-1}(W)) = f^{-1}(V)$ est bien l'intersection d'un voisinage de x_0 avec A.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Je dois trouver α tel que si $|x - x_0| < \alpha$ alors $|g \circ f(x) - g \circ f(x_0)| < \varepsilon$.
Je sais déjà que, comme g est continue en $f(x_0)$ il existe un $r > 0$ tel que :
(1) si $|y - f(x_0)| < r$ alors $|g(y) - g \circ f(x_0)| < \varepsilon$.
Mais f est continue en x_0 donc je peux trouver un $\alpha > 0$ tel que
(2) si $|x - x_0| < \alpha \quad |f(x) - f(x_0)| < r$
Fixons un tel α. Si on combine (1) à (2) on obtient le résultat voulu. □

Si on combine bien les propositions que nous venons d'obtenir, on peut démontrer que toutes les fonctions obtenues à partir de formules sympathiques sont continue.

PROPOSITION 1.58. *1. La somme de deux fonctions continues est continues.*
2.Si $f\colon A \subset E \to \mathbb{R}$ et $g\colon A \to \mathbb{R}$ sont continues, alors $f.g$ est continue
3. Si en plus f ne s'annule pas $\frac{g}{f}$ est continue.
4 Toute fonction polynôme en $x_1 \ldots x_n$ est continue.
5. si $R(x_1, \ldots x_n) = \frac{P((x_1, \ldots x_n))}{Q((x_1, \ldots x_n))}$ est une fonction rationnelle. Et si A est l'ensemble ou Q ne s'annule pas, alors R est continue sur A.

Démonstration. 1 et 2 On raisonne coordonnée par coordonnée.
La i ème coordonnée de $f + g$ est $f_i + g_i$ qui est la composée de (f_i, g_i) et de la fonction somme.
La i ème coordonnée de $f \quad g$ est $g.g_i$ qui est la composée de (f, g_i) et de la fonction produit.
3. La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $t \to \frac{1}{t}$ est continue. Donc par composition $\frac{1}{f}$ l'est et 3 s'applique.
4. Un polynôme est une somme de monômes. Chacun d'eux et un produit de fonctions coordonnées et d'une constante et donc chaque monôme est une fonction continue. □

Pour finir, un critère permettant d'utiliser la continuité d'une fonction.

THÉORÈME 1.59. *Soit $A \subset E$ un ensemble fermé, et $f\colon A \to F$ une fonction continue. Si $B \subset F$ est fermé, alors $f^{-1}(B)$ est fermé.*

Démonstration. Soit a_n une suite d'élément de A qui est dans $f^{-1}(B)$ et qui converge vers un point a. Notons que $a \in A$ puisque A est fermé et que $f(a) = \lim f(a_n)$ puisque f est continue. Comme B est fermé et comme $f(a_n) \in B$, $f(a) \in B$ cqfd. □

Exemple 1.60. Si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue les ensembles $f \geqslant 0, f \leqslant 0,\ f = 0$ sont fermés.

THÉORÈME 1.61. *Soit $A \subset E$ un ensemble ouvert, et $f: A \to F$ une fonction continue. Si $B \subset F$ est ouvert, alors $f^{-1}(B)$ est ouvert.*

Démonstration. Soit $b \in B$, et $a \in A$ tel que $f(a) = b$. Comme B est ouvert, B est un voisinage de b. Comme f est continue, $f^{-1}(B)$ est l'intersection de A et d'un voisinage de a. Comme A est ouvert, c'est un voisinage de a. cqfd. □

Exemple 1.62. Si $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue les ensembles $f > 0$, $f < 0$, $f \neq 0$ sont des ouverts.

Remarque 1.63. Dans la vraie vie, il est souvent plus intéressant de regarder ou les fonctions sont discontinues, plutôt que continues. Par exemple si $d(x, y, z)$ désigne la *densité volumique* de cette pièce, on voit que d est discontinue partout ou il y a un objet.

1.4.4. Exercices.

Exercice 1.24. Dessiner le domaine de définition et trouver les limites (si elles existent)
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{xy}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y}$
$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{x}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

Exercice 1.25. Soit $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq 0$ et $f(0, 0) = 0$. Montrer que pour tout x fixé la limite $\lim_{y\to 0} f(x, y)$ existe et vaut 0 de même que si l'on fixe y la la limite $\lim_{x\to 0} f(x, y)$ existe et vaut aussi 0.
La fonction f admet-elle une limite en $(0, 0)$

Exercice 1.26. Domaine de définition et point de continuité de la fonction : $f(x, y) = \cos\left(\frac{1}{xy}\right)$.

Exercice 1.27. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Démontrer que $f \geqslant 0$ est fermé, et que $f > 0$ est ouvert, à l'aide d'un argument sur les suites.
Soit $f_1, \ldots f_k$ k fonctions définies et continues sur E. Démontrer que l'ensemble
$\{f_1 = 0, f_p = 0, f_{p+1} \geqslant 0, \ldots f_k \geqslant 0\}$ est fermé.

Exercice 1.28. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ une partie, $f: A \subset \mathbb{R}^n \to A \subset \mathbb{R}^n$ une application, et $0 \leqslant k$ un nombre réel positif fixé. On suppose que f est k-lipshitzienne, c'est-à-dire que : $\|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\|$.
Démontrer que f est continue.
On suppose de plus que $k < 1$. Démontrer que A contient au plus un point fixe de f, c'est-à-dire un point tel que $f(x) = x$.
Soit $x_0 \in \Omega$ et x_n la suite récurrente définie par $x_{n+1} = f(x_n)$.
Démontrer que, pour tout n, $\|x_n - x_{n+1}\| < k^n \|x_0 - x_1\|$
En déduire que la suite x_n est de Cauchy. On pourra utiliser $0 \leqslant \Sigma_p^{q-1} k^n \leqslant \frac{k^p}{1-k}$
On suppose que A est fermé, démontrer que f admet un point fixe.

1.5. COMPACITÉ ET APPLICATION.

Dans ce paragraphe nous fixons toujours un ou plusieurs espaces vectoriels de dimension finie et muni d'une norme équivalente à une norme usuelle. Nous verrons dans 5.3 qu'en fait toutes les normes sont équivalentes.

1.5.1. Définition de Bolzano Weierstrass. Partie compactes de $\mathbb{R}^n$.

DÉFINITION 1.64. *Une partie A est dite compacte si toute suite d'éléments de A admet une sous suite qui converge dans A.*

PROPOSITION 1.65. *Si une partie est compacte, elle est fermée, et bornée.*

Démonstration. Si a_n est une suite d'éléments de A qui converge dans E vers un point l, nous devons démontrer que sa limite l est dans A. Mais nous savons que cette suite admet une sous suite a_{n_k} qui converge dans A. Or cette sous-suite converge aussi vers l. Donc l est dans A par définition. Cela démontre que A est fermée. Montrons aussi qu'elle est bornée. Pour cela nous allons plutôt démontrer la contraposée : si une partie n'est pas bornée, elle n'est pas compacte.

Soit B une partie non bornée. Alors pour tout n on peut trouver un point b_n dans B tel que $\|b_n\| \geqslant n$. La suite b_n ne peut être convergente. □

Le théorème suivant dit que la réciproque est vraie.

THÉORÈME 1.66. *Toute partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$ est compacte.*

Pour démontrer ceci il suffit bien entendu de démontrer

THÉORÈME 1.67. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ une partie bornée. Alors toute suite d'éléments de A admet une sous suite convergente.*

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur l'entier, n, le cas difficile étant le cas $n=1$. (l'initialisation) Nous donnerons une démonstration de cela un peu plus tard.

Induction.

Soit A une partie fermée et bornée, et soit (a_n) une suite d'éléments de A. En écrivant $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, on décompose $a_n = (x_n, b_n)$ avec x_n un suite à termes réels et b_n une suite de $\mathbb{R}^{n-1}$. La suite (b_n) admet une sous suite convergente, grâce à l'hypothèse de récurrence. Soit $\mathbb{N}_1$ un sous ensemble de $\mathbb{N}$ tel que $\lim_{n\to\infty, n\in\mathbb{N}} b_n$ existe. Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ est encore une suite bornée, et admet une sous suite convergente. Soit $\mathbb{N}_2$ un sous ensemble de $\mathbb{N}$ tel que $\lim_{n\to\infty, n\in\mathbb{N}} x_n$ existe. Alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_2}$ converge. □

Nous sommes donc ramené au cas de la dimension 1.

THÉORÈME 1.68. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie bornée. Alors toute suite d'éléments de A admet une sous suite convergente.*

Démonstration. Comme A est bornée, il existe un nombre réel a tel que $A \subset [-a, a]$. Si a_n est une suite d'éléments de A nous poserons $x_n = \frac{a_n + 2a}{2}$ de sorte que $x_n \in [0, 1]$. Il suffit alors de démontrer que x_n admet une sous suite convergente.

Nous allons construire par récurrence une suite infinie de sous-ensembles de $\mathbb{N}$: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \supset \mathbb{N}_1 \supset \mathbb{N}_2 \ldots$ telle que :

1.le plus petit élément de $\mathbb{N}_i$, noté n_i est strictement plus grand que n_{i-1}

2. les i premiers chiffres après la virgule de tous les $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_i}$ sont les mêmes :

Le second point veut dire que $\lfloor 10^i x \rfloor = N_i$ est une constante si x est un élément de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_i}$: en effet si $x = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ a(développement décimal) lors $\lfloor 10^i x \rfloor = \overline{a_1 a_2 \ldots a_i}$, où $a_i \in [\![0, 9]\!]$.

On suppose connu $\mathbb{N}_i$ et on regarde l'ensemble des valeurs prises par les $(10^{i+1} x_n)_{n\in\mathbb{N}_i}$. il s'agit d'un sous ensemble de $[\![0, 10^{i+1}]\!]$ qui est fini. Il existe donc un sous ensemble infini de $\mathbb{N}_i$ pour lequel ce nombre est constant, et on peut même supposer que cet ensemble ne contient pas n_i (sinon on l'enlève).

J'affirme que la suite x_{n_i} converge. Soit i un entier fixé. Posons a_i la i-ème décimale de x_n pour $n \in \mathbb{N}_1$, et considérons le nombre réel $x^* = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots = \sum \frac{a_n}{10^n}$. Par construction $|x_{n_i} - x^*| \leqslant 10^{-i}$. □

Avertissement 1.69. On a utilisé le fait que les nombres définis par une suite décimale illimitée sont des nombres réels qui existent. On aurait aussi pu dire la suite est croissante majorée donc elle converge, ou alors c'est une suite de Cauchy, donc elle converge. La vraie difficulté est de savoir comment les nombres réels ont été définis. On peut bien les définir par leurs développements décimaux, même si il y a des difficultés techniques épouvantables et qu'il est plus commode de les définir autrement (coupures de Dedekind ou suites de Cauchy).

PROPOSITION 1.70. *Les boules fermées $\overline{B(x_0, R)}$ sont compactes, tout fermé contenu dans une partie compacte est un compact.*

THÉORÈME 1.71. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie compacte. Alors la borne supérieure de A est un élément de A, ainsi que sa borne inférieure. On peut écrire :*

$\mathrm{Sup}_{a\in A}\, a = \mathrm{Max}_{a\in A}\, a$, $\mathrm{Inf}_{a\in A}\, a = \mathrm{Min}_{a\in A}\, a$

Démonstration. Soit a la borne supérieure de A. C'est le plus petit des majorants. Donc pour tout n, on peut trouver un élément de A dans l'intervalle $[a-1/n, a]$. notons le a_n. La suite a_n converge vers a. Comme A est fermé, $a \in A$. □

Une application de la compacité des boules fermées est le critère de Cauchy.

Définition 1.72. *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite suite de Cauchy si* $\forall \varepsilon > 0, \exists n / \forall p, q \geqslant n \; \|x_p - x_q\| \leqslant \varepsilon$

Il est facile de se convaincre que cette définition ne dépend pas du choix de la norme.

Théorème 1.73. *Dans $\mathbb{R}^n$, toute suite de Cauchy est convergente.*

Démonstration. On procède en deux étapes. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.

1. La suite en question reste dans une boule fermée et bornée. En effet en faisant $\varepsilon = 1$ on sait qu'il existe un entier n_0 tel que si $m \geqslant n_0$, $x_n \in B(x_{n_0}, 1)$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste donc dans la boule $\bar{B}(x_{n_0}, R)$, avec $R = \max\left(1, \sup_{n \leqslant n_0} \|x_n - x_{n_0}\|\right)$

2. Il en résulte que notre suite admet une sous suite qui converge vers une certaine limite l. Nous allons voir qu'en fait elle converge vers l. Soit $\varepsilon > 0$, on choisit d'abord un entier n_0 tel que si p, $q \geqslant n_0$, $\|x_p - x_q\| \leqslant \varepsilon/2$. En suite comme la suite admet une sous suite qui converge vers l, il existe un entier plus grand que n_0, disons n_1 tel que $\|x_{n_1} - l\| \leqslant \varepsilon/2$. Alors pour $p \geqslant n_1$, on a $\|x_p - l\| \leqslant \varepsilon$ □

Remarque 1.74. Ce théorème est très utile dans le contexte suivant. Si on a une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et qu'on veut démontrer qu'elle converge, deux deux choses l'une : ou on connait la limite et alors on estime $\|x_n - l\|$, ou on ne la connait pas, et il suffit de démontrer qu'elle est de Cauchy.

Remarque 1.75. Le lecteur attentif aura remarqué qu'on se mord un peu la queue. Pur démontrer que la partie fermée bornée de $\mathbb{R}$ étaient compactes on a utilisé le fait que les suites de Cauchy converge⟨gap|⟩Ceci dit cette démonstration est intéressante si on définit $\mathbb{R}$ par la méthode des coupures, pour laquelle il est facile de démontrer que toute suite croissante et majorée est convergente.

1.5.2. Continuité, compacité et existence d'extrema.

Théorème 1.76. *L'image continue d'un compact est un compact.*

Autrement dit, si une partie A est compacte et $f: A \to F$ est continue, alors son image $f(A)$ est compacte.

Démonstration. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $f(A)$. Nous allons vérifier que y_n admet une sous-suite qui converge dans $f(A)$. Pour cela on choisit pour chaque entier n un antécédent x_n à y_n dans A. La suite x_n admet une sous-suite qui converge dans A vers une limite l. Notons la $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$. Par continuité, la suite y_{n_i} converge vers $f(l)$ □

Corollaire 1.77. *L'image continue d'un compact est fermée et bornée.*

Mais le corollaire le plus important est celui de l'existence d'un maximum et d'un minimum.

Théorème 1.78. *Si A est compacte et $f: A \to \mathbb{R}$ est continue, f atteint son minimum et son maximum : il existe deux points a, b dans A tels que $f(a) = \mathrm{Min}_{x\in A} f(x)$ et $f(b) = \mathrm{Max}_{x\in A} f(x)$.*

En particulier $\mathrm{Min}_{x\in A} f(x) = \mathrm{Inf}_{x\in A} f(x)$ *et* $\mathrm{Max}_{x\in A} f(x) = \mathrm{Sup}_{x\in A} f(x)$.

Démonstration. En effet $f(A)$ est une partie de $\mathbb{R}$ compacte, donc elle contient son minimum et son maximum. □

L'un des enjeux du second chapitre est de savoir où chercher ce minimum et ce maximum.

1.5.3. Normes et applications linéaires.

Nous sommes (enfin) en mesure de démontrer que toutes les normes sur un espace de dimension finie sont équivalentes, mais allons y doucement. Pour fixer les choses, nous partons de $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa norme $\|x\|_\infty = \mathrm{Sup}_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$.

Soit N une norme sur E, alors on a $N(x) = N(\Sigma_{i=1}^n x_i\, e_i) \leqslant \mathrm{Sup}_i\, N(e_i).\|x\|_\infty$

Posons donc $k = \mathrm{Sup}_i\, N(e_i)$, de sorte que $N(x-y) \leqslant k\|x-y\|_\infty$.
Si on muni $\mathbb{R}^n$ de sa norme usuelle, la fonction N est donc k lipshitzienne, en particulier continue.
Comme l'ensemble $\Sigma_\infty = \{x/\|x\|_\infty = 1\}$ est fermé et borné, il est compact, et N atteint son maximum et son minimum sur cet ensemble ; ces nombres ne sont pas nuls à cause de l'axiome de séparation. Il existe donc deux constantes a, A telle que si $\|x\|_\infty = 1, a \leqslant N(x) \leqslant A$.
Par homogénéité, nous déduisons :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, a\,\|x\|_\infty \leqslant N(x) \leqslant A\|x\|_\infty$$

THÉORÈME 1.79. *Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.* □

Evidemment pour la norme usuelle, une application linéaire $E \to F$ est continue (c'est, coordonnée par coordonnée, un polynôme de degré 1. Comme toutes les normes sont équivalentes, quelle que soit la norme les applications linéaires sont continues.

En particulier si E, F sont maintenant muni de deux normes quelconques et si $A: E \to F$ est linéaire, la fonction $\|A(x)\|$ est continue sur la boule unité $\bar{B} = \{x \in E/\|x\| \leqslant 1\}$ de E. Elle y atteint donc son maximum.

DÉFINITION 1.80. *Soient E, F deux espaces normés de dimension finie et $A: E \to F$ une application linéaire. On pose $|||A||| = \mathrm{Sup}_{\|x\| \leqslant 1}\|Ax\|$. Ce nombre s'appelle la norme de A.*

PROPOSITION 1.81. $|||A||| = = \mathrm{Sup}_{\|x\| \leqslant 1}\|Ax\| = \mathrm{Sup}_{\|x\| \neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \mathrm{Sup}_{\|x\| = 1}\|Ax\|$

PROPOSITION 1.82. *La norme ainsi définie est une norme sur $L(E,F)$. Elle est appelée norme associée aux normes de E et F*

PROPOSITION 1.83. *L'application A est Lipshitzienne de rapport $|||A|||$.*

La norme associée dépend donc bien du choix de normes sur E, F. Elle satisfait une propriété importante pour la composition.

PROPOSITION 1.84. *Soient E, F, G trois evn, $A: E \to F$ et $B: F \to G$ deux applications linéaires, alors $|||B.A||| \leqslant |||A||| \times |||B|||$.*

Démonstration. Soit $x \in E$ un vecteur de norme inférieure ou égale à 1.
$\|(BA)\,x\| = \|B\,(Ax)\| \leqslant |||B||| \times \|Ax\| \leqslant |||A||| \times |||B||| \times \|x\|$ □

COROLLAIRE 1.85. *Dans $L(E)$, on a $|||A^n||| \leqslant |||A|||^n$*

Démonstration. Ce résultat se démontre par récurrence sur l'entier n.
L'étape d'initialisation $(n=1)$ est claire.
L'étape d'induction résulte de la proposition précédente appliquée à A^n et A : on a en effet $|||A^{n+1}||| \leqslant |||A^n||| \times |||A|||$. Ainsi $|||A^n||| \leqslant |||A|||^n \Rightarrow |||A^{n+1}||| \leqslant |||A|||^{n+1}$. □

1.5.4. Continuité uniforme.

Il s'agit d'un concept très utile et très important, mais comme toujours, tant qu'on n'est pas habitué, c'est assez difficile à comprendre.

Rappelons que si $X \subset \mathbb{R}^n$ est un sous ensemble et si $f: X \to \mathbb{R}^m$ est une fonction, f est continue en un point x_0 de x si
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0/\|y - x_0\| < \alpha \Rightarrow \|f(y) - f(x_0)\| < \varepsilon$

Ainsi, si x_0 et donné, et si on me donne ε, je peux trouver un α tel que une certaine propriété est vérifiée.

Si f est continue en tout point, et si $\varepsilon > 0$ est donné, je pourrai donc trouver un $\alpha(x)$ qui dépend de x et ε tel que $\|y - x\| < \alpha(x, \varepsilon) \Rightarrow \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon$.

On dit que f est uniformément continue si ce α peut être choisi indépendamment de x. Autrement dit.

DÉFINITION 1.86. *La fonction f est uniformément continue sur X si*
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \forall x, y \in X / \|y - x\| < \alpha \Rightarrow \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon$

Notons bien l'ordre des quantificateurs :
Continue en tout point : $\forall x, \forall \varepsilon \exists \alpha / ....$
Uniformément continue = $\forall \varepsilon, \exists \alpha \forall x / ...$
Evidemment uniformément continue $\Rightarrow$ continue : dans la première définition le α dépend de x dans le second, il n'en dépend pas.

THÉORÈME 1.87. *Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ une partie compacte et $f: X \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue. Alors f est uniformément continue.*

Démonstration. On va démontrer cette implication par l'absurde.
Rappel pour démontrer $A \Rightarrow B$ par l'absurde, on suppose que A et vraie et B est fausse, et en déduite une proposition fausse (contradiction).
On suppose donc que f est continue en tout point (A) et n'est pas uniformément continue (B), et nous allons obtenir une contradiction.
1 étape : on nie la propriété de continuité uniforme :
Non $(\forall \varepsilon \exists \alpha > 0 \forall x, y \quad \|y - x\| < \alpha \Rightarrow \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon)$
S'écrit : (N) $\exists \varepsilon \quad \forall \alpha > 0 \quad \exists x, y \quad \|y - x\| < \alpha$ et $\|f(y) - f(x)\| \geqslant \varepsilon$
Je fixe alors un ε satisfaisant cette propriété (N). Comme (N) est vérifiée quelque soit $\alpha > 0$, je pose $\alpha = \frac{1}{n}$, et je sais que je peux trouver deux éléments x_n, y_n tels que $\|y_n - x_n\| < 1/n$ et $\|f(y_n) - f(x_n)\| \geqslant \varepsilon$.
La suite x_n admet une sous suite x_{n_k} qui converge vers un élément x^* de X, vu que X est compact. Comme $\|y_{n_k} - x_{n_k}\| < 1/n_k$. la suite y_{n_k} converge vers la même limite. La continuité de f en x^* montre qu'il existe un $\alpha > 0$ tel que si $\|z - x^*\| < \alpha$, $\|f(z) - f(x^*)\| < \varepsilon/1000$. pour $k \gg 1$, la distance de x_{n_k} et y_{n_k} à x^* est inférieure à α. Donc $\|f(y_{n_k}) - f(x_{n_k})\| < 2\varepsilon/1000$, contradiction. □

Une application de la continuité uniforme est qu'on peut approcher une fonction continue par une fonction en escalier.

THÉORÈME 1.88. *Soit $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $\varepsilon > 0$, il existe un entier n tel que la fonction en escalier $f_\varepsilon: [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $f_\varepsilon(x) = f\Big(a + k.\frac{b-a}{n}\Big)$ si $x \in \Big[a + k.\frac{b-a}{n}, a + (k+1).\frac{b-a}{n}\Big[$ approche f à mieux que ε près.* $\mathrm{Sup}_{x \in [a,b]} |f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon$.

Démonstration. C'est juste la continuité uniforme, et on prend $n > 1/\alpha$. □

1.5.5. Exercices

Exercice 1.29. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ une suite de points qui converge vers l. Démontrer que $\{x_n\} \cup l$ est compacte. On pourra réfléchir à démontrer que cet ensemble est fermé (étudier le complémentaire) et borné.
Même question dans $\mathbb{R}^d$.

Exercice 1.30. Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On dit que f est *propre* si f est continue et si pour tout $A > 0$, il existe un R tel que $|x| \geqslant R \Rightarrow |f(x)| > A$.

Démontrer l'équivalence f propre $\Leftrightarrow$ pour toute partie compacte de $\mathbb{R}^+$, $f^{-1}(K)$ est compacte.

Démontrer que si f est propre, f admet un minimum.

Exercice 1.31. * Théorème de d'Alembert. Soit $P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polynôme $P(z) = z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \cdots + a_n$. on pose $f(z) = |P(z)|$.

1.Démontrer que f est propre au sens de l'exercice précédent.

2. Soit z_0 un point où f est minimale, on veut montrer que $P(z_0) = 0$, en raisonnant par l'absurde.

Indication :

Si $P(z_0) \neq 0$, on pose $Q(z) = P(z + z_0) = c(1 + b_k z^k + b_{k+1} z^{k+1} + \cdots + b_n)$

En écrivant b_k sous forme exponentielle $b_k = r_0 e^{i\theta_0}$, montrer que pour $z = t e^{-i(\theta_0 + \pi + k)}$, on a $|Q(z)| = |Q(z_0)| \times |1 - t r_0 + o(t)|$ et obtenir une contradiction.

3. Conclure.

Exercice 1.32. Normes de formes et d'applications linéaires.

Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. On dit que le boule unité de cette norme est *pointue* si il existe un nombre fini de points A_1,..A_k tels que tout point de la boule unité soit un barycentre des A_i.

1. Dessiner les boules unités des normes $\|.\|_1, \|.\|_\infty$ dans $\mathbb{R}^2$, puis démontrer qu'elle sont pointues (et aussi dans $\mathbb{R}^n$).

2. Soit $l = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la forme linéaire $l(x_1, ...x_n) = \Sigma_{i=1}^n x_i y_i$. Démontrer que si la boule unité est pointue, $\|l\| = \mathrm{Sup}_k |l(A_k)|$.

3. En déduire que si on muni $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|.\|_1$, $\|l\| = \mathrm{Sup}_i |y_i|$, et que si on muni $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|.\|_\infty$, $\|l\| = \Sigma_i |y_i|$

4. Plus généralement si E est un autre espace vectoriel normé, et $l\colon \mathbb{R}^n \to E$ une application linéaire, alors $|||l||| = \mathrm{Sup}_k \|l(A_k)\|$.

5*. Soit l l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ définie par la matrice $(a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant i \leqslant n}$. Calculer la norme de l quand on munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ des normes $\|.\|_1, \|.\|_\infty$ (il y a 4 cas à discuter).

Exercice 1.33. Soit $f\colon A \in E \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est hölderienne d'exposant α si il existe une constante k telle que $\|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\|^\alpha$. Démontrer qu'une telle fonction est uniformément continue.

Exercice 1.34. On veut donner une autre démonstration du théorème de Heine-Borel.

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ une partie compacte, et $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue. Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

1 Démontrer que $X \times X \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est compacte.

2. Soit $\varphi\colon X \times X \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x, y) = \|f(x) - f(y)\|$. Démontrer que φ est continue, et en déduire que $K_\varepsilon = \{(x, y) \in X \times X \,/\, \varphi(x, y) \geqslant \varepsilon\}$ est compact ou vide.

3. Si $K_\varepsilon \neq \varnothing$, montrer que la fonction distance $\delta\colon K_\varepsilon \to \mathbb{R}$ définie par $\delta(x, y) = \|x - y\|$ atteint son minimum et que celui ci est différent de 0.

4. Soit α le minimum de δ. Démontrer que $\|x - y\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

Exercice 1.35. Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ une partie compacte, et $r > 0$. On veut démontrer qu'il existe un nombre fini de points $x_1, ...x_n$ de K tels que $K \subset \cup_{i=1}^n B(x_i, r)$.

Approche 1. Raisonner par l'absurde et démontrer que si ça n'est pas le cas, il existe une suite infinie de points de K telle que $d(x_i, x_j) > r$ et conclure.

Approche 2. On suppose que $K \subset [-A, A]^d$. On subdivise chaque coté de ce cube en n intervalles de longueur $2A/n$, et on considère l'ensemble G_n formé des n^d points dont les coordonnées sont de la forme $x_i = -A + \frac{k_i}{n} 2A$.

Vérifier que tout point de K est à une distance inférieure à $\frac{2}{n}$ de l'un des points de G_n et conclure.

Remarque 1.89. L'approche 2 est la première étape pour définir la dimension (de Hausdorff) d'un compact. Si A_n désigne le nombre de boules de rayon $1/n$ nécessaires pour couvrir K sa dimension va être inférieure à $\frac{\ln A_n}{n}$.

La dimension de Hausdorff s'appelle aussi dimension fractale. Par exemple la dimension du flocon de Koch est $\frac{\log 4}{\log 3} = \log_3(4) = 1,26...$

Exercice 1.36. * Nombre de Lebesgue. Soit K un compact, $(a_i)_{i \in I}$ une famille de points de K et r_i des nombres réels tels que $K \subset \cup_i B(a_i, r_i)$. On veut démontrer qu'il existe un nombre $l > 0$ tel que pour tout point x de K il existe un i tel que la boule $B(x, l) \subset B(x_i, r_i)$. Pour cela on raisonne par l'absurde.

1. Ecrire la propriété à nier avec des quantificateurs.

2. Montrer que si elle est fausse il existe une suite de point x_n de K tel que $B(x_n, 1/n)$ n'est contenue dans aucune des boules considérées.

3. Conclure.

Remarque 1.90. Le « nombre de Lebesgue » est très utile, même quand on part de 2 ouverts.

Chapitre 2

Calcul différentiel

Le calcul différentiel est l'un des outils les plus extraordinaires des mathématiques. Il permet de décrire les phénomènes les plus divers de la nature ($\Phi\nu\sigma\eta$ en grec). Il est assez difficile de savoir qui et quand il a été inventé. Les anglais disent Newton[2.1], les allemands Leibniz[2.2]. Newton dit *I had the hint of this method [of fluxions] from Fermat*[2.3]*'s way of drawing tangents, and by applying it to abstract equations, directly and invertedly, I made it general.* Leibniz a inventé la notation $\frac{df}{dx}$ et Newton a compris que $f=\int\frac{df}{dx}dx$...Des centaines d'articles ont été écrits sur ce sujet.

Disons que c'est l'oeuvre collective de quelques mathématiciens et physiciens géniaux du 17-ième siècle. Donnons quelques exemples de phénomènes décrit par le calcul différentiel.

La loi de la gravitation Newton[2.4] 1686 $\vec{F}=G\frac{mm'}{r^2}$, et la seconde loi $\vec{F}=m\vec{\Gamma}$

L'équation des cordes vibrantes(d'Alembert[2.5] 1746): $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ C'est la première équation aux dérivées partielles qui est formulée (et résolue).

L 'équation des ondes (Euler[2.6] 1756): $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)$.

La diffusion de la chaleur (Fourier[2.7] 1807): $\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$

L'équation de Poisson 1823 [2.8] : $\Delta\Phi=4\pi g\rho$, où ρ désigne la masse volumique

Les équations de Maxwell[2.9] : $\operatorname{div}(E)=0, \operatorname{rot}(E)=-\frac{\partial B}{\partial t}, \operatorname{div}(B)=0, \operatorname{rot}(B)=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}+\mu_0 j$

Les lois de la thermodynamique (S. Carnot[2.10]) $dS=\frac{\delta Q}{T}$,

Le point triple (liquide, gaz , solide) d'un corps parfait satisfait : $\frac{\partial P}{\partial V}=\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}=0$

L'équation de Black-Scholes (1973) en mathématiques de la finance :
$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{\partial V}{\partial t}-rV=0$ (ici S_t est le prix de l'actif, V celui de l'option, σ la volatilité, r le taux d'intérêt sans risque). En fait cette formule est due à Feynman-Kac 1947 qui décrit un processus gouverné par un mouvement brownien.

Il est donc plus qu'utile de savoir maitriser l'outil en question. Par exemple un esprit habitué comprend le lien entre l'équation de la gravitation et celle de Poisson, il peut déduire des équations de Maxwell le caractère « onde » du champ électromagnétique (ce veut dire qu'il satisfait l'équation des ondes), et si il travaille dans la finance, il peut utiliser la dernière pour gagner de l'argent.

2.1. Isaac Newton 1642-1726.

2.2. Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1717.

2.3. Pierre de Fermat 1607-1665.

2.4. Isaac Newton 1643-1727

2.5. Jean Le Rond d'Alembert 1717-1783, c'est le co-auteur, avec Diderot, de l'Encyclopédie, et on lui doit aussi la démonstration du théorème qui dit que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ s'annule que nous avons vue en exercice.

2.6. Leonard Euler, 1707-1783

2.7. Joseph Fourier, 1768-1830

2.8. Siméon Denis Poisson 1781-1840

2.9. James Clerk Maxwell 1831-1879

2.10. Sadi Carnot 1796-1832

L'un des enjeux essentiels du calcul différentiel est de comprendre comment généraliser la formule fondamentale $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\, dt$ à des fonctions de plusieurs variables... Cela sera fait au chapitre suivant.

2.1. DÉRIVÉES PARTIELLES D'UNE FONCTION À VALEURS DANS $\mathbb{R}$.

La notion de dérivée partielle est très naturelle. Elle permet d'étudier les variations d'une fonction quand on fait varier une seule des coordonnées à la fois.

2.1.1. Définition

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert ou plus généralement un voisinage de p_0 , $p_0 \in \Omega$ et $f: \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction on peut calculer ses dérivées partielles par rapports aux coordonnées de la façon suivante.

DÉFINITION 2.1. *On dit que f est dérivable par rapport à la i-ème coordonnée x_i au point $p_0 = (x_1, \ldots. x_n)$ si la limite $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots x_i + h, x_{i+1}, \ldots x_n) - f(x_1, x_2, \ldots x_i, x_{i+1}, \ldots x_n)}{h}$ existe. Dans ce cas on note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)$ cette limite et on l'appelle dérivée partielle de f par rapport à x_i au point $p_0 = (x_1, \ldots. x_n)$.*

PROPOSITION 2.2. *On dit que f est dérivable par rapport à la i-ème coordonnée x_i au point $(x_1, \ldots. x_n)$, si et seulement si la fonction $x \to f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ est dérivable au point x_i. Dans ce cas la dérivée (ordinaire) de cette fonction d'une seule variable est la dérivée partielle de f au point considéré.*

Autrement dit pour calculer une dérivée partielle on restreint la fonction à une droite et on calcule sa dérivée ordinaire.

Souvent il s'agit d'une fonction de 2 ou trois variables, par exemple $f(x, y)$ et on note $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

Exemple 2.3. $f(x, y) = \ln\left(\text{tg}\left(\frac{x}{y}\right)\right)\ldots$

Cette fonction n'est pas vraiment définie partout il faut bien faire attention à ce que $\text{tg}\left(\frac{x}{y}\right) > 0$, soit $\frac{x}{y} \in]0, \pi/2[+ \pi\mathbb{Z}\ldots$

Mais si elle est bien définie, pour calculer sa dérivée par rapport à x c'est très facile, on applique la formule de dérivation desfonctions composées.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{\text{tg}(x/y)} \times (1/y) \times (1 + \text{tg}^2(x/y)) = \frac{1}{y}\left(\frac{1}{\text{tg}(x/y)} + \text{tg}(x/y)\right) = \frac{2}{y \sin(2x/y)}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{\text{tg}(x/y)} \times (-x/y^2) \times (1 + \text{tg}^2(x/y)) = \frac{-2 \quad x}{y^2 \sin(2x/y)}$$

PROPOSITION 2.4. *On suppose que f est dérivable par rapport à x_i au point considéré, alors*

$$f(x_1, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)\, \Delta x_i + o(\Delta x_i)$$

Autrement dit, la variation Δf de f quand on fait varier la $i-$ème coordonnée de Δx_i est $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)\, \Delta x_i$ à des termes négligeables près. C'est très utile pour les calculs d'erreurs.

Une application importante des dérivées est la recherche des extrema.

THÉORÈME 2.5. *Soit $f: A \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f atteint un maximum ou un minimum en un point, et si en ce point f a des dérivées partielles, celles ci sont toutes nulles.*

Démonstration. Si on a un maximum, alors la restriction de f à la droite passant par ce point et dirigée par le i-ème vecteur de base admet aussi un extremum. Donc sa dérivée (ordinaire) s'annule. □

On peut aussi donner un argument plus calculatoire.

$$f(x_1, ..., x_i + \Delta x_i, ...x_n) - f(x_1, ..., x_i, ...x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n)\,\Delta x_i + o(\Delta x_i)$$

Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n) \neq 0$, *on pose* $\Delta x_i = \frac{t}{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n)}$. *Alors*

$f(x_1, ..., x_i + \Delta x_i, ...x_n) - f(x_1, ..., x_i, ...x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n)\,\Delta x_i + o(\Delta x_i) = t + o(t) = t(1 + o(1))$ *est strictement positif (négatif) pour* $t > 0$ (<0) suffisament petit.

La proposition précédente indique la stratégie à suivre quand on cherche le maximum ou le minimum d'une fonction sur un ensemble. D'abord, on démontre qu'il existe (par un argument de compacité , ou d'application propre, par exemple). Ensuite on cherche cet extremum parmi les points ou la dérivée s'annule. Cela conduit à la définition très utile.

DÉFINITION 2.6. *Si f est différentiable, on dit que x_0 est un point critique de f si $f'(x_0) = 0$, autrement dit si* $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = ... = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = 0$.

Remarque 2.7. On trouve dans la littérature d'autres notations que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Par exemple f'_x au lieu de $\frac{\partial f}{\partial x}$ est une notation très commode pour les fonction de deux ou trois variables, ou aussi $\partial_i f$ au lieu de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Remarque 2.8. La recherche des points critiques d'une fonction est un domaine entier de la recherche en mathématique, tant en dimension finie qu'en dimension infinie.

2.1.2. Exercices.

Exercice 2.1. Calculer les dérivées partielles des fonctions (après avoir donné le domaine de définition)

$f(x, y) = x^2 + y^3 - 3axy$
$f(x, y) = x^y$
$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$
$f(x, y) = e^{\sin(y/x)}$
$f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$
$f(x, y) = \ln\left(\sin\left(\frac{x + a}{\sqrt{y}}\right)\right)$
$f(x, y, z) = (xy)^z$
$f(x, y, z) = z^{xy}$
$f(x, y) = F(g(x, y))$, ou g admet une dérivée partielle par rapport à x, y et F est une fonction dérivable.

Exercice 2.2. Soit $(x, y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ les deux fonctions $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$. Calculez toutes les dérivées partielles et le déterminant $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$.

Exercice 2.3. Soit $f(x, y) = \ln(x^2 + xy + y^2)$. Calculer $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$

Exercice 2.4. Trouver les fonctions $f(x, y)$ telles que $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$

Exercice 2.5. Trouver les fonctions $f(x, y)$ telles que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2}{x}$ et $f(1, y) = \sin(y)$

Problème 2.1. Equation d'Euler en dimension 2.

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ une fonction. on dit que f est homogène de degré α si pour tout $\lambda > 0$, $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x, y)$.

1. On suppose que f est homogène de degré 0. Démontrer qu'il existe une fonction F telle que $f(x, y) = F(x/y)$ si $y \neq 0$. En déduire que $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

2. Démontrer que si f est homogène de degré α $f(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\alpha} g(x,y)$ où g est homogène de degré 0.
3. En déduire que si si f est homogène de degré α, $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f(x,y)$

2.2. Dérivée totale, différentielle d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2.2.1. Définition : différentielle en un point.

Jusque la on a vu ce qui se passe quand on fait varier une coordonnée $f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + o(\Delta(x))$, ou bien $f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + o(\Delta(y))$.. Maison pourrait très bien avoir envie de faire varier les deux (ou toutes si on est en dimension supérieure) coordonnées à la fois. Nous allons voir que pour toutes les fonctions raisonnables, la variation de f dépend **linéairement** de la variation du point : on a, sauf a faire des contre-exemples tordus et ad hoc

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\Delta y + o\|(\Delta(x), \Delta(y))\|$$

que l'on peut aussi écrire

$$f(x+h, y+k) - f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,k + o\|(h,k)\|$$

Mieux, si on considère la forme linéaire $l = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$, on peut écrire ça

$f(p_0+u) = f(p_0) + l(u) + o(\|u\|)$, à condition de convenir que p_0 est le point (x,y) et u le vecteur (h,k).

On a alors la définition de différentielle totale d'une fonction en un point pour une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

DÉFINITION 2.9. *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert ou plus généralement un voisinage de p_0 , $p_0 \in \Omega$ et f: $\Omega \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est différentiable en p_0 si il existe une forme linéaire l telle que*
$f(p_0+u) - f(p_0) = l(u) + o(\|u\|)$
*La forme linéaire l s'appelle la **différentielle** de f en p_0. On la note souvent $f'(p_0)$.*

Comment, en pratique calculer l ? En fait c'est très facile.

PROPOSITION 2.10. *Si f est différentiable en p_0, alors elle admet des dérivées partielles dans toutes les directions et sa différentielle est la forme linéaire dont la matrice est $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)(p_0)$.*

Démonstration. On fait $u = (h, 0, \ldots.0)$ il vient : $f(x_1+h, x_2, \ldots x_n) - f(x_1, \ldots, x_n) = h.l(1, 0, 0\ldots, 0) + o(h)$. Donc $l(1, 0, \ldots.0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}$. □

En général la réciproque est fausse. Par exemple la fonction $f(x,y)$ qui vaut 0 si $x \neq 0$, telle que $f(x,0) = x$ admet des dérivées partielles en $(0,0)$ qui valent 1 et 0, mais n'est pas dérivable en ce point. En effet elle n'est même pas continue. Or on a la proposition :

PROPOSITION 2.11. *Si f est différentiable en p_0, alors elle est continue en ce point.*

Démonstration. Comme $f(p_0+u) - f(p_0) = l(u) + o(\|u\|)$, et comme l est lipshitzienne, on a
$\|f(p_0+u) - f(p_0)\| = O(\|u\|)$ □

Si f est différentiable au point p_0 nous noterons $f'(p_0)$ sa différentielle qui est donc une forme linéaire.

PROPOSITION 2.12. *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un voisinage de p_0 et $f: \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en p_0. Soit $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en $f(p_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en p_0 et sa dérivée est $g'(f(p_0)) \times f'(p_0)$.*

Attention, ici $f'(p_0)$ est une forme linéaire, ou si l'on veut une matrice ligne, alors que $g'(f(p_0))$ est un scalaire.

Exemple 2.13. La dérivée de $x^2 + y^2$ est $2(x, y)$ on en déduit que celle de $\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ est proportionnelle à (x, y) et vaut $\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \times 2(x, y)$.

2.2.2. Différentielle totale.

Il s'agit là d'une notation importante t pas si facile à comprendre du prmier coup. Si on dérive une fonction en un point, sa dérivée $f'(p_0)$ est une forme linéaire donc un élément de $(\mathbb{R}^n)^*$ qui est en fait $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$. Si notre fonction st dérivable partout, sa différentielle peut donc être vue comme l'application $\Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$, que je peux écrire $\frac{\partial f}{\partial x_1}(1, 0, ., 0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(0, \dots 1)$

Attention : ici $(1, 0, ., 0)$ représente la **fonction constante** égale à cette forme linéaire. C'est aussi la différentielle de la fonction x_1, que l'on convient d'écrire dx_1. On a ainsi que la différentielle de f peut s'écrire $\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$, où dx_i la fonction constante $\Omega \to \mathbb{R}^{n*}$ dont la valeur est $(0, \dots, 1, \dots 0)$.

Si f est différentiable sur Ω, sa dérivée se note soit $f': \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ soit df. Dans la pratique on écrit plutôt $f'(x_0)$ pour la valeur en un point et df pour la fonction $x \to f'(x)$.

Nous avons la formule $\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n}$

Exemple 2.14. si $n = 1$ la différentiabilité est juste la dérivabilité ordinaire. Si $f(x)$ est une fonction de la variable x , nous avons donc $df = f'(x)\,dx$. Abusivement on peut aussi écrire $f'(x) = \frac{df}{dx}$

PROPOSITION 2.15. *Si f est différentiable et atteint son maximum en un point, alors en ce point $df = 0$.*□

Remarque 2.16. Moralement df désigne la variation de f quand on fait varier x : pour un physicien $df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$ est la limite de la formule $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n + o(\Delta x)$ qui exprime la variation Δf de f quand on fait varier la position de x d'une valeur $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$. Du point de vue mathématique, on remarque que cette variation dépend linéairement de Δx c'est donc une forme linéaire.

DÉFINITION 2.17. *Une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et à valeur dans $(\mathbb{R}^n)^*$ s'appelle une forme différentielle.*

Exemple 2.18. La différentielle d'une fonction est une forme différentielle.

Remarque 2.19. Si on fait varier le point $(x_1, \dots, x_n)$ d'une valeur $(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ alors la définition de la différentielle en $(x_1, \dots x_n)$ nous dit que la variation de f est :

$$\Delta f = f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n + o(\Delta x)$$

Autrement dit l'expression $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$ rappelle comment calculer la variation de f quand on fait un peut bouger le point où on l'évalue;

PROPOSITION 2.20. *Soit $f: \Omega \to \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on suppose f et g dérivable. Alors $dg \circ f = (g' \circ f) df$*

Ici, $g' \circ f: \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction, et $df: \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ une forme différentielle.

2.2.3. Fonctions de classe C^1.

Nous avons vu que si la fonction f est différentiable, alors elle admet des dérivées partielles, mais nous avons aussi vu que la réciproque est fausse. Il y a néanmoins un théorème qui dit que tout cela est un peu pathologique et que, au moins dans un premier temps, on peut ignorer cette difficulté. Pour cela il faut introduire une définition.

DÉFINITION 2.21. *Si $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction définie et différentiable sur un ouvert Ω, on dit que f est de classe C^1 si l'application $f': \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ est continue. Autrement dit si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont continues.*

THÉORÈME 2.22. *Si $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur un ouvert Ω. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i. la fonction f est de classe C^1

ii. les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existent et sont continues

Remarque 2.23. L'implication $i \Rightarrow ii$ est immédiate, car si f est C^1 sa différentielle est $x \to \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.

Démonstration. Pour ne pas s'embêter la vie, on fait le cas de $n = 2$.

On a donc une fonction de deux variables et suppose donc que les dérivées partielles existent et sont continues. Nous allons démontrer que si (x, y) est un point fixé la fonction est différentiable en ce point, et comme sa différentielle est $(x, y) \to \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ notre hypothèse dira que f est bien C^1.

On a $f(x+h, y+k) - f(x, y) = (f(x+h, y+k) - f(x, y+k)) + (f(x, y+k) - f(x, y))$
Le second terme est facile à analyser : par hypothèse, il vaut $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)k + o(k)$.
Pour le premier, on applique le théorème des accroissement finis à la fonction de classe C^1
$x \to f(x, y+k)$. Il existe un $\theta \in [0, 1]$ tel que $f(x+h, y+k) - f(x, y+k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h, y+k)h$

Mais par hypothèse, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue. Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h, y+k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + o(1)_{\|(h,k)\| \to 0}$, d'où le résultat. □

2.2.4. Dérivée le long d'une courbe, vecteur gradient.

On se donne une fonction $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dérivable (par exemple de classe C^1) et une courbe paramétrée, c'est-à-dire une application $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ définie par sa « loi horaire » $t \to x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ supposée aussi dérivable. On peut se demander comment calculer la dérivée de $f(x(t)): I \to \mathbb{R}$. On remarque que si est fixé, $x'(t) = (x'_1(t), \ldots, x'_n(t))$ est un vecteur, et comme $f'(x(t))$ est une forme linéaire, rien n'interdit de calculer $f'(x(t)).x'(t)$. Pour se faciliter la vie, nous rappelons que $dx_i = x'_i(t)dt$, et nous poserons $x'_i(t) = \frac{dx_i}{dt}$.

PROPOSITION 2.24. *1. Sous ces hypothèses, $f(x(t))$ est dérivable et sa dérivée est*
$f'(x(t)).x'(t) = \Sigma_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t)) \frac{dx_i}{dt}$.

2. La différentielle de $f\circ x$ est donc $d(f\circ x)=\Sigma_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t))dx_i=\Sigma_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t))x_i'(t)dt$

On voit l'interêt d'utiliser la notation différentielle pour faire ce calcul.

Au paragraphe suivant nous généraliserons cette formule au cas des applications de plusieurs variables.

Exemple 2.25. On considère la courbe $x(t)=\cos(t)$, $y(t)=t^2$. Calculer la différentielle de de $F(t)=f(x(t),y(t))$, pour $f(x,y)=e^{3x+4y}$.

On a $df=e^{3x+4y}(3dx+4dy)$, donc $dF=e^{3x(t)+4y(t)}(3dx+4dy)=e^{3\cos(t)+4t^2}(-\sin(t)+2t)\,\mathrm{dt}$

Cette notion va nous être utile pour répondre à la question suivante. Parmi toutes les courbes parcourues à vitesse constante égale à 1 quelle est celle pour laquelle F diminue le plus vite. Notons qu'ici, on a besoin de savoir ce que veut dire vitesse $=1$, c'est-à-dire qu'on a besoin d'une structure d'espace vectoriel euclidien.

Soit donc $x(t),y(t)$ une telle courbe, on pose $F(t)=f(x(t),y(t))$, de sorte que $f'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}.x'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}.y'(t)$. On reconnait le produit scalaire du vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ avec le vecteur de longueur 1 $x'(t)$, $y'(t)$. Notons que pour que ce produit soit maximal, il faut et il suffit que le vecteur $(x'(t),y'(t))$ soit le vecteur unitaire proportionnel à $\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

Cela amène à définir le vecteur gradient.

Définition 2.26. *Dans un espace euclidien rapporté à une base orthonormé, le gradient de la fonction f est le vecteur de coordonnées $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$. On le note ∇f, ou bien* $\mathrm{grad}(f)$.

Il est clair d'après la définition, que ce vecteur est bien défini indépendamment du système de coordonnées *pourvu qu'on ait choisi un repère orthonormé.*

Proposition 2.27. $f(x+tu)=f(x)+t<u,\nabla f>+o(t)$

$\frac{f(x+tu)-f(x)}{t}=<u,\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}>\times\|\nabla f\|+o(t)=\cos(\theta)\|\nabla f\|=o(t)$, *où θ désigne l'angle $<u;\nabla f>$.*

Donc si $\|u\|=1$ et $t\ll 1$ est maximal pour $u=\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ et vaut précisément $\|\nabla f\|$

La ligne à suivre pour avoir une variation maximale de f est donnée par le gradient.

Remarque 2.28. Même si en coordonnées, on ne voit pas bien la différence $df=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\nabla f=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}$, les deux objets df et ∇f sont de nature très différente. Le premier est défini intrinsèquement (ne dépend pas du système de coordonnées) et permet de calculer la variation de f en fonction du point considéré. Le second est un vecteur (qui dépend d'un chois d'un système de coordonnées euclidienne ou d'une base orthonormée) et qui donne la direction à prendre dans laquelle f varie le plus vite.

Une autre application est celle de l'étude des courbes ou des surfaces de niveau $f=\mathrm{cte}$

Proposition 2.29. *Soit $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Si $(x(t),y(t))$ est une courbe de niveau de f , c'est à dire si $f(x(t),y(t))=\mathrm{cte}$, alors le vecteur vitesse $(x'(t),y'(t))=\vec{v}(t)$ est à chaque instant contenu dans le noyau de $df\,(x(t),y(t))$.*

Le même résultat vaut pour $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Si $x\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est une courbe paramétrée telle que $f(x(t)) = \mathrm{cte}$, alors le vecteur vitesse $\vec{v}(t) = x'(t)$ est pour tout t contenu dans le noyau de $df(x(t))$. On dit que $x(t)$ est une courbe de niveau de f.

Démonstration. On dérive $f(x(t), y(t)) = 0$ □

Remarque 2.30. Nous verrons plus tard une réciproque à ce théorème, c'est à dire que pour tout vecteur $\vec{v}$ du noyau de $df\,(x_0)$ on peut trouver une courbe de niveau de f dont la dérivée à l'origine soit précisément $\vec{v}$.

2.2.5. Exercice

Exercice 2.6. Si f et g sont dérivables en p_0 alors fg aussi et $(fg)'(p_0) = f(p_0)g'(p_0) + g(p_0)f'(p_0)$. Pourquoi ne peut on pas écrire $f(p_0) \times g'(p_0) + f'(p_0) \times g(p_0)$

Si f et g sont dérivables partout alors :

1. $d(fg) = fdg + gdf$
2. $d(f+g) = df + dg$
3. $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$

Exercice 2.7. Calculer la différentielle (totale) des fonctions

1. $x^2 + y^3 - 3xy$
2. yx^y
3. $\sin^2 x + \cos^2 y$
4. $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
5. $\left(xy + \frac{x}{y}\right)^z$

Exercice 2.8. Soit $f(x, y) = \mathrm{acrtg}\left(\frac{y}{x}\right)$, et $g(x) = f(x, x^2)$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, $g'(x)$

Exercice 2.9. La période d'un pendule de longueur l est $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Quelle erreur fait on sur la mesure de T à partir d'erreur $\Delta l, \Delta g$ des données de l et g.

Réciproquement quelle erreur fait on sur la mesure de g à partir de petites erreurs Δl et ΔT de la longueur de l et de la période T.

Exercice 2.10.

Quelles sont les valeurs extrémales de la fonction $\sin^2 x + \cos^2 y$, et quels sont les points ou celles ci sont atteintes ?

Soit $f(x, y) = ax^2/2 + bxy + cy^2/2 + ex + fy$. On suppose que $ac - b^2 > 0$. Trouver les points ou $df = 0$.Soit x_0, y_0 un tel point. En posant $X = x - x_0, Y = y - y_0$, montrer que (x_0, y_0) est l'unique point ou f atteint son minimum si $a > 0$, son maximum si $a < 0$.

Exercice 2.11. On rappelle qu'un point *critique* d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est un point ou la dérivée s'annule. Trouver les points critiques des fonctions suivantes :

$x^3 + y^3 - 3xy$

$2y^2 + z^2 - xy - yz + 2z$

Exercice 2.12. Trouver une valeur approchée de $(1,02)^3.(0,97)^2$ ou de $(1,02)^{3,01}$

Exercice 2.13. On considère la courbe $x = e^t, y = \ln(t)$. Calculer df, où $f(t) = x^y$

On considère la courbe $x = 3t^2, y = \sqrt{1+t^2}$. Calculer df, où $f(t) = \ln\left(\sin\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)\right)$

On considère la courbe $x = 1 + t^2, y = \ln(t), z = \mathrm{tg}(t)$. Calculer df, où $f(t) = xyz$

On considère la courbe $x = r\cos(t), y = r\sin(t), z = r$. Calculer df, où $f(t) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Problème 2.2. L'équation d'Euler. Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On dit que f est homogène de poids α si pour tout $t>0$ et tout x de $\mathbb{R}^n$, on a $f(tx)=t^\alpha f(x)$.

1. En dérivant par rapport à t l'équation $f(tx_1, ...tx_n)=t^\alpha f(x_1, ..., x_n)$, démontrer que si f est homogène de degré α, $\Sigma_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \alpha f(x_1, ..., x_n)$
2. Réciproquement, on suppose qu'en tout point $\Sigma_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \alpha f(x_1, ..., x_n)$. Démontrer que la fonction $t^{-\alpha} f(tx)$ est constante (on pourra la dériver par rapport à t).

Exercice 2.14. Droite de régression.

On considère dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé une famille de points $P_i=(x_i, y_i)$. On cherche une droite qui approche le mieux les points P_i. Cette droite, inconnue a une équation $y=ax+b$, et il s'agit de déterminer a, b. Le carré de la distance de A_i au point A_i' ayant même abscisse est $(y_i - ax_i - b)^2$.

La **droite de régression** est une droite qui minimise la somme $f(a,b)=\Sigma_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$. Attention ici les inconnues sont a, b.

1. Calculer les dérivées partielles, $\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}$. Montrer qu'en général (à préciser) il n'y a qu'un seul point critique (α, β) à la fonction $f(a,b)$, et que celui est solution un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

On écrira ce sytème sous forme matricielle $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

2. On pose $\bar{x} = \frac{\Sigma_{i=1}^n x_i}{n}$, $\bar{y} = \frac{\Sigma_{i=1}^n y_i}{n}$, de sorte que $(\bar{x}, \bar{y})$ représente le barycentre (l'isobarycentre) des points A_i (c'est la moyenne empirique des observations).

En utilisant l'équation $\frac{\partial f}{\partial b}(\alpha, \beta)=0$, démontrer que $\alpha\bar{x} + \beta = \bar{y}$. Autrement dit la droite de régression passe par le moyenne empirique de la famille des points A_i.

3. On pose var(x) la variance empirique des x_i, $\mathrm{var}\,(x) = \frac{1}{n}(\Sigma_{i=1}^n x_i^2) - \left(\frac{\Sigma_{i=1}^n x_i}{n}\right)^2$, $\mathrm{cov}(x,y) = \frac{1}{n}(\Sigma_{i=1}^n x_i\, y_i) - \left(\frac{\Sigma_{i=1}^n x_i}{n}\right)\left(\frac{\Sigma_{i=1}^n y_i}{n}\right)$, montrer que $\alpha = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\mathrm{var}(x)}$.

4. Il serait beaucoup plus logique de minimiser la somme des carrés des distances des points (x_i, y_i) à la droite considérée. Mais le carré de distance de x, y à la droite d 'équation $y - ax - b = 0$ est $\frac{(y - ax - b)^2}{1+a^2}$

Du coup la fonction étudiée serait de la forme $F(a,b) = \frac{1}{1+a^2} f(a,b)$. Quelles seraient les deux équations qui permettent de trouver la meilleure droite ? Qu'en pensez-vous ?

Exercice 2.15. Soit $q(x) = \Sigma_{i=1}^n a_{ii}\frac{x_i^2}{2} + \Sigma_{1 \leqslant i<j \leqslant n} a_{\mathrm{ij}} x_i x_j$, et $A=(a_{ij})$ la matrice symétrique $a_{ij}=a_{ji}$ associée. On pourra dans un premier temps faire les calculs pour $n=2$.

1. Démontrer que $\nabla q(x) = Ax$

2. On suppose que A est inversible+ Soit $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$. Démontrer que $Ax=b$ si et seulement si x est un point critique de la fonction $q(x) - b.x$, où $b.x = \Sigma_{i=1}^n b_i x_i$

3. On dit que q est définie positive si $x \neq 0 \Rightarrow q(x) > 0$. Soit m le minimum de q sur la sphère $\Sigma_{i=1}^n x_i^2 = 1$. Démontrer que $q(x) \geqslant m(\Sigma_{i=1}^n x_i^2)$ et en déduire que le minimum de la fonction f_b: $q(x) - b.x$ est atteint un un unique point x_0 solutions de l'équation $Ax=b$.

Exercice 2.16. Equation de transport.

Un liquide sympathique s'écoule tranquillement dans le plan. A chaque point (x,y) du plan est associé un vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, où a, b sont des fonctions continues. On utilise ce liquide pour transporter un objet dont la position à l'instant 0 est représente par le graphe d'une fonction $f(x,y)$. On note $f(x,y,t)$ le graphe représentant notre objet à l'instant t, $f(x,y,0) = f(x,y)$.

On suppose que si Δt est un accroissement petit de t la position $(x(t), y(t))$ de notre objet à l'instant $t + \Delta t$ est celle qu'il avait à l'instant t translaté du vecteur $(\Delta t)\,\vec{v}$, avec une erreur négligeable devant $(\Delta t)\vec{v}$. AUtrement dit $f(x(t+\Delta t), y(t+\Delta(t)), t+\Delta(t)) = f(x,y,t)$.

0. Rappeler la définition de $f(x,y,t)$ dérivable.

1. En déduire que l'on a l'équation de transport.

$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x,y) + a\frac{\partial f}{\partial x}(t,x,y) + b\frac{\partial f}{\partial y}(t,x,y) = 0$

2. Une goutte de notre liquide suit, au cours du temps la trajectoire $M(t) = (x(t), y(t))$, de sorte que

$\frac{dx}{dt}(t) = a(x(t), y(t)), \frac{dy}{dt}(t) = b(x(t), y(t))$. Montrer que $f(M(t), t)$ reste constante.
3. On suppose que a, b sont deux constantes, démontrer que $f(t, x, y) = f(0, x - at, y - bt)$ et interpréter ce résultat.

2.3. FONCTION À VALEURS DANS $\mathbb{R}^n$.

Nous avons étudié les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, mais pourquoi ne pas étudier les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Après tout une fonction $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ n'est rien d'autre que la donnée de m fonctions $f_1, \ldots f_m$. Sa différentielle ou dérivée va juste être la collection des dérivées des f_i. Quand on les met ensemble on trouve une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ (une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est linéaire si et seulement si les m applications coordonnées le sont).

Les objets que nous avons à considérer sont des points d'un espace vectoriel (ou affine) et des applications entre ces espaces. Quand l'espace vectoriel a une base $(e_1, \ldots e_n)$ on peut décrire un vecteur par ses coordonnées $x = \Sigma_{i=1}^n x_i e_i$.

Il est important pour les calculs en algèbre linéaire de mettre ces coordonnées sous la forme d'une matrice colonnes $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}$. Une forme linéaire est quand à elle une matrice ligne $(y_1, \ldots y_n)$.

Donc dans ce chapitre nous ferons attention à écrire les coordonnées sous forme de vecteur colonnes.

2.3.1. Dérivabilité en un point.

Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, x_0 un point de E et $f: A \to F$ une fonction définie au voisinage de x_0.

DÉFINITION 2.31. *On dit que f est différentiable en x_0 (on dit aussi dérivable en x_0) si il existe une application linéaire L: $E \to F$ telle que $f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + o(\|h\|)$.*

On peut alors refaire la théorie comme dans le cas ou $\dim(F) = 1$. En particulier

PROPOSITION 2.32. *Si f est différentiable en x_0, alors f est continue en ce point.*

Démonstration. Comme $f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + o(\|h\|)$, $\|f(x_0 + h) - f(x_0)\| = \|L(h) + o(\|h\|)\| = O(\|h\|)$ □

Par aller plus loin, nous allons mettre des coordonnées dans tout ça. On choisit d'abord des coordonnés sur l'espace but F autrement dit une base de F . Alors $F \approxeq \mathbb{R}^m$, et l'application f n'est autre que la donnée de m applications $f_1, \ldots . f_m$ coordonnées que nous représentons par le vecteur colonne $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_m \end{pmatrix}$.

PROPOSITION 2.33. *Si f est différentiable en x_0 si et seulement si les f_i le sont.*

Démonstration. On écrit $f = \Sigma_{i=1}^n f_i v_i$ ou les v_i sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^m$
$f(x_0 + h) = \Sigma_{i=1}^n f_i (x_0 + h) v_i$

Si les f_i sont différentiables en x_0 alors $f_i (x_0 + h) = f_i(x_0) + f_i'(x_0) h + o(h)$ et donc $f(x_0 + h) = f(x_0) + \Sigma_{i=1}^n f_i (x_0 + h) v_i = f(x_0) + \Sigma(f_i'(x_0) h) v_i + o(h)$.

Réciproquement si f est différentiable en x_0 si f_i' désigne la forme linéaire obtenue en regardant la $i-$ème coordonnée du vecteur $f'(x_0) h$, on a

$f(x_0+h)=f(x_0)+\Sigma(f_i'(x_0)\,h)v_i+o(h)$.
Donc en regardant juste la $i-$ème coordonnée, on a
$f_i(x_0+h)=f_i(x_0)+\Sigma(f_i'(x_0)\,h)+o(h)$.

□

Dans la pratique les espace E,F ont des bases préférées, et sont donc identifiés à $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement et la fonction f est donnée par des formule qui dépendent des coordonnées. Une application linéaire est alors juste une matrice.

Proposition 2.34. *Soit* $x_0=\begin{pmatrix} x_1\\ \\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$ *et* $f\colon A\to\mathbb{R}^m$, $f=\begin{pmatrix} f_1\\ \\ f_m\end{pmatrix}$ *une fonction définie au voisinage de* x_0. *Si* f *est dérivable en* x_0 *alors sa dérivée est l'application linéaire dont la matrice est* $f'(x_0)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \\ \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$. *Le coefficient* $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ *se trouve à la i-ème colonne et la jième ligne.*

Exemple 2.35. Passage en coordonnées polaires. Souvent un point du plan (privé de l'origine)est repéré par ses coordonnées cartésiennes $\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$ ou ses coordonnées polaires $\begin{pmatrix} r\\ \theta\end{pmatrix}$. On a les formules $x=\mathrm{r}\cos(\theta)$, $y=r\sin(\theta)$. Autrement dit on a une application
$F=\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2-\left\{\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}\right\}$ définie par $F\begin{pmatrix} r\\ \theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\cos\theta\\ r\sin\theta\end{pmatrix}$

Donc F est différentiable et sa différentielle en r_0,θ_0 est la matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}$

On aurait pu écrire $dx=\cos\theta dr-r\sin\theta d\theta$, $dy=\sin\theta dx+r\cos\theta d\theta$

Matriciellement $\begin{pmatrix} dx\\ dy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta dr-r\sin\theta d\theta\\ \sin\theta dx+r\cos\theta d\theta\end{pmatrix}$

Donc $\begin{pmatrix} dx\\ dy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} dr\\ d\theta\end{pmatrix}$

dans la pratique si F est donnée par $F\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f\\ g\end{pmatrix}$ on écrit
$F'\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx\\ dy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} df\\ dg\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} dx\\ dy\end{pmatrix}$

On introduit aussi une notion de différentielle totale, notée dF. Si $F\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1\\ f_m\end{pmatrix}$, On a

$dF\begin{pmatrix} x_1\\ x_n\end{pmatrix}=F'\begin{pmatrix} x_1\\ x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx_1\\ dx_n\end{pmatrix}$ ou
$dF\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} df_1\\ df_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial f_1}{\partial x_n}dx_n\\ \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_{n1}}dx_1+\ldots+\frac{\partial f_m}{\partial x_n}dx_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} dx_1\\ \vdots\\ dx_n\end{pmatrix}$

2.3.2. Fonction de classe C^1.

Nous avons vu qu'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}$ est de classe C^1 si et seulement si elle admet des dérivées partielles continues par rapport à chaque coordonnées. Comme une fonction $f=\begin{pmatrix} f_1\\ \vdots\\ f_m\end{pmatrix}$ définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^m$ est dérivable si et seulement si les fonctions coordonnées le sont nous en déduisons.

THÉORÈME 2.36. *Une fonction* $f\colon\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $f=\begin{pmatrix} f_1\\ \vdots\\ f_m\end{pmatrix}$ *est de classe* C^1 *si et seulement si les fonctions* f_i *admettent des dérivées partielles continues par rapport à chaque coordonnées. Dans ce cas la différentielle de* f *en un point est la matrice* $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$.

Dans la pratique, on étudie toujours les fonction de classe C^1, jamais des fonctions juste dérivables.

2.3.3. Le théorème de composition.

Le théorème de composition est très facile à énoncer et à démontrer. Par contre sa mise en oeuvre pratique pose toujours problème quand on le fait pour la première fois. C'est une généralisation de la formule $(g\circ f)'=(g'\circ f)\,f'$, bien utile dans l'analyse des fonctions d'une variable réelle.

Rappelons q'abord que nous avons déjà fait le calcul quand la source de f est de dimension 1 ainsi que le but de g $d(g\circ f)=\Sigma\frac{\partial g_i}{\partial y_i}.df_i$, et en principe cette formule doit suffire à notre bonheur puisqu'au fond calculer une différentielle revient à calculer des dérivées partielles de fonctions, c'est à dire précisément se ramener à ce cas.

Nous partons donc de trois espaces vectoriels de dimension finie E,F,G de deux ouverts $\Omega\subset E$, $O\subset F$ et de deux fonctions :

$f\colon\Omega\to O$ et $g\colon O\to G$.

Nous fixons un point $x_0\in\Omega$ et on pose $y_0=f(x_0)$.

THÉORÈME 2.37. *On suppose que* f *est différentiable en* x_0*, que sa différentielle est* $f'(x_0)\in L(E,F)$*, que* g *est différentiable en* $y_0=f(x_0)$ *et que sa différentielle est* $g'(y_0)\in L(F,G)$*.*

1. *Alors* $g\circ f$ *est différentiable en* x_0 *est sa différentielle est la composée* $g'(y_0)\circ f'(x_0)=g'(f(x_0))\circ f'(x_0)$*.*
2. *Si de plus* f *est différentiable en tout point de* Ω *et si* g *est différentiel sur* O*, alors* $g\circ f$ *est différentiable sur* Ω *et sa différentielle est* $(g\circ f)'=(g'\circ f)\circ f'$
3. *Si de plus* f *et* g *sont* C^1*, alors* $g\circ f$ *l'est aussi.*

Démonstration. Par hypothèse $f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+o(h)$

On applique g : $g\circ f(x_0+h)=g(f(x_0)+f'(x_0)h+o(h))$

Comme $g(f(x_0)+k)=g(f(x_0))+g'(f(x_0))\,k+o(k)$, en posant $k=f'(x_0)h+o(h)$,et en notant que $k=O(h)$, on obtient

$g(f(x_0)+k)=g(f(x_0))+g'(f(x_0))\,f'(x_0)h+g'(f(x_0))(o(h))+o(k)$

Comme $g'(f(x_0))$ est lipshitzienne de rapport $\|g'(f(x_0))\|$, $g'(f(x_0))(o(h))=o(h)$, et on obtient bien $g(f(x_0)+k)=g(f(x_0))+(g'(f(x_0))\circ f'(x_0))\,h+o(h)$.

La point 2 résulte immédiatement du point 1 appliqué en tous les points de Ω, et le point 3 en notant que si $x\to f'(x)$ est continue et si $y\to g'(y)$ aussi, alors $x\to(g'(f(x)))\circ f'(x)$ aussi

□

Dans la pratique $E=\mathbb{R}^n,F=\mathbb{R}^m,G=\mathbb{R}^p$, la fonction f est donnée par des formules $f\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\\ \vdots\\ f_m\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\end{pmatrix}$ et $g\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g_1\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}\\ \vdots\\ g_p\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}\end{pmatrix}$.

Dans ce cas la différentielle est juste le produit de deux matrices.
$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial y_m} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

Evidemment la première matrice est calculée au point $\begin{pmatrix} f_1\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ \vdots \\ f_m\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, la seconde au point $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Nous notons que la première matrice am colonnes et p ligne, la seconde a n colonnes et m lignes ce qui permet bien sur de les composer. La matrice obtenue a n colonnes et p lignes et sont terme général est $a_{k,i} = \quad \Sigma_{j=1}^{m} \frac{\partial g_k}{\partial y_j} \times \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$.

Dans la pratique, nous nous ramènerons toujours au cas ou $p=1$, car il suffit de savoir calculer les différentielles coordonnées par coordonnées. En fait la formulation devient

Proposition 2.38. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$et $O \subset \mathbb{R}^m$ *deux ouverts,* $f : \Omega \to O$ *et* $g : O \to \mathbb{R}$ *deux fonctions. On suppose que* f *et* g *sont différentiels, alors* $g \circ f = g\left(\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_m(x) \end{pmatrix}\right)$ *est différentiable et sa différentielle est la forme linéaire dont la matrice ligne est*

$$(g \circ f)'(x) = \left(\Sigma_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i}\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_m(x) \end{pmatrix} \times \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$$

En fait, il est beaucoup plus facile d'énoncer ce théorème en utilisant le langage des formes différentielles.

Proposition 2.39. *Même hypothèse que la proposition précédente,* $d\,(g \circ f) = \Sigma_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i} \times \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i$

Pour se simplifier encore la vie, au lieu de noter $f_1(x), \dots f_m(x)$ les coordonnées des images de x par l'application f, on les note souvent $y_1(x), \dots y_m(x)$. **Tous les physiciens font ça**. La formule devient

$$d\,(g \circ f) = d(g(y_1(x), \dots, y_m(x))) = \Sigma_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i} \times \frac{\partial y_j}{\partial x_i} dx_i$$

Qui est particulièrement simple à calculer en pratique. Si g est à valeur dans $\mathbb{R}^p$, on fait ça coordonnées par coordonnées.

Voici un exemple important et très utile.

$F = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 - \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ définie par $F(r, \theta) = (x, y) = (\ r\cos\theta, r\sin j\ )$est le passage en coordonnées polaires. On suppose donnée une fonction $g(x, y)$, alors la fonction composée $g \circ F = g(\ r\cos\theta, r\sin j\ )$ est juste la fonction g exprimée en coordonnées polaires.

Sa différentielle est
$dg \circ F = \left(\frac{\partial g}{\partial x} . \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial y} . \frac{\partial y}{\partial r}\right) dr + \left(\frac{\partial g}{\partial x} . \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial g}{\partial y} . \frac{\partial y}{\partial \theta}\right) d\theta$

$dg \circ F = \left(\frac{\partial g}{\partial x} . \cos(\theta) + \frac{\partial g}{\partial y} . \sin(\theta)\right) dr + \left(-\sin(\theta) r \frac{\partial g}{\partial x} + \cos(\theta) r \frac{\partial g}{\partial y}\right) d\theta$

La premier coefficient est la dérivée partielle $\frac{\partial g \circ F}{\partial r}$ le second $\frac{\partial g \circ F}{\partial \theta}$

Notons que dans le livres de physique on ne fait pas de différence entre g et $g \circ F$. On dit juste que $g \circ F$ est la fonction g « calculée en coordonnées polaires ».

2.3.4. Inégalité des accroissements finis.

En analyse d'une fonction d'une seule variable, on utilise souvent le théorème des accroissement finis.

THÉORÈME 2.40. *Soit $f = [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, alors il existe un c tel que* $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.□

La démonstration se fait d'habitude en utilisant le théorème de Rolle. D'un point de vue cinématique, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ désigne la vitesse moyenne d'un point matériel suivant la loi horaire f, et le théorème nous dit qu'il y a un instant ou elle est égale à la vitesse observée. En effet si à tout instant $f'(t) < v_0$ la vitesse moyenne ne peut être v_0. (cet argument utilise un peu plus que dérivable, par exemple C^1, pourquoi ?).

Comme il n'y a aucune raison de se limiter à la dimension 1, essayons de voir ce qui se passe en dimension supérieure si $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$, alors la vitesse à chaque instant est 1, alors que $\frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi} = 0$, donc le résultat n'est surement pas vrai tel que on la remplace par une inégalité qui va nous dire que la distance parcourue est inférieure ou égale à la vitesse maximale fois la distance entre les extrémités.

THÉORÈME 2.41. *(première version) Soit $f: \Omega \subset E \to F$ est application de classe C^1, $a, b \in \Omega$. On suppose que le segment $[a, b]$ est contenu dans Ω. Alors*
$\|f(b) - f(a)\|_F \leqslant \|b - a\| \times \sup_{x \in [a,b]} \|f'(x)\|$

Remarque 2.42. Dans ce théorème, il y a trois normes différentes. La norme sur E, celle sur F et la norme associée sur $L(E, F)$

Démonstration. On considère le paramétrage $x(t) = a + t\,(b - a)$ du segment parcouru à la vitesse constante $\|b - a\|$.

On a $f(b) - f(a) = f(x(1)) - f(x(0)) = \int_0^1 (f \circ x)'(t)\,dt = \int_0^1 (f' \circ x).x'(t)\,dt$

Ici, $f' \circ x$ est une application linéaire de norme inférieure à $\sup_{x \in [a,b]} \|f'(x)\|$, alors que x' est un vecteur de norme $\|b - a\|$. Donc $(f' \circ x).x'(t)$ est un vecteur de norme inférieure à $\|b - a\| \times \sup_{x \in [a,b]} \|f'(x)\|$ en tout point de $[0, 1]$, d'ou le résultat. □

Pour aller plus loin, on rappelle la définition de convexité.

DÉFINITION 2.43. *Une partie Ω d'un espace vectoriel E est dite convexe si pour tout couple de points a, b de E le segment $[a, b]$ est dans E.*

COROLLAIRE 2.44. *Soit Ω une partie convexe de E, $f: \Omega \subset E \to F$ est application de classe C^1. Alors pour tout couple a, b de points de Ω*
$\|f(b) - f(a)\|_F \leqslant \|b - a\| \times \sup_{x \in \Omega} \|f'(x)\|$

COROLLAIRE 2.45. *Sous les mêmes hypothèse, si $K = \sup_{x \in \Omega} \|f'(x)\| < \infty$, l'application f est K lipshitzienne.*

2.3.5. Exercices.

Exercice 2.17. on pose $F(x, y) = f(u, v)$ avec $u = x^2 - y^2, v = e^{xy}$. Calculer dF
on pose $F(r, \theta) = \mathrm{Arctg}\frac{x}{y}$ avec $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$. Calculer dF

Exercice 2.18. Soit $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aussi de classe C^1. On pose $G(x, y) = g \circ u$. Calculer $\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}$.

Exercice 2.19. L'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $p(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ s'appelle le changement de variables polaires.

Calculer p'.

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $F = f\circ p$. Calculer dF en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \dots$.

Exercice 2.20. On considère application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $q(r,t) = \begin{pmatrix} r\,\mathrm{ch}\,t \\ r\,\mathrm{sg}\,t \end{pmatrix}$.

Calculer p'.

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $F = f\circ q$. Calculer dF en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \dots$.

Calculer $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ (ici $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ veut dire $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$..)

Exercice 2.21. L'application $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $p(r,\theta,\varphi) = (r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)^t$ s'appelle le changement de variables polaires.

Calculer p'.

Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $F = f\circ p$. Calculer dF en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \dots$.

Démontrer que si $f(x,y,z) = \Phi(x^2+y^2+z^2)$, alors $\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0$

2.4. Dérivée d'ordre supérieur et formule de Taylor.

Pour l'étude locale d'ne fonction d'une seule variable, on utilise la formule de Taylor

$$f(x_o + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \dots + f^n(x_0)\frac{h^n}{n!} + o(h^n)$$

Cette formule est d'ailleurs valable quel que soit la dimension du but.

Théorème 2.46. *Soit $f\colon I \subset \mathbb{R} \to E$ une fonction n fois dérivable, on a*

$$f(x_o + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \dots + f^n(x_0)\frac{h^n}{n!} + o(h^n)$$

Démonstration. Cela résulte immédiatement de la dimension 1, en écrivant f en coordonnées. □

Il est tout a fait légitime de se demander de généralise cela en dimension supérieure. En principe, on devrait pouvoir se ramener au cas de la dimension 1 en calculant des dérivées partielles, mais les choses ne sont pas aussi simple que cela. La première chose à comprendre est l'ordre 2.

2.4.1. La dérivée seconde est symétrique.

SI $f\colon \Omega \subset E \to F$ est dérivable, $f'\colon \Omega \to L(E,F)$ est donc une application a valeur dans un espace vectoriel, et on a le droit de se demander si f' est encore dérivable. En terme de coordonnées si $E = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}^m$ $f'(x)$ est la matrice de terme général $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$. Donc f' est d classe C^1 si et seulement si les fonctions $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ le sont. Dans ce cas, la dérivée de f' sera une application de Ω à valeurs dans $L(E, L(E,F))$. Une telle application s'appelle application bilinéaire de E dans F étant donnés deux vecteur u, v de E $f''(x,y)\colon (f(x)'(u))'(v)$ est un vecteur de f qui dépend linéairement de u et v.

Comme nos connaissances d'algèbre linéaires sont à ce jour insuffisantes, nous allons supposer que F est de dimension 1, et que $E = \mathbb{R}^n$.

Dans ce cas la dérivée de f est la matrice ligne $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$, et donc si f est encore dérivable, sa dérivée seconde doit être données par les dérivées partielles $\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\right)$.

On note $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ la dérivée $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$, et si $i = j$ on note $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ la dérivée $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$.

La premier théorème est que cette dérivée est **symétrique**, autrement dit on a la formule $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$. Ce résultat est connu depuis le 18-ième siècle, mais il faut attendre jusqu'à la fin du 19-ième pour avoir une démonstration juste dans le cadre optimal par Schwarz [2.11] . Cadre optimal veut dire qu'on suppose que f est dérivable au voisinage de x_0 et f' est dérivable juste en x_0. juste veut dire que les nombreuses démonstrations publiées avant sont considérées comme fausses ou insuffisantes.

THÉORÈME 2.47. *(théorème de Schwarz, publié par Clairault en 1739, cent ans avant la naissance de Schwarz) . Soit $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que $f'=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},.,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ est dérivable en x_0. Alors en ce point $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$.*

Démonstration.

Il s'agit de dérivées partielles, donc on peut très bien se ramener au cas d'une fonction de deux variables (fixer les autres). Et par translation on se ramène au cas ou $x_0=(0,0)$, et il s'agit de démontrer que

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$

Pour $l>0$ fixé, nous posons $u(x)=f(x,l)-f(x,0)$

Par le théorème des accroissements finis, nous voyons qu'il existe qu'il existe un $t\in]0,l[$ tel que $u(l)-u(0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t,l)-\frac{\partial f}{\partial x}(t,0)\right)l$

Par hypothèse, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est dérivable en $(0,0)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(t,l)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)t+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)l+o(l)$ (on sait que $0<t<l$)

Et

$\frac{\partial f}{\partial x}(t,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)t+o(l)$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(t,l)-\frac{\partial f}{\partial x}(t,0)=\mathrm{cl}+o(l)$

Soit $u(l)-u(0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)l^2+o(l^2)$

De même si $v(y)=f(l,y)-f(0,l)$ et $0\leqslant y\leqslant l$

On a $v(l)-v(0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)l^2+o(l^2)$

Mais $u(l)-u(0)=f(l,l)-f(l,0)-f(0,l)+f(0,0)=v(l)-v(0)$

Donc, en fait $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)l^2+o(l^2)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)l^2+o(l^2)$. Et on a le résultat en divisant par l^2 et en faisant $l\to 0$.

□

Exemple 2.48. Soit $q(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$ un polynôme homogène de degré 2.

On a clairement $q(0,0)=0,\frac{\partial q}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial q}{\partial y}(0,0)=0,$ il en résulte que

$ax^2+2bxy+cy^2=\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(0,0)x^2+2\frac{\partial^2 q}{\partial x\partial t}(0,0)xy+\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}(0,0)y^2$

Ainsi, le terme à l'ordre 2 est juste q. Mais en fait c'est vrai en tout point.

$q(x_0+x,y_0+y)=q(x_0,y_0)+2ax_0x+2bx_0y+2by_0x+2cy_0y+q(x,y)$

2.11. Alexis Claude Clairault, mathématicien français 1713-1765, Hermann Amandus Schwarz, mathématicien allemand 1843-1921. L'énoncé précis et la démonstration sous des hypothèses assez naturelles est donnée par Clairault en 1739, avec une application importante que nous étudierons plus tard.

2.4.2. Formule de Taylor à l'ordre 2.

Un théorème très important est alors la formule de Taylor à l'ordre 2.

Théorème 2.49. *Soit $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dérivable. on suppose que f admet une dérivée seconde au point $x_0 = (x_1, \dots x_n)$. Alors si $h = (h_1, \dots h_n)$*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \Sigma_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i + \frac{1}{2} \Sigma_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j + o(\|h\|^2).$$

Le premier terme est un fonction linéaire de h le second un polynôme homogène de degré 2. On appelle cela une *forme quadratique*.

Démonstration. Pour se simplifier la vie, on suppose que $n = 2$ et $x_0 = (0, 0)$.

Quitte à remplacer f par
$g(x, y) = f(x, y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) y - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) x^2 - \Big(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\Big) x y - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) y^2$

On peut supposer que $f'(0,0) = 0$, ainsi que $f''(0,0) = 0$

$f'(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ est dérivable en $0, 0$. On a donc, par définition

$f'(x, y) = f'(0,0) + \frac{\partial f'}{\partial x}(0,0)\, x + \frac{\partial f'}{\partial y}(0,0)\, y + o(x, y)$
$f'(x, y) = f'(0,0) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) x + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(0,0) y + o(x, y) = o(x, y).$

On peut alors appliquer le théorème des accroissement finis pour obtenir
$\|f(x, y) - f(0,0)\| \leqslant \|(x, y)\|. \mathrm{Sup}_{\|(u,v)\| \leqslant \|(x,y)\|} \|f'(u, v)\| = \|(x, y)\| o(\|(x, y)\|) = o(\|(x, y)\|^2)$

□

Remarque 2.50. On a utilisé le théorème de Schwarz pour démontrer cela, pouvez vous dire ou exactement.

2.4.3. Un peu de formes quadratiques.

Définition 2.51. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Une forme quadratique sur E est une fonction $f(x) = \Sigma\, a_{ij} x_i x_j$ qui est un polynôme homogène de degré 2 en les coordonnées.*

Exemple 2.52. Le produit de deux formes linéaires est une forme quadratique

Plus important pour nous est que le second terme de la formule de Taylor est une forme quadratique.

Proposition 2.53. *Soit $f\colon \Omega \subset E \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, et* supposons que *f admette une dérivée seconde en x_0 alors l'application $E \to \mathbb{R}$ définie par $q(x_0) h = (f''(x_0) h) h = \Sigma_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j$ est une forme quadratique*

Cette définition ne dépend pas du choix d'une base. Pour étudier les fonctions au voisinage d'un point il va falloir utiliser le théorème de Sylvester qui est très facile mais qui sera fait dans le cours d'algèbre. Nous énonçons icic le théorème en question, et nous le démontrons en dimension 2 pour pouvoir l'utiliser tranquillement dans les exercices. Evidemment, il faut connaitre la démonstration pour pouvoir la mettre en oeuvre

THÉORÈME 2.54. *Soit E un espace vectoriel de dimension n et q une forme quadratique. Il existe une base de E dans lequel q s'exprime $q(x) = -\Sigma_{i=1}^{p} x_i^2 + \Sigma_{i=p+1}^{r} x_i^2$* □

Remarque 2.55. L'entier r s'appelle le rang de q, et p l'indice. Si $p=0$ et $r=n$ on dit que q est définie positive, si $p=n$ que q est définie négative.

THÉORÈME 2.56. *On suppose que $n=2$. On écrit $q(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$. On pose $\Delta = ac-b^2$ Si $\Delta>0$, il existe une base de E dans laquelle q s'écrit soit $q(u,v)=u^2+v^2$, soit $-u^2-v^2$.*

Si $\Delta<0$ il existe une base de E dans laquelle q s'écrit soit $q(u,v)=u^2-v^2$,

Si $\Delta=0$ et $q\neq 0$ il existe une base de E dans laquelle q s'écrit soit $q(u,v)=u^2$, soit $q(u,v)=-u^2$

Démonstration. On écrit $q(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$.

1. Le premier cas à discuter est le cas ou $a=c=0$.

Si $b=0$, q=0. Sinon, on écrit $2bxy=\left(\frac{bx}{2}+y\right)^2-\left(\frac{bx}{2}-y\right)^2$. On pose $u=\frac{bx}{2}+y$, $v=\frac{bx}{2}-y$, et on a bien $q(x,y)=u^2-v^2$, et les deux formes linéaires u,v sont bien indépendantes car $x=\frac{u+v}{b}$, $y=\frac{u-v}{2}$.

2. Quitte à changer x et y, ops, $a\neq 0$, et on le met en facteur

$q(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2=a\left(x^2+2\frac{b}{a}xy+\frac{c}{a}y^2\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{a}xy\right)^2+\left(-\frac{b^2}{a^2}+\frac{c}{a}\right)y^2\right)=$
$a\left(\left(x+\frac{b}{a}xy\right)^2+\frac{\Delta}{a^2}y^2\right)$

Quitte à changer q en $-q$, on peut supposer que $a>0$. Alors $q(x,y)=u^2+\mathrm{signe}(\Delta)\,v^2$, avec $u=\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{a}xy\right)$, $v=\sqrt{\frac{|\Delta|}{a}}y$. les deux formes étant indépendantes ce sont des coordonnées dans une base.

□

Méthode pratique. La démonstration est en fait assez pratique à mettre en oeuvre.

Si $\Delta>0$ soit q s'écrit u^2+v^2, soit $-(u^2+v^2)$. le signe est celui de a. On dit que q est définie positive ou négative. En fait pour tout vecteur non nul $q(x,y)>0$ ou $q(x,y)<0$ respectivement.

Si $\Delta<0$ q s'écrit u^2-v^2, on dit que q est indéfinie.

Si $\Delta=0$ et $q\neq 0$ qui s'écrit u^2 ou $-u^2$.

DÉFINITION 2.57. *On dit que la forme quadratique est non dégénérée si $\Delta\neq 0$, dégénérée sinon.*

Si $\Delta>0$, on dit qu'elle est définie. Alors q est de signe constant, positif si $a>0$ et négatif si $a<0$.

PROPOSITION 2.58. *Cette définition ne dépend pas de la base choisie.*

En effet, si $q\neq 0$, $\Delta=0$ si et seulement si q s'annule le long d'une unique droite, $\Delta<0$ si q s'annule le long de deux droites, $\Delta>0$ sis et seulement si q s'annule juste à l'origine.

2.4.4. Points critiques d'une fonctions ; le cas de deux variables.

Comme en dimension 1, la dérivée seconde sert à étudier localement les fonctions au voisinage d'un point où la dérivée s'annule.

DÉFINITION 2.59. *Soit $f:\Omega\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable. On dit que x_0 est un point critique de f si la dérivée $f'(x_0)$ est nulle.*

Nous avons déjà vu que si x_0 est un point ou la fonction atteint un maximum ou un minimum c'est un point critique. La réciproque (même en dimension 1) est bien évidemment fausse : un renseignement sur la dérivée ne peut donner que des informations sur le comportement local de la fonction. Si f est deux fois dérivable au voisinage de ce point, on a donc un développement limité donné par la formule de Taylor, que l'on rappelle ici.

THÉORÈME 2.60. *Soit f deux fois dérivable au voisinage d'un point (x_0,y_0), alors*

$f(x_0 + x,\, y_0 + y) = f(x_0,\, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\, y_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\, y_0)y + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,\, y_0)x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \mathrm{d} y}(x_0, y_0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)y^2) + o(x^2 + y^2)$.

Si de plus (x_0, y_0) *est un point critique, de* f, *alors*
$f(x_0 + x, y_0 + y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \mathrm{d} y}(x_0, y_0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)y^2) + o(x^2 + y^2)$

Ce qui est important c'est que le comportement de f au voisinage du point considéré est (à une petite erreur près) le même que celui de la forme quadratique $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \mathrm{d} y}(x_0, y_0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)y^2)$.

Définition 2.61. *On dit que la fonction* f *admet un maximum (ou un minimum) local en* x_0 *si il existe un voisinage de* x_0 *tel que la restriction de* f *à ce voisinage atteigne un maximum en* x_0.

Exemple 2.62. Sur une carte des Alpes, on peut lire l'altitude. Il y a un maximum local au voisinage de tous les sommets (Mont Maudît, Dôme du Gouter) et un maximum global au sommet du Mont Blanc.

Définition 2.63. *Soit* $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *une fonction deux fois dérivable. On dit que* x_0 *est un point critique non dégénéré de* f *si la dérivée* $f'(x_0)$ *est nulle, mais si la forme quadratique* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0)\, x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0)\, xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0)\, y^2$ *est non dégénérée, ou si* $\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0)^2 \neq 0$.

Théorème 2.64. *Soit* $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *une fonction deux fois dérivable, et* x_0 *un point critique non dégénéré de* f.
Si $\Delta < 0$, x_0 *n'est ni un maximum local, ni un minimum local. On dit que c'est un point selle, ou un point col.(En anglais saddle-point ou Mountain-pass).*
Si $\Delta > 0$, *alors soit* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) > 0$ *et* x_0 *est un minimum local, soit* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) < 0$ *et c'est un maximum local.*

Cela résultat se déduit immédiatement de la formule de Taylor.

2.4.5. * Notation différentielle et dérivée seconde d'une fonction composée.

Nous avons utilisé la notation différentielle $df = \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i}.dx_i$ pour calculer la différentielle d'une fonction en terme des différentielles des fonctions coordonnées. On veut pouvoir faire quelque chose d'analogue pour les différentielles secondes vue comme forme quadratiques. On a évidemment une notation de forme quadratique différentielle, c'est juste une application de $\Omega \subset \mathbb{R}^n \to Q(\mathbb{R}^n)$ espace vectoriel des formes quadratique. Comme on sait que le produit de deux formes linéaires est une forme quadratique, on peut par exemple considérer $dx_i.dy_i$, qui est la forme quadratique constante $(\xi_1, \ldots \xi_n) \to \xi_i \xi_j$. Avec ces notations, et en notant $d^2 f$ la forme quadratique différentielle $h \to f''(x)(h, h)$ nous obtenons

$$d^2 f = \Sigma_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) dx_i dx_j$$

cette formule est très utile dans la pratique.

On part de $df = \Sigma_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j$, et on dérive

$$d^2 f = \Sigma_{j=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j\right)$$

En notant que dx_i est une forme linéaire constante sa dérivée est donc nulle,

$$d^2 f = \Sigma_{j=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) dx_j$$

On a donc

$d^2f = \Sigma_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$

Cette notation est aussi bien utile pour calculer la dérivée seconde d'une fonction composée.

Le premier cas (très facile) est celui ou l'on compose une fonction $f = \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ avec une fonction $g: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, où A est une partie contenant $f(\Omega)$. On va supposer que f et g sont deux fois différentiables, comment calculer $d^2 g \circ f$

On écrit juste $dg(f(x,y)) = g'(f(x,y))\, df = g'(f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x}dx + g'(f(x,y))\frac{\partial f}{\partial y}dy$

puis on dérive une seconde fois :
$d^2(g \circ f) = \left(d\left(g'(f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right) \times dx + d\left(g'(f(x,y))\frac{\partial f}{\partial y}\right) \times dy$

Après il faut calculer les différentielles des fonctions $g'(f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x}, g'(f(x,y))\frac{\partial f}{\partial y}$, ce qui a chaque fois 4 termes, donc 8 au total.

Cette méthode marche aussi pour calculer la dérivée seconde d'une fonction composée $f = \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ avec une fonction $g: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, mais comme c'est un peu plus dur, on se limite au cas ou $n = m = 2$

On se donne donc $f(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ et $g(u,v)$, de sorte que l'on écrit
$g \circ f(x,y) = g(x(u,v), y(u,v))$

On a donc

$dg \circ f = \frac{\partial g}{\partial x}((x(u,v), y(u,v)))\left(\frac{\partial x}{\partial u}((u,v))\, du + \frac{\partial x}{\partial v}((u,v))\, dv\right) + \frac{\partial g}{\partial y}((x(u,v), y(u,v)))\left(\frac{\partial y}{\partial u}((u,v))\, du + \frac{\partial y}{\partial v}((u,v))\, dv\right)$

On regroupe alors les termes en du et dv : on voit apparaitre 4 termes, chacun étant le produit de deux fonctions par une différentielle du ou d v

$dg \circ f = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x(u,v), y(u,v))\, \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial y}(x(u,v), y(u,v)) \times \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\right)du + \text{terme en } dv$

Pour calculer $d^2 g \circ f$, il suffit donc de calculer la différentielle de ces 4 termes produit, ce qui fait apparaitre 4 nouveaux termes à chaque fois, et donc 16 termes au total. En fait un peu moins si on réfléchit.

On voit que, même si la méthode à suivre est très simple, la formule générale est très compliquée, parfaitement inutile et ne peut s'apprendre. Il faut simplement refaire le calcul à chaque fois. A titre d'exemple, nous allons calculer le Laplacien en coordonnées polaires.

Soit $f(x,y)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, si on passe en coordonnées polaire, on pose $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. (Les physiciens ne font pas de différence entre f et F, ce qui n'est pas très grave pour les calculs, mais peut arriver à des confusions.

On calcule $dF = d\,(f(r\cos\theta, r\sin\theta)) = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta\, \mathrm{dr} - \frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta\, r\, d\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\, \mathrm{dr} + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta\, r\, d\theta$
donc : $dF = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\right)dr + r\left(\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta - \frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta\right)d\theta$

puis $\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta,\ \frac{\partial F}{\partial \theta} = r\left(\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta - \frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta\right)$

puis
$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\right) =$

$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\sin\theta\right)\cos(\theta) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cos\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin\theta\right)\sin\theta$

On obtient

$$\boxed{(1) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\sin\theta\cos\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}$$

$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = r\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta - \frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta\right) = r\left(-\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y} - \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\times(-\sin\theta) r\cos\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\times r\cos^2\theta + r\sin^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - r\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)$, et on obtient

$$\boxed{(2)\ \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = r^2\left(\sin^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\sin\theta\cos\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - r\left(\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}\right)}$$

Si on veut on aurait aussi

$\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\right) =$
$-\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y} - r\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r\cos^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - r\sin^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + r\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

Comme $\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r}$, en ajoutant [1] et $\frac{[2]}{r^2}$, il vient

$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}$

Ainsi,

$$\boxed{(3)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}}$$

Remarque 2.65. Cette formule est très utile si l'on veut calculer les fonctions harmoniques invariantes par rotation. Si f est invariante par rotation $\frac{\partial F}{\partial \theta} = 0$, et l'équation devient $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} = 0$

On pose alors $G(r) = \frac{\partial F}{\partial r}$, et on a $G' + 1/r \times G = 0$ qui s'intègre en $G(r) = \frac{C}{r}$, d'ou l'on tire $F(r) = c\ln(r) + \alpha$

2.4.6. Exercices.

Exercice 2.22. (Peano) On considère la fonction $f(x,y) = xy \times \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Démontrer que f est C^1 et que les dérivées partielles de f sont encore dérivables par rapport à x et y. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$. Que peut on en conclure.

Exercice 2.23. Calculer les dérivées partielles seconde de f.

1. $f(x,y) = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$.
2. $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$
3. $f(x,y) = \sqrt{xy + y^2}$
4. $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
5. $f(x,y,z) = xy + yz + zx$

Exercice 2.24. En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2, calculer les dérivées partielles à l'ordre 2 en $(0,0)$ de $f(x,y) = (1+x)^m(1+y)^n$.

Exercice 2.25. Points critiques de la fonction suivante. Dans chaque cas, on distinguera si c'est un maximum local , un minimum local un point selle ou un point dégénéré.

1. $f(x,y) = (2x - y + 1)^2 + (x - 3y)^2 + 1$
2. $f(x,y) = x^2 + 3y^2 + 2x - 4y$
3. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$
4. $f(x,y) = ay^2 - x^3$
5. $f(x,y) = (x^2 + y^2)\,e^{x^2 - y^2}$

6. $(x^2-a^2)^2+(x^2-a^2)(y^2-b^2)+(y^2-b^2)^2$

Exercice 2.26. On pose $u(x,y)=x^2+y^2, v(x,y)=xy$. soit $F(x,y)=f(u,v)$. Calculer les dérivées partielles première et seconde de F.

Exercice 2.27. Soit $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction 2 fois dérivable et $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction trois fois dérivable. Calculer les dérivées premières et seconde de $F(x,y)=f(x,y,\varphi(x,y))$

Exercice 2.28. On pose $u(x,y)=\text{Arctg}(y/x)$. Montrer que $\Delta u=0$, ou Δ est le Laplacien $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Retrouver le résultat en utilisant les coordonnées polaires.

Problème 2.3.

A. Jean le Rond d'Alembert.

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Une onde de célérité c est une fonction $u: I \times \mathbb{R}$ $u(x,t)$ de classe C^2 telle que $c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Dans la pratique, x mesure une distance (en mètre, ou cm, ou km.), t un temps (en seconde, heure, années etc) et c a la même dimension qu'une vitesse. La grandeur u est l'amplitude de l'onde, et son unité dépend de ce que l'on cherche. Par exemple, pour une vague[2.12] la grandeur u est mesurée en mètre, si c'est une pression, on prend le pascal (pour les sons le micropascal). Pour les ondes électromagnétiques, c'est plutôt une puissance, mesurée en watt.

- **Question 1.** On fait le changement de variables linéaire $x'=x-ct, y'=x+ct$. On pose $v(x',y')=u(x,t)$ Après avoir calculé x,t en fonction de x' et y' , démontrer que u satisfait l'équation des ondes si et seulement si $\frac{\partial^2 v}{\partial x'\partial y'}=0$, et en déduire qu'il existe deux fonctions de classe C^2 f,g telle que $v(x',y')=f(x')+g(y')$, ou bien $u(x,t)=f(x-ct)+g(x+ct)$.

- **Question 2.** Etudier la réciproque. Soit f et g deux fonctions de classe C^2. On pose $u(x,t)=f(x-ct)+g(x+ct)$. Démontrer que u satisfait l'équation des cordes vibrantes $c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

D'après ce qui précède une onde se décompose en deux : la première (seconde) $f(x-ct)$ $(g(x+ct))$ se propage vers la droite (gauche) au sens suivant : si t_0 est fixé, le graphe de la fonction $u(x,t_0)$ est obtenu en translatant le graphe de $f(x)$ $(g(x))$ vers la droite (gauche) par une translation de vecteur $ct_0\vec{i}$ $(-ct_0\vec{i})$, où $\vec{i}$ est le premeir vecteur de base.

- **Question 3.** On suppose de plus qu'on fixe la corde à deux extrémités $0, L$, c'est à dire que $u(0,t)=u(L,t)=0$.

  Démontrer que $g(x)=-f(-x)$ et que f est périodique de période $2L$.

Question 4. Sous les hypothèses de 3, L s'appelle la demi-longueur d'onde, c la célérité. Démontrer que pour tout x fixé, la fonction $u(x_0,t)$ est périodique de période T et que $cT=2L$.

On a $u(x_0,t)=f(x_0-ct)-f(-x_0-ct)$. Comme $f(x+2L)=f(x)$, $u\left(x_0, t+\frac{2L}{c}\right)=u(x_0,t)$

- **Question 5.** On admet que le son est une onde de célérité $330 m s^{-1}$. le « la 440 » est un son dont la fréquence (l'inverse de la période) est 440 Hz, c'est à dire dont la période est $T=\frac{1}{440}s$. Quelle est la longueur de la colonne d'air d'une clarinette quand le musicien joue un la?

B. Hendrick Anton Lorentz[2.13].

Jusqu'à la fin du 19-ième siècle, les physiciens pensaient que les lois de la physique ne changent pas quand l'observateur se déplace dans un mouvement uniforme : c'est le principe de relativité dit de Galilée. Galilée propose de faire de la physique dans la cabine d'un bateau qui est d'abord fixe, puis qui se déplace à vitesse constante, et dit que l'observateur ne pourra pas faire de différence.

Lorentz va reprendre cette question en étudiant les équations de Maxwell qui décrivent le champ électromagnétique. L'une des conséquences de ces lois est que le champ électrique, par exemple, satisfait l'équation des ondes $c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, et il est donc légitime de se demander ce qui se passe quand notre observateur est dans le bateau de Galilée.

Les lois de transformations de Galilée sont (pour un choix habile des coordonnées) $x=x'+vt', y'=y, z'=z, t'=t$.

(le temps est universel, tout le monde a la même horloge réglée à la même heure).

2.12. En anglais comme en allemand le même mot « wawe » « Welle » désigne une onde ou une vague.

2.13. H.A Lorentz, physicien néerlandais, Prix Nobel de physique, 1853-1928

Question 6. Un calcul simple montre que, (sauf catastrophe) la fonction $U(x', y, z, t') = u(x' + vt, y, z, t)$ ne satisfait plus l'équation des ondes $c^2\Big(\frac{\partial^2 U}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\Big) = \frac{\partial^2 U}{\partial t'^2}$. On peut le voir très simplement quand on se restreint aux solution indépendantes de y, z. Plus précisément soit $U(x', t')$ une solution de l'équation des ondes $c^2\frac{\partial^2 U}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial t'^2}$, et soit $u(x, t) = U(x - vt, t)$. En utilisant les fonctions f, g telles que $U(x', t') = f(x' - ct') + g(x' + ct')$, montrer que $u(x,t) = f(x - (c+v)t) + g(x - (c-v)t)$, puis que

$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (c^2 - (c+v)^2) f''(x - (c+v)t) + (c^2 - (c-v)^2)\, g''(x - (c-v)t)$.

En déduire que si u satisfait l'équation des ondes et $v \neq 0$, les deux fonctions f, g sont linéaires, et que $u(x,t) = ax + bt + c$

Ainsi, si pour des raisons physique, on rejette l'idée qu'une onde soit de cette forme (elle serait d'énergie infinie), il faut soit abandonner l'idée que l'onde électromagnétique se propage à la même célérité dans le repère galiléen, soit que la loi de Maxwell reste vraie dans un référentiel galiléen. Comme une célèbre expérience de Michelson et Morley a démontré que la célérité de la lumière est la même dans deux repères différents l'un étant en translation par rapport à l'autre avec une vitesse de $30 km s^{-1}$, il faut abandonner l'idée de référentiel galiléen. Lorentz s'est demandé à quelle condition une transformation **linéaire** des coordonnées conserve le caractère « onde de célérité donnée c » de la fonction étudiée.

Pour simplifier, il a décidé de ne pas toucher aux coordonnées y, z. La question est alors de trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'un changement linéaire de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ d & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$ soit tel que si $u(x,t)$ satisfait l'équation des ondes $U(x', t') = u(\gamma x' + \delta t', dx' + gt')$ la satisfait aussi.

- **Question 7.** Calculer les dérivées partielles des premier et second ordres de U par rapport à x' et t'.

- **Question 8.** En déduire que pour que U' satisfasse la même équation des ondes, il suffit que $c^2\gamma^2 - \delta^2 = c^2, c^2 d^2 - g^2 = -1, c^2(\gamma d) - g\delta = 0$.

- **Question 9.** On cherche une solution avec $\gamma, g, \delta, d > 0$. Noter que $\gamma^2 > 1$, $g^2 > 1$ En posant $\gamma = \mathrm{ch}\,(\alpha)$, $g = \mathrm{ch}(\beta)$ démontrer que $\gamma = g$ et $\frac{\delta}{c} = cd = \mathrm{sh}(\alpha) = \sqrt{\gamma^2 - 1}$

  On obtient la matrice de Lorentz $\begin{pmatrix} \gamma & c\sqrt{\gamma^2 - 1} \\ \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{c} & \gamma \end{pmatrix}$

- **Question 10.** pour l'observateur initial, l'origine du nouveau repère est le point défini par l'équation $x' = 0$. Montrer que celui ci suit un mouvement uniforme $x = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}\, t$, de vitesse apparente $v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$.

  Que l'on peut écrire $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ ainsi si si v désigne la vitesse apparente de l'origine du nouveau repère, la matrice de Lorentz est la matrice

  $$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{v}{c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix}$$

- **Question 11.** Contraction des longueurs. Un objet de longueur l dans le référentiel initial est embarqué dans notre nouveau référentiel. On veut calculer sa nouvelle longueur l'. Démontrer que : $l = \gamma l'$, soit $\frac{l'}{l} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.
  Ce résultat est connu sous le nom de « contraction des longueurs ».

2.5. FONCTIONS IMPLICITES.

Très souvent on a a étudier des quantités qui sont liées par une équation. Par exemple si un point est sur un cercle ses coordonnées satisfont $x^2 + y^2 = 1$. Cette formule ne permet pas d'exprimer y en fonction de x, mais si $y \neq 0$ et $y > 0$ on a une formule continue $(y(x) = \sqrt{1 - x^2})$. On dit que la formule $x^2 + y^2 = 1$ défini une fonction **implicite** y de x.

Un autre exemple est celui de la recherche d'une racine d'une équation par exemple $x^5 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Il n'y a pas de formule qui exprime $x(a, b, c, d)$. On dit que l'équation $x^5 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ définit une fonction implicite de (a, b, c, d). Ce n'est pas une vraie fonction car pour une valeur donné de (a, b, c, d), il peut y a voir 5 solutions.

Un troisième exemple vient de la thermodynamique. On a des variables d'état, par exemple P, V, T qui s'appellent la pression le volume et la température, et qui sont liées par une formule compliquée qui s'appelée l'équation d'état :

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - b) = nRT$$

n, a sont des constantes du sytème étudié, mais on peut aussi les faire varier si on veut.

Cette formule permet facilement d'exprimer T (ou P) en fonction de P, V, (ou (V, T) mais pas[2.14] V en fonction de P et T. La fonction V est une fonction **implicite** de P et T.

2.5.1. Fonctions implicites.

On se donne une fonction $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, par exemple $f(x, y)$ pour $n = 2$, $f(x, y, z)$ pour $n = 3$. On étudie l'équation $f(x_1, ..., x_n) = 0$, où on considère que x_n est l'inconnue. On cherche à exprimer une solution de cette équation comme fonction continue $y(x_1, ..., x_{n-1})$ où même C^1 des variables $(x_1, ..., x_{n-1})$. Comme on l'a vu, en général, ce n'est pas possible globalement, ni même localement. Cependant, au voisinage d'une solution $(x_1^0, ...x_n^0)$, on va voir que c'est le cas.

Si c'est possible, on a $f(x_1, ...x_{n-1}, y(x_1, ...x_{n-1})) = 0$, et en dérivant par rapport à x_i

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ...x_{n-1}, y) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, ...x_{n-1}, z) \times \frac{\partial y}{\partial x_i}(x_1, ...x_{n-1}, z) = 0$, que l'on écrit

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial x_i}(x_1, ...x_{n-1}, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ...x_{n-1}, y)}{\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, ...x_{n-1}, y)}}$$

Evidemment, pour faire ça, on a supposé $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, ...x_{n-1}, y) \neq 0$. Nous allons voir que cette condition est juste la condition de l'existence d'une fonction implicite

THÉORÈME 2.66. *Soit* $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. *Soit* $(x_1^0, ...x_{n-1}^0, y_n^0)$ *tel que* $f(x_1^0, ...y_n^0) = c$. *On suppose que* $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1^0, ...x_n^0) \neq 0$. *Il existe un voisinage* V *de* $(x_1^0, ...x_{n-1}^0)$, *un voisinage* $]x_n^0 - \alpha, x_n^0 + \alpha[$ *de* y_n^0, *et une fonction de classe* C^1, *notée* $y(x) = y(x_1, ...x_{n-1})$ *telle que si* $(x, y) \in V \times]-\alpha, \alpha[$, *alors* $f(x, y) = c$ *si et seulement si* $y = y(x)$. *On a alors*

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}(x_1, ...x_{n-1}, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ...x_{n-1}, y)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x_1, ...x_{n-1}, y)}.$$

Remarque 2.67. Le moyen mnémotechnique est simple. On peut appliquer le théorème des fonctions implicites si on peut calculer la dérivée de la fonction implicite.

Démonstration. Pour se simplifier la vie, nous faisons $n = 2$, quitte à remplacer f par $f - c$ et à diviser par une constante judicieuse, nous supposerons que $(x^0, y^0) = (0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1$.

Nous considérons alors un petit voisinage $[-r, r]^2$ de $(0, 0)$ tel que sur ce voisinage $\frac{\partial f}{\partial z} > \frac{1}{2}$, de sorte que si x est fixé, la fonction $y \to f(x, y)$ est strictement croissante.

On a $f(0, -r) < -1/2r < 0 < 1/2r < f(0, r)$

La continuité de f aux deux points $f(0, r), f(0, -r)$, montre qu'il existe un α tel que si $|x| < \alpha$ alors $f(x, -r) < -1/4r < 0 < 1/4r < f(x, r)$.

2.14. En fait, V s'obtient en résolvant une équation de degré deux, donc si on y est forcé c'est faisable.

Mais si x est fixé, la restriction de f à $[-r, r]$ est strictement croissante, donc elle s'annule une fois et une seule sur cet intervalle en un point que nous noterons $\varphi(x)$.

On a ainsi construit une fonction $[-\alpha, \alpha] \times [-r, r]$ $(x, y) \to \varphi(x)$ telle que si $(x, y) \in [-\alpha, \alpha] \times [-r, r]$, alors $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$. La fonction φ est la fonction implicite recherchée.

Il s'agit de démontrer que notre fonction φ est bien de classe C^1. Nous allons déjà voir qu'elle est dérivable à l'origine.

On écrit $f(x, y) = \alpha x + y + o(|x| + |y|)$

Ainsi pour $|x| + |y|$ suffisamment petits, $|y| \leqslant 2\alpha|x| + \frac{|y|}{2} + |f(x, y)|$
En particulier pour $\varphi(x) = y$, $|\varphi(x)| \leqslant 4\alpha|x|$

et donc si $\varphi(x) = y, o(|x| + |\varphi(x)|) = o(x)$. On a alors
$0 = \alpha x + \varphi(x) + o(x)$, ce qui veut dire que φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = -\alpha$

Donc φ et dérivable en tout point ou le TFI s'applique, et en dérivant $f(x, \varphi(x)) = 0$, on obtient que $\varphi'(x) = -\frac{\partial f}{\partial x} / \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))$ qui est bien continue.

□

L'exemple suivant illustre bien comment utiliser ce résultat, pour étudier la dépendance des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients.

THÉORÈME 2.68. *Soit* $(a_0, \ldots.a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ *et* x_0 *une racine du polynôme* $P_a(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + +a_0$. *On suppose que* $P'(x_0) \neq 0$, *il existe alors une fonction* C^1 *notée* x *définie d'un voisinage* V *de* $(a_0, \ldots.a_{n-1})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ *telle que* $x(b_0, \ldots b_{n-1})$ *soit une racine du polynôme* $P_b(X) = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_0$

Démonstration. On applique le TFI à la fonction $f = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(b_0, \ldots b_{n-1}, X) = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + +b_0$ au voisinage du point $(a_0, \ldots.a_{n-1}, x_0)$. La condition $\frac{\partial f}{\partial X} \neq 0$ étant précisément la condition $P'(x_0) \neq 0$. □

Exemple 2.69. Au voisinage de $a = 0$ il n'y a pas de fonction qui donne une racine du polynôme $x^2 - a$.

2.5.2. Interprétation géométrique.

Avant de démontrer ce résultat, nous allons faire quelque commentaires et donner une interprétation géométrique en dimension 2 et 3.

En dimension deux d'abord, on a à étudier une *courbe* $f(x, y) = c$. C'est ce que nous avons appelé une courbe de niveau de la fonction f. Ce que dit le théorème des fonctions implicites, c'est qu'au voisinage d'un point où $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, cette courbe de niveau est le graphe d'une fonction $y(x)$.

De même qu'au voisinage d'un point où $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$, la courbe est le graphe d'une fonction $x(y)$. Le théorème ne dit rien au voisinage d'un point ou les deux dérivées partielles s'annulent Dans ce cas on dit quez (x_0, y_0) est un piint singulier de C, ou un point critique de f.

Une fois cette courbe paramétrée, on peut calculer sa tangente au point considéré : c'est la droite passant par (x_0, y_0) dirigé par le vecteur vitesse d'un paramétrage $(x(t), y(t))$. Nous avons vu que ce vecteur vitesse est contenu dans le noyau de la forme linéaire $df(x_0)$.

PROPOSITION 2.70. *Soit* $C = \{f(x, y) = c\}$ *une courbe de niveau de la fonction* f. *On suppose que* (x_0, y_0) *n'est pas un point singulier de* C. *Alors la tangente en* (x_0, y_0) *à* C *est la droite d'équation* $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - x_0)$.

C'est la droite passant en (x_0, y_0) perpendiculaire au gradient $\nabla f(x_0, y_0)$.

En dimension 3, on a le même phénomène sauf que l'ensemble $S = \{f(x, y, z) = c\}$ est une « surface » appelée surface de niveau de f. Là encore, ce que dit le théorème des fonctions implicites, c'est qu'au voisinage d'un point où $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, alors cette surface de niveau est le graphe d'une fonction $z(x, y)$. De même qu'au voisinage d'un point où $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, S est le graphe d'une fonction $y(x, z)$. Le théorème ne dit rien au voisinage d'un point ou les trois dérivées partielles s'annulent. Là encore on parle d'un point critique de f, on dit aussi **point singulier** de S.

Appelons **vecteur tangent** à S en (x_0, y_0, z_0) le vecteur vitesse à l'instant t_0 d'une courbe $x(t)$, $y(t), z(t)$ tracée sur S et passant en (x_0, y_0, z_0). En dérivant l'équation $f(x(t), y(t), z(t)) = \text{cte}$, on voit que ce vecteur est dans le noyau de la forme linéaire $f'(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)(x_0, y_0, z_0)$. En fait le théorème des fonctions implicites va permettre de montrer l'inverse.

PROPOSITION 2.71. *L'ensemble des vecteurs tangents à S en (x_0, y_0, z_0) est le noyau de $f'(x_0, y_0, z_0)$, ou l'orthogonal de $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$.*

Démonstration. Soit $\vec{v} = (a, b, c)$ une tel vecteur. Comme $f'(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$ l'une des trois dérivées partielle est non nulle, disons $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$. Au voisinage de ce point, on écrit S comme graphe d'une fonction $z(x, y)$. Posons alors $x(t) = x_0 + at$, $y(t) = y_0 + bt$, $z(t) = z(x(t), y(t))$

on a $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} a + \frac{\partial z}{\partial y} b$

Comme $f(x, y, z(x, y)) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial z} = 0$, soit $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} / \frac{\partial f}{\partial z}$ et $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y} / \frac{\partial f}{\partial z}$

Donc (1) $a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \times \frac{\partial f}{\partial z} = 0$

Par ailleurs (2) $a\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + c\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$

En spécialisant(1) au point (x_0, y_0, z_0), on soustrait et on utilisae $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. On obtient bien que $\frac{dz}{dt}(0) = c$. □

2.5.3. Extrema sous contrainte (liés).

Une application très importante dans la pratique du théorème des fonctions implicites est le théorème des extréma liés, appelé aussi théorème des multiplicateurs de Lagrange.

On part d'une équation $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, que l'on suppose régulière c'est à dire qu'en tout point $df(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$. On dit que $\Sigma = \{f(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$ est une (hyper)surface lisse. Cette hypersurface Σ est vue comme une contrainte. On se donne une fonction F définie sur un voisinage de Σ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et on cherche les extrema de le restriction de F à Σ. On dit qu'on cherche des extréma de F sous la contrainte Σ, ou liés par Σ.

THÉORÈME 2.72. *Soit Σ une hypersurface définie par une équation $f(x_1, \ldots x_n) = c$, et F définie sur un voisinage de Σ. Si la restriction de F à Σ atteint un extremum en x_0, et si $df(x_0) \neq 0$ alors il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $dF(x_0) = \lambda df(x_0)$, ou si l'on veut $\nabla F(x_0) = \lambda \nabla f(x_0)$.*

Remarque 2.73. Le nombre λ s'appelle le multiplicateur de Lagrange. Il est appelé λ en l'honneur de Lagrange[2.15]

Démonstration. On sait que pour tout vecteur $\vec{v}$ perpendiculaire à $\nabla f(x_0)$, il existe une courbe tracée sur Σ tel que $x(0) = x_0$, $x'(0) = \vec{v}$. Evidemment $F(x(t))$ atteint un extremum en 0, de sorte que $\vec{v}$ est dans le noyau $dF(x_0)$, c'est à dire est perpendiculaire à $\nabla f(x_0)$. Donc l'orthogonal de l'orthogonal $\nabla f(x_0)$ contient $\nabla F(x_0)$. C'est à dire qu'il existe un λ tel que $\nabla F(x_0) = \lambda \nabla f(x_0)$ □

2.15. Mathématicien né à Turin en 1736, mort à Paris en 1813, il est enterré au Panthéon.

Exemple 2.74. Une application à l'industrie des boites.

Une boite en carton est un parallélépipède de cotés x, y, z. Son aire totale est $2(xy+yz+zx)$, son volume est xyz. Comment maximiser le volume connaissant l'aire de la boite ?

On pose $f(x,y,z) = 2(xy+yz+zx)$, $F(x,y,z) = xyz$.

On cherche λ tel que

$(y+z, x+z, x+y) = \lambda(yz, xz, yz)$ et $xy+yz+zx = \frac{S}{2}$
On a $\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{1}{x}+\frac{1}{z} = \frac{1}{y}+\frac{1}{x} = \lambda$, de sorte que $\frac{1}{y} = \frac{1}{x} = \frac{1}{z} = \frac{\lambda}{2}$, $x = y = z = \sqrt{\frac{S}{6}}$, $xyz = \left(\frac{S}{6}\right)^{3/2}$
La solution est donc un cube d'arête $\sqrt{S/6}$, et de volume $\left(\frac{S}{6}\right)^{3/2}$. Il est facile de se convaincre que c'est un maximum.

Remarque 2.75. On voit dans cet exemple que pour rechercher les extrema liés, il faut écrire $n+1$ équations : non seulement les n équations $\nabla F = \lambda \nabla f$, mais aussi l'équation $f(x) = c$. C'est normal, vu qu'il y a $n+1$ inconnues : les coordonnées du point recherché et le multiplicateur de Lagrange.

Exemple 2.76. Un cas particulier important est la recherche des extrema de la fonction implicite elle-même.

On se place dans l'hypothèse où $f(x,y,z) = 0$ définit une fonction implicite z de x, y. A quels points cette fonction atteint un extremum? Si on applique le résultat général, on voit qu'il est nécéssaire que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ soit proportionnel à $(0,0,1)$, autrement dit que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

On peut retrouver ce résultat en dérivant $f(x, y, z(x,y))$, compte tenu du fait que $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

2.5.4. Exercices.

Exercice 2.29. On considère l'équation implicite $f(x,y) = c$, ou l'on considère y comme fonction implicite de x. Dans chacun des cas, on déterminera ou le théorème des fonctions implicites s'applique, et on calculera $\frac{dy}{dx}$, puis $\frac{d^2y}{dx^2}$

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
2. $y = x + \ln(y)$
3. $\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = a\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

Exercice 2.30. On considère l'équation implicite $f(x,y,z) = c$, ou on considère z comme fonction implicite de x et y. Dans chacun des cas, on déterminera où le théorème des fonctions implicites s'applique, et on calculera $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

1. $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$
2. $x\cos(y) + y\cos(z) + z\cos(x) - 1 = 0$
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (on calculera aussi les dérivées secondes $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

Exercice 2.31. Soit $f(x,y,z)$ une fonction de classe C^1, et (x_0, y_0, z_0) un point où les trois dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ sont non nulles. Au voisinage de ce point l'équation $f(x,y,z) = f(x_0, y_0, z_0)$ définit donc trois fonctions implicites $z(x,y), y(x,z), x(y,z)$. Démontrer que :
$\frac{\partial x}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial x} = -1$

Exercice 2.32. Quels sont les extréma de la fonction implicite $z(x,y)$ définie par la formule.

1. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$
2. $x^3 — y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0$

Exercice 2.33. Quels sont les extréma de la fonction $F(x,y)$ ou $F(x,y,z)$ liés par la contrainte donnée.

1. $F(x,y) = xy$ liés par $x + y = 1$

2. $F(x,y)=x+2y$ liés par $x^2+y^2=5$
3. $F(x,y)=x^2+y^2$ liés par $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$
4. $F(x,y)=\cos^2 x+\cos^2(y)$ liés par $y-x=\pi/4$
5. $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ liés par $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Exercice 2.34. Soit $S>0$ fixé. Quel est le maximum de la fonction xyz avec la contrainte $x+y+z=S$. En déduire $\frac{x+y+z}{3}\geqslant^3\sqrt{xyz}$

Exercice 2.35. On considère une baignoire rectangulaire de hauteur x, largeur y et longueur z de capacité donnée $V=xyz$. Comment choisir x,y,z pour que sa surface est $S=2x(y+z)+yz$ soit minimale ?

Exercice 2.36. Parmi tous les triangles de périmètre donné p quel est celui de plus grande aire ?

Exercice 2.37. Soit $a>0$ écrire a comme produit de 4 nombres $xyzt$ dont la somme est minimale.

Problème 2.4. Soit $p>1$. On se propose d'étudier la norme $\|.\|_p$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par $\|(x_1,...x_n)\|_p=(\Sigma_{i=1}^n|x_i|^p)^{1/p}$. pour se simplifier la vie, on fait $n=2$. et $\|x\|_p=(|x_1|^p+|x_2|^p)^{1/p}$. On défini l'exposant dual q de p par par $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

1. Démontrer que la fonction $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(t)=|t|^p$ est de classe C^1 et calculer sa dérivée.
2. Soit $\Sigma\subset\mathbb{R}^2$ définie par $\Sigma=\{(x_1,x_2)/|x_1|^p+|x_2|^p=1\}$. Démonter que Σ est compact.
3. Soit l la forme linéaire $l(x_1,x_2)=x_1 y_1+x_2y_2$. Quelle est la valeur maximale de l sur Σ
4. En déduire l'inégalité de Hölder. $\forall x_1,x_2,y_1,y_2,x_1y_1+x_2y_2\leqslant\|x\|_p\|y\|_q$: on pourra se ramener au cas ou $\|x\|_p=1$ par homogénéité.
5. On admet que $\|x\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Démontrer que si $y=(y_1,y_2)$ est une forme linéaire $\|y\|=\mathrm{Max}_{\|x\|_p=1}y(x)=\|y\|_q$
6. Généraliser à $\mathbb{R}^n$.

2.6. CHANGEMENT DE VARIABLE.

2.6.1. Difféomorphisme, jacobien, jacobienne.

Le changement de variable est une opération très utile en algèbre linéaire, mais elle l'est aussi en géométrie différentielle (ou en mécanique).

En mécanique, on essaye de décrire la nature grâce à un « référentiel ». C'est un système de coordonnées qui est choisi par un observateur : traditionnellement on les appelle (x,y,z) auquel on ajoute le temps, noté t. On peut déjà remarquer que les trois variables d'espaces dépendent du choix d'un repère orthonormé, alors que les phénomènes décrit, eux n'en dépendent pas. On dit alors qu'on a un repère orthonormé « universel », qu'on appelle le référentiel de Copernic (qui ne la pas inventé), dont le centre est le centre de masse du système solaire et dont les trois axes sont définis pas trois jolies étoiles. Son repère de temps est réputé fixé un fois pour toute (par exemple il y a une jolie montre qui mesure le temps partout pour tout le monde et qui donne toujours le même résultat.). Si on appelle $\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$ les coordonnées dans ce système universel, et $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ les coordonnées du même point dans un référentiel lié à un observateur équipé d'un repère orthonormé (de trois direction privilégiées), on a la formule $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A(t)\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}+M(t)$, où $A(t)$ est la matrice de rotation de passage du repère de l'observateur au repère universel, et $M(t)$ la position de l'observateur.

Le référentiel est dit **galiléen** quand A est constante et $M(t)=t\vec{V_0}+M_0$, et c'est un cas extrêmement particulier.

Quand on fait de la mécanique relativiste, on apprend qu'il n'y a pas de repère de temps privilégié. Un observateur va mesurer l'espace temps avec des variables x, y, z, t un autre par x', y', z', t'. Les formules qui expriment les variables (x) en fonction des variable (x') sont compliquées. On remarque que les référentiels galiléens sont obtenus par des transformation $(u, v, w, t) \rightarrow (x, y, z, t)$ qui sont **linéaires** $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & v_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ t \end{pmatrix}$, où $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ est une matrice de rotation (fixe).

Jusqu'à la fin du 19-ième siècle, il était admis que les équations de la physique restent vraie dans tout référentiel galiléen : c'est l'idée de Galilée. Dans son texte grand public sur la relativité, Albert Einstein rappelle un argument fort : la vitesse à laquelle la terre tourne autour du soleil est d'environ 30km/s, néanmoins on n'arrive pas à distinguer par l'expérience ce qui se passe à 6 mois d'intervalle quand cette vitesse suit deux directions opposées. Mais, cette invariance se trouve mise en défaut dans le cas des équations de Maxwell, qui impliquent que le champ électro-magnétique est un onde, c'est-à-dire dire satisfait l'équation des ondes.

L'idée de Lorentz, reprise par Poincaré, a été de chercher dans quels repères l'équation des ondes garde sa forme traditionnelle, autrement dit quelles transformations **linéaires** $\Lambda: (x, y, z, t) \rightarrow (x', y', z', t')$ sont telles que si E est une solution de l'équation des ondes $c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E - \frac{\partial^2}{\partial t^2} E = 0$, alors $E' = E \circ \Lambda^{-1}$ est encore une solution de l'équations des ondes c'est a dire satisfait $c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) E' - \frac{\partial^2}{\partial t'^2} E' = 0$. Il se trouve que ces transformations sont celles qui conserve la forme quadratique $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \left(\frac{\tau}{c}\right)^2$, appelée métrique de Lorentz. (voir le problème 2.3 du chapitre 2.4).

On remarque déjà que les changements de variables linéaires offrent des possibilités intéressantes, mais la situation générale, n'est plus linéaire.

Quand on écrit les équations de la mécanique dans un repère lié à l'observateur (dans un autre référentiel que celui de Copernic,) on a des formules assez compliquées, surtout si la vitesse instantanée de rotation (la matrice $\Omega(t) = A(t)^{-1} \frac{dA(t)}{dt}$) varie au cours du temps (si Ω est constante, $A(t) = \exp - \Omega t$ et on voit apparaitre la force de Coriolis $2\Omega V(t)$). Par exemple, quand on écrit les équations de la gravitation sur la terre, notre repère préféré tourne par rapport au repère de Copernic. C'est ainsi que le pendule de Foucault permet de montrer qu'un référentiel lié à la terre doit tourner autour d'un axe passant par un point qui reste fixe pour l'observateur (étoile polaire).

Aussi, si le point $M(t)$ (qui définit la position de l'observateur) suit un mouvement **non uniforme**, mais accéléré on voit apparaitre une force nouvelle (quiconque a pris l'avion a senti cette force au moment du décollage, par exemple ; aussi, en voiture, quand on donne un coup de frein brutal, il vaut mieux avoir mis sa ceinture de sécurité). Les formules qui donnent les anciennes coordonnées en fonctions des nouvelles n'ont aucune raison d'être linéaire, mais il faut quand même pouvoir calculer avec. C'est en réfléchissant à cette question qu' Einstein a écrit les équations de la relativité générale. Quelle est l'équation de la chute des corps dans le vide quand l'observateur est lui même en train de tomber, ou subit lui même une accélération ? Il en est arrivé au principe d'équivalence qui permet de dire que précisément dans ce référentiel, il n'y a pas de gravitation, ou que dans un champ de gravitation les objets sont accélérés. Notons que dans un tel système l'équation des ondes est de la forme, $\Delta u = 0$, où $\Delta = \Sigma a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \Sigma b_i \frac{\partial}{\partial x_j}$, où les a_{ij} et les b_j sont des fonctions et plus des constantes.

Mathématiquement, la situation est la suivante : on a deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ disons Ω et Ω', et une fonction $\varphi: \Omega \to \Omega'$ qui est une bijection différentiable et dont l'inverse ψ est différentiable. Nous dirons que φ est un **difféomorphisme,** ou si on veut un changement de variables.

PROPOSITION 2.77. *Soit $U, V \subset \mathbb{R}^n$ deux ouverts $\varphi: U \to V$ une bijection de classe C^1, alors si φ^{-1}: $V \to U$ est différentiable, alors en tout point de V l'application linéaire est inversible et $(\varphi^{-1})'(y)$ $(\varphi^{-1})'(y) = (\varphi'(\varphi^{-1}(y)))^{-1}$, ou si l'on veut $(\varphi^{-1})'(\varphi(x)) = (\varphi'(x))^{-1}$*

Démonstration. On dérive $\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{Id}$, ou bien $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{Id}$. □

Dans la pratique, φ est donnée par des formules $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$, alors la dérivée de φ est juste la matrice des dérivées partielles $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$. Pour savoir si cette dérivée est inversible ou pas, on introduit le jacobien de φ, appelé ainsi en l'honneur de C.G.J Jacobi[2.16]

DÉFINITION 2.78. *La jacobienne de φ est la matrice $\mathrm{Jac}(\varphi) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$. Le jacobien de φ, noté $\mathrm{jac}(\varphi)$ est le déterminant $|\mathrm{Jac}(\varphi)| = \left|\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right|$.*

COROLLAIRE 2.79. *Sous les hypothèse de la proposition 2.76, $\mathrm{Jac}(\varphi^{-1}) = \mathrm{Jac}(\varphi)^{-1} \circ \varphi$, et $\mathrm{jac}(\varphi) = \frac{1}{\mathrm{jac}(\varphi) \circ \varphi}$.*

2.6.2. Théorème d'inversion locale.

Ce théorème donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application de classe C^1 soit localement un **difféomorphisme**.

THÉORÈME 2.80. *Soit $\varphi: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1. Soit $x_0 \in U$. Si $\varphi'(x_0)$ est une application linéaire inversible, alors φ est un difféomorphisme local : il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que la restriction de φ à V soit un difféomorphisme de V et $\varphi(V)$.* □

Remarque 2.81. Pour savoir si une fonction est ou pas un difféomorphisme au voisinage d'un point, il suffit de calculer $\mathrm{Jac}(\varphi)$ et regarder si il est non nul.

2.6.3. Coordonnées polaires, sphériques et cylindriques.

Parmi les changements non linéaires de coordonnées les plus importants, on a les coordonnées polaires données par les formules :

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

Notez que comme toujours, on a **les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles.**

L'application $(r, \theta) \to (x, y)$ n'est pas un difféomorphisme pour deux raisons :
1. Au voisinage de $(0, 0)$ ce n'est pas un difféomorphisme local.
2. Cette application n'est pas injective.

Néanmoins sur tout ouvert du plan (x, y) ne contenant pas une demi droite contenant $(0, 0)$, on peut trouver un ouvert de la forme $]0, +\infty[\times]\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi[$ tel que la restriction à cet ouvert soit un difféomorphisme.

2.16. C.J.J Jacobi mathématicien allemand, 1804-91.

On peut facilement calculer la jabobienne de ce changement de variable : il s'agit de la matrice $\mathrm{Jac}(\varphi)$: $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$, et le jacobien vaut $\mathrm{jac}(\varphi) = r$

En dimension 3, on est aussi amené à utiliser des coordonnées cylindriques $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, $z = z$, autrement dit on met les coordonnées polaires pour les variables x, y et la coordonnée verticale ne change pas. Ces coordonnées sont très utiles quand on cherche des solutions invariantes par rotation autour de l'axe vertical.

Pour les problèmes invariants par les toutes rotations autour d'un point fixe, on utilise les coordonnées sphériques.

$x = r\cos\theta\sin\varphi, y = r\sin\theta s\,\mathrm{in}\ \varphi, z = r\cos\varphi$

Noter que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ est la distance à l'origine, que φ représente la latitude (qui vaut 0 au pole nord et π au pole sud) et θ la longitude (ou on décide que la méridien initial est le demi-plan $y = 0, x > 0$.

Ce sont les coordonnées dont la restriction à un plan $z = \mathrm{cte}$ sont les coordonnées polaires sur ce plan.

Ces coordonnées sont très utiles pour se déplacer sur la terre (et en mer) qui est considérée comme la sphère $r = 1$). Décrire le chemin le plus court entre deux point en utilisant ces coordonnées est assez compliqué, mais on y arrive.

En exercices, on verra le calcul de la jabobienne et du jacobien, et surtout des applications au calcul intégral un peu plus tard..

2.6.4. Exercices.

Exercice 2.38. Ecrire les formules « inverses » pour le passage en coordonnées polaires et sphériques. Quels problèmes apparaissent ?

Exercice 2.39. On reprend l'exercice sur les cordes vibrantes. On cherche les fonctions $u(x,t)$ telles que $c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

On fait le changement de variable linéaires $X = x - ct$, $Y = x + ct$. Démontrer que les propositions sont équivalentes : u satisfait l'équation des ondes, $U(X,Y)$ satisfait $\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} = 0$. En déduire qu'il existe deux fonctions f, g telles que $u(x,t) = f(x - ct) + g(x - \mathrm{ct})$

Exercice 2.40. On pose $u = x, v = x^2 + y^2$. Au voisinage de quels points $\varphi: (x,y) \to (u,v)$ est un difféomorphisme local ? Soit $f(x,y)$ une fonction qui satisfait l'EDP $y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

On se place au voisinage d'un point ou φ est inversible, quelle équation satisfait $F = f\circ\varphi^{-1}$

Exercice 2.41. On pose $u = x, v = \frac{y}{x}$. Au voisinage de quels points $\varphi: (x,y) \to (u,v)$ est un difféomorphisme local ? Soit $f(x,y)$ une fonction qui satisfait l'EDP $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} - f = 0$.

On se place au voisinage d'un point ou φ est inversible, quelle équation satisfait $F = f\circ\varphi^{-1}$

Exercice 2.42. Le laplacien est l'opérateur $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Calculer le laplacien en coordonnées polaires.

Exercice 2.43. En dimension 3, Le laplacien est l'opérateur $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$. On dit qu'une fonction f est radiale si $f = F(r^2)$, où $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Calculer le laplacien d'une fonction radiale.

Chapitre 3

Calcul intégral.

Le cadre le plus efficace pour faire du calcul intégral est celui de la théorie de la mesure, appréhendé en 3-ième et 4-ième année. Ici, on donne plutôt une boite à outil sans trop se soucier d'avoir des hypothèses optimales.

3.1. Intégrales dépendant d'un paramètre.

On va étudier ici les fonctions de la forme $F(x)=\int_a^b f(x,t)\,dt$, ou $x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$ et $f\colon\Omega\times[a,b]\to\mathbb{R}$ est une fonction.

3.1.1. Continuité.

Théorème 3.1. *Soit $f\colon\Omega\times[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $F(x)=\int_a^b f(x,t)\,dt$ est continue.*

Démonstration. On va utiliser la notion de continuité uniforme, vue au premier chapitre. Soit $x_0\in\Omega$, $r>0$ tel que la boule fermée $\bar{B}(x_0,r)\subset\Omega$. L'ensemble $\bar{B}(x_0,r)$ est compact, donc la fonction f y est uniformément continue.

Soit $\varepsilon>0$, je dois trouver un α tel que si $\|x-x_0\|<\alpha$, alors $|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon$.
Je sais qu'il existe un α tel que si $\|x-x_0\|<\alpha, |t-t'|<\alpha$, alors $|f(x,t)-f(x_0,t')|<\frac{\varepsilon}{b-a}$.
En particulier $|f(x,t)-f(x_0,t)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$.
En intégrant, il vient $|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon$ □

Remarque 3.2. La même démonstration marche très bien si f est à valeurs vectorielles.

3.1.2. Dérivabilité.

Théorème 3.3. *Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un ouvert, et soit $f\colon\Omega\times[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f admet une dérivée partielle par rapport à x_i et que $\frac{\partial f}{\partial x_i}\colon\Omega\times[a,b]\to\mathbb{R}$ est continue. Alors $F(x)=\int_a^b f(x,t)\,dt$ admet une dérivée partielle continue par rapport à x_i et de plus*

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\,dt\,.$$

En particulier, si ces hypothèses sont satisfaites pour tous les indices $1<i\leqslant n$, alors alors F est C^1, et $dF=\Sigma_{i=1}^n\Big(\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\,dt\Big)dx_i=\int_a^b\Big(\Sigma_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dx_i\Big)\,dt$

Démonstration. Pour simplifier, on fait la démonstration dans le cas ou $n=1$, le cas général étant exactement le même. Il s'agit d'étudier $\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$ et de voir si cette expression admet une limite quand $h\to0$. Soit $\varepsilon>0$ fixé. On étudie.

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt=\int_a^b\frac{f(x_0+h,t)-f(x_0,t)}{h}-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt$$

En vertu du théorème des valeurs intermédiaires, si t est fixé, il existe un $x_t\in[x_0,x_0+h]$ tel que $\frac{f(x_0+h,t)-f(x_0,t)}{h}=\frac{\partial f}{\partial x}(x_t,t)$.

Comme la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue, elle est uniformément continue sur $[x_0 - r, x_0 + r] \times [a, b]$, donc il existe un α tel que si $|x - x_0| < \alpha$ alors $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t)\right| < \frac{\varepsilon}{b - a}$.

Ainsi, si $|h| < \alpha$, alors $\left|\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t)\, dt\right| < \varepsilon$ □

3.1.3. Intégrales impropres.

Très souvent, dans la vraie vie, on a des intégrales impropres comme par exemple $G(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} g(t)\, dt$. Comment faire.

Rappelons que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\, dt$ est dite convergente si pour tout intervalle $[x, y] \subset]a, b[$ l'intégrale $\int_x^y f(t)\, dt$ est bien définie et si la limite $\lim_{(x,y) \to (a,b)} \int_x^y f(t)\, dt$ existe, elle qu'elle est dite absolument convergente si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\, dt$ est convergente.

Théorème 3.4. *Soit $f: \Omega \times]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe une fonction $g:]a, b[\to \mathbb{R}^+$ telle que :*

1. *$\forall x \in \Omega, \forall t \in]a, b[$ on a $|f(x, t)| \leqslant g(t)$*
2. *l'intégrale $\int_a^b g(t)\, dt$ est (absolument) convergente*

Alors pour tout x l'intégrale $\int_a^b f(x, t)\, dt$ est absolument convergente et la fonction F définie par $F(x) = \int_a^b f(x, t)\, dt$ est continue.

Démonstration. Nous allons démontrer cela comme conséquence du théorème sur les fonctions continues.

Soit F_n une suite de fonctions continues qui converge en tout point vers une fonction F. Si la convergence est uniforme, alors la limite est continue. Ici, uniforme veut dire que la suite $\mathrm{Sup}_{x \in \Omega} |F_n(x) - F(x)|$ tend vers 0.

Si on comprend bien ce résultat, on choisit des suites a_n, b_n de $]a, b[$ qui tendent vers a, b respectivement et on pose $F_n(x) = \int_{a_n}^{b_n} f(x, t)\, dt$. On a :

$|F_n(x) - F(x)| \leqslant \int_a^{a_n} g(t)\, dt + \int_{b_n}^b g(t)\, dt = u_n$

Ce majorant ne dépend pas de x et tend vers 0. □

On a de même le théorème de dérivation.

Théorème 3.5. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, et soit $f: \Omega \times]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f admet une dérivée partielle par rapport à x_i et que $\frac{\partial f}{\partial x_i}: \Omega \times]a, b[\to \mathbb{R}$ est continue.*

On suppose aussi que pour tout x l'intégrale impropre $\int_a^b f(x, t)\, dt$ est convergente, et qu'il existe une fonction $g:]a, b[\to \mathbb{R}^+$ telle que :

1. *$\forall x \in \Omega, \forall t \in]a, b[$ on a $|f(x, t)| \leqslant g(t)$*
2. *$\forall x \in \Omega, \forall t \in]a, b[$ on a $\left|\frac{\partial f(x, t)}{f(x, t)}\right| \leqslant g(t)$*
3. *l'intégrale $\int_a^b g(t)\, dt$ est (absolument) convergente*

Alors $F(x) = \int_a^b f(x, t)\, dt$ admet une dérivée partielle continue par rapport à x_i, l'intégrale impropre $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)\, dt$ est convergente et de plus $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)\, dt$.

En particulier, si les hypothèses sont vérifiées pour tous les indices $1 \leqslant i \leqslant n$, F est C^1.

Remarque 3.6. Dans la pratique, on dit « on dérive sous le signe $\int$ », et on obtient…mais il est important de se souvenir des hypothèses à chaque fois.

3.1.4. Exercices.

Exercice 3.1. Si $x \in]0, +\infty[$, on pose $F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(x^2 \cos^2(t) + \sin^2(t))\,\mathrm{dt}$
Démontrer que F est de classe C^1 et calculer $F'(x)$ pour $x \neq 1$
Calculer $F(1)$ et en déduire la valeur de F.

Exercice 3.2. Montrer que la fonction $f(x) = \int_0^1 \sin(2x(1 - t^2) + \pi t^2) dt$ s'annule une fois dans l'intervalle $[0, \pi]$.

Exercice 3.3. Dériver par rapport à $x > 0$ la formule $\int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x}$ pour obtenir une valeur de l'intégrale impropre $\int_0^1 t^{x-1} \ln(t) dt$
Dériver par rapport à p plusieurs fois $\int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt = \frac{1}{p}$

Exercice 3.4. On pose $F(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t} dt$. Calculer dF. En déduire F.
Même question avec $F(x, y, z) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t} \sin(zt) dt$

Exercice 3.5. Soit $g:]-a, a[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k telle que $g(0) = 0$. En écrivant $g(x) = x \int_0^1 g'(tx)\, dt$, démontrer que la fonction $\frac{g(x)}{x}$ est de classe C^{k-1}.

Exercice 3.6. La démonstration de Clairault du théorème sur les dérivées secondes est obtenue en dérivant une intégrale à paramètres.La voici en exercice.

Soit f une fonction de classe C^2 définie au voisinage de (x_0, y_0).
Démontrer que au voisinage de (x_0, y_0), on a $f(x, y) = f(x_0, y) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f}{\partial x}(u, y)\, du$
En dérivant par rapport à y, montrer qu'il existe une fonction F telle que $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = F(y) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u, y)\, du$
En déduire le résultat.

3.2. INTÉGRALE MULTIPLE.

La théorie des intégrales multiples est assez technique. La différence principale avec les intégrales simples est que l'on intègre sur des domaines qui ne sont pas toujours très faciles à décrire comme le sont les intervalles en dimension 1. On peut s'en sortir avec l'intégrale de Darboux, mais le bon cadre pour l'exposer est la théorie de la mesure de Lebesgue, qui sera vue en 3-ième année. Nous choisissons ici d'exposer les choses de façon très pragmatique. D'abord une définition de l'intégrale parfaitement adaptée au calcul approché et au méthodes numériques. Ensuite la méthode pratique de calcul des intégrales, en dimension 2 (interversion des deux signes d'intégration, changement de variables). Pour la dimension 3, nous nous contentons de faire des exercices, en estimant que la théorie n'aide pas plus à comprendre qu'en dimension 2.

3.2.1. Définition de l'intégrale double.

On a une fonction f, bornée, définie sur une partie bornée B et on veut définir sont intégrale $\iint_B f(x, y)\, dx dy$. La première chose à faire est de mettre B dans un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ et de prolonger f par 0 en dehors de B. Ensuite, pour chaque entier n on découpe R en n^2 petits rectangles $R_{ij} = \left[a + i\frac{b-a}{n}, a + (i+1)\frac{b-a}{n}\right] \times \left[c + j \times \frac{d-c}{n}, c + (j+1) \times \frac{d-c}{n}\right]$

On considère alors les sommes de Darboux supérieures et inférieures.
$S_n(f) = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \times \sum_{0 \leqslant i, j \leqslant n-1} M_{i,j}$

$s_n(f) = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \times \sum_{0 \leqslant i, j \leqslant n-1} m_{i,j},$

où $m_{ij} = \mathrm{Min}_{\,(x,y) \in R_{ij}} f(x, y)$ et $M_{ij} = \mathrm{Max}_{\,(x,y) \in R_{ij}} f(x, y)$.

On dit que f est intégrable si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 / n > n_0 \, |S_n(f) - s_n(f)| < \varepsilon$.

Dans ce cas, il est facile de voir que la suite des $S_n(f)$ (ou des s_n) est convergente, et sa limite est appelée l'intégrale double de f. On la note $\iint_B f(x,y) dx dy$.

Remarque 3.7. Cette définition amène plein de difficultés du genre, et si on avait choisi une autre boite ? Nous n'insisterons pas la dessus. Par contre elle est très bien adaptée au calcul approché : si on connait f avec une erreur α, on a pour chaque terme $|M_{i,j} - m_{ij}| \leqslant \alpha$ et donc $|S_n(f) - s_n(f)| \leqslant \alpha(b-a)(d-c)$

En particulier, si α est la précision de notre ordinateur préféré, on ne peut pas rêver mieux si on a fait en sorte de mettre notre domaine dans un carré d'aire égale à 1: les deux sommes (supérieure et inférieure) approchées étant exactement les mêmes.

Exemple 3.8. Si on veut calculer l'aire d'un domaine, il faut calculer l'intégrale $\iint_D 1 \, dx dy$. Si cette intégrale existe, on dit que le domaine est quarrable. Il est très facile de fabriquer des domaines qui ne le sont pas. Par exemple si $Q \subset [a,b] \times [c,d]$ désigne l'ensembles de points à coordonnées rationnelles, alors la somme de Darboux inférieure de la fonction 1 vaut 0, la somme de Darboux supérieure vaut $(b-a) \times (d-c)$.

On peut même facilement fabriquer un ouvert qui n'est pas quarrable (voir exercice), même en diemnsion 1. Evidemment ce n'est pas un intervalle.

3.2.2. Les trois propriétés de l'intégrale.

En fait on démontre facilement que l'intégrale sur un domaine quarrable satisfait les trois propriétés suivantes.

Proposition 3.9. *1. Si f, g, sont intégrables, et λ, μ sont des réels, alors $\lambda f + \mu g$ est intégrable et $\iint_D (\lambda f + \mu g) \, dx dy = \lambda \iint_D f dx dy + \mu \iint_D g dx dy$*

2. $f \geqslant 0$ est intégrable, alors $\iint_D f dx dy \geqslant 0$

3. $\iint_{[a,b] \times [c,d]} 1 \, dx dy = (b-a) \times (c-d)$

Plus difficile est de démontrer que l'intégrale est caractérisée par ces propriétés.

3.2.3. Le théorème de Fubini.

Ce théorème est celui qui ramène le calcul d'une intégrale double à celui de deux intégrales simple.

Théorème 3.10. *Soit D une partie compacte, $D \subset [a,b] \times [c,d]$ et $f: D \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, et $\tilde{f}$ la fonction qui prolonge f par 0 en dehors de D. Alors $\iint_D f(x,y) \, dx dy = \int_a^b \big(\int_c^d \tilde{f}(x,y) \, dy \big) \, dx = \int_c^d \big(\int_a^b \tilde{f}(x,y) \, dx \big) \, dy$.*

Nous ne démontrerons pas ce résultat, qui est facile si D est le rectangle $[a,b] \times [c,d]$ et f est continue, mais est assez technique dans le cas général. On dit souvent « on peut intervertir les deux signes sommes », mais ce qui est compliqué c'est bien de remplacer une intégrale double par deux simples, la première étant une intégrale paramétrique $\int_c^d \tilde{f}(x,y) \, dy$.

3.2.4. Et en pratique, on fait comment ?

Très souvent le domaine est délimité par des formules de la forme $a \leqslant x \leqslant b \quad ; \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$. C'est un domaine compris entre deux graphes de fonctions φ et ψ. Dans ce cas, la formule de Fubini est simple à écrire puisque la fonction $\tilde{f}$ est nulle pour $y > \varphi_2(x)$, ou bien $y < \varphi_1(x)$.

Proposition 3.11. *Sous ces hypothèses,* $\iint_D f(x,y)dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx.$

Remarque 3.12. Certains auteurs, dans les calculs préfèrent écrire $\int_{x=a}^b \left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$ pour rappeler que la premier signe intégral concerne la variable x le second y. Certains écrivent aussi $\int_a^b dx \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)$.

Il se peut aussi que le domaine soit délimité par des formules de la forme $\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)$; $c \leqslant y \leqslant d$. C'est un domaine compris entre deux graphes de fonctions φ et ψ. Dans ce cas, la formule de Fubini est simple à écrire puisque la fonction $\tilde{f}$ est nulle pour $x < \psi_1(y)$, ou bien $x > \psi_2(y)$.

Proposition 3.13. *Sous ces hypothèses,* $\iint_D f(x,y)dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy.$

Dans la pratique, on peut être amené à découper le domaine en plusieurs domaine disjoints qui peuvent s'étudier par l'une de ces deux méthodes.

Il est important de noter par ailleurs que certaines intégrales sont déjà données sous la forme $\int_{x=a}^b \left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$, et que pour les calculer, il est judicieux d'essayer de les écrire sous l'autre forme $\int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy$.

3.2.5. La formule du changement de variables.

La formule du changement de variables dans les intégrales doubles est très utile, mais assez compliquée à démontrer. Nous allons donc juste l'énoncer et faire des exemples et des exercices.

Théorème 3.14. *Soit $D, S \subset \mathbb{R}^2$ deux domaines et $\varphi: S \to D$ un C^1 difféomorphisme $\varphi(u,v) = (x, y)$. On a alors*

$\iint_D f(x,y) = \iint_S f(\varphi(u,v))\,|\mathrm{jac}(\varphi(u,v))|du\,dv$

Remarque 3.15. On n'a pas vraiment défini ce qu'est un difféomorphisme sur un domaine compact, mais plutôt sur un ouvert. Disons que c'est la restriction à ce compact d'un difféomorphisme défini sur un voisinage…ou quelque chose comme ça.

Remarque 3.16. Remarquez la présence d'une valeur absolue dans le jacobien. Le moyen mnémotechnique est d'écrire $\mathrm{jac}(\varphi(u,v)) = \frac{du\,dv}{dx\,dy}$, formule que l'on peut rendre rigoureuse en utilisant la notion d'algèbre extérieure.

Souvent on connait le jacobien de la transformation inverse $\varphi^{-1}(x,y) = (u,v)$, et dans ce cas, la formule s'écrit

Théorème 3.17. $\iint_D f(x,y)\frac{dx\,dy}{|\mathrm{jac}(\varphi^{-1}(x,y))|} = \iint_S f(\varphi(u,v))\,du\,dv$

Exemple 3.18. Le premier exemple est la cas ou φ est un changement de variable linéaire, ou si l'on veut une matrice A dans ce cas, on a

$\iint_D f(x,y) = \iint_S f(A(u,v))\,|\det(A)|du\,dv$,. En particulier dans le cas des aires , on a

$\mathrm{Aire}(A(D)) = |\det(A)|\,\mathrm{Aire}(D)$

Par exemple

Théorème 3.19. *L'aire de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ est $\pi \times ab$.*

Démonstration. En effet la transformation $\Phi(x,y)=\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)$ est un difféormophisme vers le cercle unité, d'aire π et de jacobien constant $\frac{1}{ab}$. On a donc $\pi=\frac{A(E)}{ab}$ □

Le deuxième exemple est le cas des coordonnées polaires.

THÉORÈME 3.20. *Si $S\subset\left]-\pi,\pi\right[\times\mathbb{R}^+$ (ou bien $\left]0,2\pi\right[\times\mathbb{R}^+$) est un domaine et si D est l'image de S par le passage en coordonnées polaires $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, on a*
$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr\,d\theta$

Remarque 3.21. Dans la pratique, on a un domaine D on essaye de déterminer S soit dans $\left]-\pi,\pi\right[\times\mathbb{R}^+$, soit dans $\left]0,2\pi\right[\times\mathbb{R}^+$

Une application célèbre est le calcul de l'intégrale de Gauss.

THÉORÈME 3.22. $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Démonstration. On appelle I cette intégrale. On se souvient que I est la limite $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-x^2}dx$. On va étudier

$F(A)=\int_0^A e^{-x^2}dx\times\int_0^A e^{-y^2}dy$.

Evidemment la limite $\lim_{A\to\infty}F(A)=I^2$

Comme $\int_0^A e^{-x^2}dx\times\int_0^A e^{-y^2}dy=\iint_{[0,A]\times[0,A]}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$, en coinçant le carré entre deux quarts de cercle $S(A)\colon x\geqslant 0, y\geqslant, \sqrt{x^2+y^2}\leqslant A$ et $S(A\sqrt{2})$ $x\geqslant 0, y\geqslant, \sqrt{x^2+y^2}\leqslant A\sqrt{2}$,, on a

$\iint_{S(A)}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy\leqslant F(A)\leqslant\iint_{S(A\sqrt{2})}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$

Mais en polaires, $S(A)$ est le domaine rectangulaire $0\leqslant r\leqslant A, 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$, donc

$\iint_{S(A)}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy=\iint_{0\leqslant r\leqslant A, 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2}e^{-r^2}r\,dr\,d\theta=\frac{\pi}{2}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{e^{-A^2}}{2}\right)=\pi/4+o(A)$

De même $\iint_{S(A\sqrt{2})}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy=\frac{\pi}{2}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{e^{-2A^2}}{2}\right)=\pi/4+o(A)$

Ainsi, la limite de $F(A)$ quand A tend vers l'infini existe et vaut $\pi/4$, et donc $I^2=\frac{\pi}{4}$.

□

3.2.6. Exercices

Exercice 3.7. Transformer en intégrale double et dessiner le domaine d'intégration des intégrales suivantes.

$\int_{-6}^2\left(\int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y}f(x,y)dx\right)dy$

$\int_1^3\left(\int_{x^2}^{x+9}f(x,y)dy\right)dx$

$\int_0^4\left(\int_y^{10-y}f(x,y)dy\right)dy$

Exercice 3.8. Dessiner D, puis donner les limites d'intégration dans les deux ordres possibles pour $\iint_D f(x,y)dx\,dy$, quand D est le domaine :

D est le triangle de sommets $(0,0),(1,0),(1,1)$.
D est le trapèze de sommets $(0,0),(2,0),(1,1),(0,1)$.

D est le secteur angulaire aigu du disque de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{2}$ limités par les deux segments d'origine $(0,0)$ et d'extrémité $(1,1)$ et $(1,-1)$.

D est la couronne circulaire centrée en $(0,0)$ comprise entre les cercle de rayon 1 et 2. On écrira l'intégrale comme somme de deux intégrales doubles.

D est la partie du disque $x^2+y^2 \leqslant 9$ telle que $y^2-x^2 \leqslant 1$.

Exercice 3.9. Changer l'ordre d'intégration dans les expressions suivantes.

$\int_0^4 (\int_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy)dx$

$\int_0^{2a} \left(\int_{x\sqrt{-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,y)dy\right)dx$

$\int_0^1 \left(\int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx\right)dy$

Exercice 3.10. Calculer

$\iint_D x\,dx\,dy$, où D est le triangle de sommets $(0,0),(1,0),(0,1)$

$\iint_S x\,dx\,dy$, où S est le domaine situé au dessus de la droite passant par $(0,2)$ et $(0,2)$ situé dans le disque centré en $(0,0)$ et de rayon 1

$\iint_S e^{x/y} dx\,dy$, où S est le domaine $x \geqslant 0, y \leqslant 1, y^2 \geqslant x$

$\iint_S xy^2\,dx\,dy$, où S est le domaine $0 \leqslant x \leqslant p, y^2 \leqslant 2px$

Exercice 3.11. Ecrire les intégrales suivantes grâce aux coordonnées polaires.

$\iint_D f(x,y)dx\,dy$, où D est le carré $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$

$\int_0^2 \left(\int_0^x f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dy\right)dx$

*$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ *où* D est le domaine délimité par la boucle de la lemnisacte de Bernouilli $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$, qu on dessinera. On fera $f(x,y) = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

Exercice 3.12. Effectuer le changer de variables $(x,y) \to (u,v)$ dans les intégrales suivantes. On précisera bien les domaines d'intégration.

$u = x+y, uv = y,\ \int_0^c \left(\int_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y)\,dy\right)dx$

$u = x+y, v = x-y,\ \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right)dx$

Exercice 3.13. Reconnaitre l'aire d'un domaine dans les formules suivantes et la calculer après avoir échangé l'ordre des intégrales;

$\int_{-1}^2 (\int_{x^2}^{x+2} dy)dx$

$\int_0^2 \left(\int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx\right)dy$

Exercice 3.14. Aire du domaine $y \geqslant 0, x+y \leqslant 3a, y^2 \leqslant 2ax$

Aire de l'ellipse $(y-x)^2+x^2=1$

Aire de l'ellipse $(x-2y+3)^2+(3x+4y-65)^2=100$

3.3. Intégrale triple.

3.3.1. Définition, propriétés et calcul.

Si $D \in \mathbb{R}^3$ est un domaine borné, et f une fonction bornée et définie sur D on peut définir son intégrale exactement de la même façon que l'on a défini l'intégrale double.

D'abord on met D dans une boite $B = [a,b][c,d][e,f]$

Ensuite, pour chaque entier n on découpe la boite en n^3 petites boites $B_{ijk} = \left[a+i\frac{b-a}{n}, a+(i+1)\frac{b-a}{n}\right] \times \left[c+j\times\frac{d-c}{n}, c+(j+1)\times\frac{d-c}{n}\right] \times \left[e+k\times\frac{f-e}{n}, e+(k+1)\times\frac{f-e}{n}\right]$

On considère alors les sommes de Darboux supérieures et inférieures.

$S_n(f) = \frac{(b-a)(d-c)(e-f)}{n^3} \times \sum_{0 \leqslant i,j,k \leqslant n-1} M_{i,j,k}$

$s_n(f) = \frac{(b-a)(d-c)(e-f)}{n^3} \times \sum_{0\leqslant i,j,k\leqslant n-1} m_{i,j}, k$,

où $m_{ijk} = \text{Min}_{(x,y,y)\in B_{ijk}} f(x,y)$ et $M_{\text{ijk}} = \text{Max}_{(x,y,z)\in R_{\text{ijk}}} f(x,y,z)$.

On dit que f est intégrable si $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 / n > n_0 \, |S_n(f) - s_n(f)| < \varepsilon$.

Dans ce cas, il est facile de voir que la suite des $S_n(f)$ (ou des s_n) est convergente, et sa limite est appelée l'intégrale de f. On la note $\iiint_D f(x,y) dx dy$.

PROPOSITION 3.23. *1. Si f, g sont intégrables, et λ, μ sont des réels, alors $\lambda f + \mu g$ est intégrable et $\iiint_D (\lambda f + \mu g)\, dx dy dz = \lambda \iiint_D f dx dy dz + \mu \iiint_D g dx dy dz$*

2. $f \geqslant 0$ est intégrable, alors $\iiint_D f dx dy dz \geqslant 0$

3. $\iiint_{[a,b]\times[c,d]\times[e,f]} 1 dx dy dz = (b-a)\times(c-d)(e-f)$

On a aussi le théorème de Fubini

THÉORÈME 3.24. *Soit D une partie compacte, $D \subset [a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ et $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, et $\tilde{f}$ la fonction qui prolonge f par 0 en dehors de D. Alors $\iiint_D f(x,y,z)\, dx dy dz = \int_a^b \Big(\iint_{[c,d][e,f]} \tilde{f}(x,y,z)\, dy dz \Big)\, dx = \int_c^d \big(\iint_{[a,b]\times[e,f]} \tilde{f}(x,y,z)\, dx dz \big)\, dy = \int_e^e \big(\iint_{[a,b]\times[d,e]} \tilde{f}(x,y,z)\, dx dy \big)\, dz$*

Evidemment on peut écrire ce théorème en le ramenant à trois intégrales simples, par exemple

THÉORÈME 3.25. $\iiint_D f(x,y,z)\, dx dy dz = \int_a^b \big(\int_c^d \big(\int_e^f \tilde{f}(x,y,z) dz \big)\, dy \big)\, dx$

Dans la pratique, le domaine D est souvent un domaine de la forme $\varphi(x,y) \leqslant z \leqslant \psi(x,y)$, ou f, g sont des graphes de fonctions continues sur un domaine $\Delta \subset \mathbb{R}^2$. Grâce à la formule de Fubini pour une fonction de deux variables, le calcul devient :

THÉORÈME 3.26. $\iiint_D f(x,y,z)\, dx dy dz = \iint_\Delta \Big(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z) dz \Big) dx dy$

Comme en dimension deux, on peut aussi utiliser la formule du changement de variables.

THÉORÈME 3.27. *Soit $D, \Delta \subset \mathbb{R}^3$ deux domaines et $\varphi\colon \Delta \to D$ un C^1 difféomorphisme $\varphi(u,v,w) = (x,y,z)$. On a alors*

$\iint_D f(x,y,z) dx dy dz = \iint_S f(\varphi(u,v,w))\, |\text{jac}(\varphi(u,v,w))| du dv dw$

THÉORÈME 3.28. $\iint_D f(x,y,z) \frac{dx dy dz}{|\text{jac}(\varphi^{-1}(x,y,z))|} = \iint_S f(\varphi(u,v,w))\, du dv dw$

Les exmples sont proches de ceux de la dimension 2.

Exemple 3.29. Le premier exemple est le cas ou φ est un changement de variable linéaire, ou si l'on veut une matrice A dans ce cas, on a

$\iint_D f(x,y,z) dx dy dz = \iint_S f(A(u,v,w))\, |\det(A)| du dv dw$.

En particulier dans le cas des volumes on a $\text{Volume}(A(D)) = |\det(A)|\, \text{Volume}(D)$

Si on admet, ce que nous allons voir de suite, que le volume d'une sphère de rayon r est $\frac{4}{3}\pi r^3$, on déduit.

Corollaire 3.30. *Le volume de l'ellipsoïde* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ *est* $\frac{4}{3}\pi(abc)$.

3.3.2. Coordonnées cylindriques.

Les deux changement de variables les plus importants, en dimension 3, sont les passages en coordonnées polaires ou cylindriques.

Le changement de variable cylindrique est

$\mathbb{R}^+ \times]\alpha, \alpha+2\pi[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
$(r, \theta, z) \to (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$

Le jacobien de φ est r et on a donc la formule

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_\Delta f(\varphi(r,\theta,z))\, r dr d\theta dz}$$

Cette formule est particulièrement adaptée au calcul des intégrales de fonction invariantes par rotation autour de l'axe vertical $f(x,y,z)=g(r,z)$, quand le domaine est invariant par rotation autour de l'axe vertical. Ce domaine est obtenu en faisons tourner un domaine B contenu dans le demi plan $y=0, x>0$ autour de l'axe vertical

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = 2\pi\iint_C f(r,z) r dr dz$$

Par exemple, si C est un domaine de ce demi plan, et qu'on veut calculer le volume de la surface de révolution qu'il engendre, on obtient

$$\boxed{V = 2\pi\iint_C r dr dz}$$

Le volume d'une sphère est le cas ou C est le disque de rayon R dont le centre est situé à l'origine.

$$V = 2\pi\iint_{z^2+r^2\leqslant R^2} r dr dz = 2\pi\int_{z=-R}^{R}\left(\int_{r=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} r dr\right)dz = 2\pi\int_{z=-R}^{R}\frac{R^2-z^2}{2}dz = \pi\left[R^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

3.3.3. Coordonnées sphériques.

Il s'agit du changement de variable $x = r\cos\theta\sin\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\varphi$, ou $\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ désigne la latitude $\theta \in]-\pi, \pi[$ la longitude et $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ est la distance à l'origine.

Le jacobien est $\mathrm{jac}(\Phi) = \cos(\varphi)\, r^2$, de sorte que

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_\Delta f(\Phi(r,\theta,\varphi))\, r^2\cos\varphi dr d\theta d\varphi}$$

Cette formule est particulièrement adaptée à calculer les intégrales de fonctions radiales $f(x, y, z) = F(r)$ quand on les intègre sur la sphère de rayon R centrée à l'origine. Sous ces hypothèses, Δ est le domaine $\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\theta \in]-\pi, \pi[, r \in [0, R]$

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_\Delta f(\Phi(r,\theta,\varphi))\, r^2\cos\varphi dr d\theta d\varphi =$$
$$\int_0^R F(r)\, r^2 dr \times \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(\varphi)d\varphi \times \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 4\pi\int_0^R F(r)\, r^2 dr$$

Théorème 3.31. $\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2} F\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dxdydz = 4\pi\int_0^R F(r)\, r^2 dr$

En faisant $F \equiv 1$, on retrouve le volume d'une sphère qui est toujours $4/3\pi R^3$, ça n'a pas changé pendant le cours.

3.3.4. Exercices.

Exercice 3.15. Calculer $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$, ou f et V sont donnés. On pourra essayer de découper en tranche $z =$ cte puis intégrer par rapport à z/

1. V est le domaine délimité par $x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x + y + z \leqslant 1$, $f(x, y, z) = \frac{1}{(x + y + z + 1)^3}$
2. V est l'intersection de la boule $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3a^2$ et du paraboloïde $2az \geqslant x^2 + y^2$, $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$
3. V est l'intersection de $z \geqslant 0$ et l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$, $f(x, y, z) = z$

Exercice 3.16. Rappeler le changement de variable cylindrique. Quel est le jacobien de ce changement de variable ?

1. Calculer le volume d'un chapeau de clown d'angle au sommet α et de hauteur h.
2. Soit S un solide de révolution obtenu en faisant tourner autour de l'axe vertical la courbe $z_0 \leqslant z \leqslant z_1$, $y = 0, 0 \leqslant x \leqslant \rho(z)$. Alors $V(S) = \pi \int_{z_0}^{z_1} \rho^2(z)\, dz$

En utilisant la formule $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_U f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r dr d\theta dz$, calculer les intégrales

1. $\int_{x=0}^{2} \left(\int_{y=0}^{\sqrt{2x - x^2}} \left(\int_{z=0}^{a} z\sqrt{x^2 + y^2}\, dz \right) dy \right) dx$
2. $\int_{x=0}^{2r} \left(\int_{y=-\sqrt{2rx - x^2}}^{\sqrt{2rx - x^2}} \left(\int_{z=0}^{\sqrt{4r^2 - x^2 - y^2}} dz \right) dy \right) dx$

On pourra essayer de dessiner les domaines d'intégration

Exercice 3.17. Rappeler le changement de variable sphérique. Quel est le jacobien de ce changement de variable ? En utilisant les coordonnées sphériques, calculer :

$\int_{x=-R}^{R} \left(\int_{y=-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \left(\int_{z=0}^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} (x^2 + y^2) dz \right) dy \right) dx$

$\iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx dy dz$. Remarquer que $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant x$ est une boule.

Exercice 3.18. Calculer le volume des objets suivants.

1. $-h \leqslant z \leqslant h, 4a^2 - 3ax \leqslant y^2 \leqslant ax$
2. Portion du cylindre $x^2 + y^2 - 2ax \leqslant 0$ comprise dans l'espace $z \geqslant 0$, $x^2 + y^2 - 2az \leqslant 0$
3. Intersection de la boule $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$ et du cône $x^2 + y^2 \leqslant z^2$

3.4. Intégrale curviligne.

Jusque là on a intégré des fonctions sur des domaines. L'intégrale curviligne est un outil mathématique important, mais plus abstrait : nous allons intégrer des *formes différentielles* sur des courbes. La difficulté principale ici étant de savoir ce qu'on appelle « courbe ».

Une courbe paramétrée de classe C^1 est juste une application $c\colon [t_0, t_1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ réputée de classe C^1. Deux paramétrages $c_1\colon [t_o, t_1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$; $c_2\colon [u_0, u_1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ étant équivalents si il existe une bijection de classe C^1 $\theta\colon [t_o, t_1] \rightarrow [u_0, u_1]$ telle que $c_2 \circ \theta = c_1$. Une courbe est dite orientée si on limite la bijection aux applications strictement croissantes.

On veut définir une intégrale ne dépendant pas du paramétrage choisi.

On rappelle la définition vue plus tôt dans le cours.

Définition 3.32. *Une forme différentielle de degré 1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une application (continue) de Ω vers le dual $(\mathbb{R}^n)^*$ de $\mathbb{R}^n$.*

Evidemment si f,g sont deux fonctions continue et ω,η deux formes différentielles, $f\omega+g\eta$ est encore une forme différentielle.

Si f est une fonction $df=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$ est une forme différentielle.

Proposition 3.33. *Toute forme différentielle s'écrit d'une unique façon $\omega=\Sigma_{i=1}^{n}a_i\,dx_i$, ou les a_i sont des fonctions (continues).*

Démonstration. Démonstration : a_i est juste la fonction qui au point x vaut $\omega(x)e_i$, où e_i est le $i-i$ème vecteur de base. □

En dimension 2 nous écrirons $\omega=adx+bdy$, en dimension 3 $\omega=adx+bdy+cdz$.

Remarque 3.34. En général, une forme différentielle n'est pas la différentielle d'une fonction. Si $\omega=adx+bdy$, pour qu'il existe une fonction telle que $\omega=df$ il est nécessaire que $\frac{\partial a}{\partial y}=\frac{\partial b}{\partial x}$, à cause du théorème sur les dérivées secondes.

Remarque 3.35. En physique, les formes différentielles pas exactes sont souvent notée δA, par exemple δQ, δW représentent les différentielles des quantités de chaleur ou de travail. L'énergie totale du système U est une fonction telle que $dU=\delta Q+\delta W$. *Il n'existe pas de fonction Q ou W.* Cette *forme différentielle* δW représente la quantité d'énergie nécessaire à passer d'un état X a un état proche $X+dX$. Dans l'étude des gaz on dit d'habitude qu'un état est décrit par un certain nombre de variables (par exemple P,V,T) et si ΔW est la quantité d'énergie nécessaire à passer de l'état (P,V,T) à l'état $(P+\Delta P,V+\Delta V,T+\Delta T)$, alors on explique que $\Delta W=a(P,V,T)\Delta P+b(P,V,T)\Delta V+c(P,V,T)\Delta T+$termes négligeable. On note $\delta W=adP+bdV+cdT$. Le deuxième principe dit qu'il une fonction S telle que $dS=\frac{\delta W}{T}$.

3.4.1. Intégrale d'une forme sur un chemin.

Autant il est assez difficile de définir une forme différentielle ω et un chemin orienté C, autant il est facile de définir l'intégrale curviligne $\oint_C\omega$.

SI $\omega=\Sigma_{i=1}^{n}a_i\,dx_i$ et si le chemin C est paramétré par $c\colon[t_0,t_1]\to\mathbb{R}^n$, $c(t)=(x_1(t),\ldots x_n(t))$, on pose $\oint_C\omega=\int_{t_0}^{t_1}\left(\Sigma_{i=1}^{n}a_i(c(t))\frac{dx_i}{dt}\right)dt$

Proposition 3.36. *La définition ne dépend pas du paramétrage choisi.*

Démonstration. soit $\theta=[t_0t_1]\to[u_0,u_1]$ un changement de paramétrage.

Dans la seconde formule, $\int_{u_0}^{u_1}\left(\Sigma_{i=1}^{n}a_i(c_2(u))\frac{dx_i}{du}\right)du$, on fait le changement de variables $u=\theta(t)$ de sorte que $du=\theta'(t)\,\mathrm{dt}$, alors que $\frac{dx_i}{dt}=\frac{dx_i}{du}\theta'(t)$. On a bien $\frac{dx_i}{du}.du=\frac{dx_i}{du}.\theta'(t)dt=\frac{dx_i}{d\mathrm{ut}}dt$
$\int_{u_0}^{u_1}\left(\Sigma_{i=1}^{n}a_i(c_2(u))\frac{dx_i}{du}\right)du=\int_{t_0}^{t_1}\left(\Sigma_{i=1}^{n}a_i(c_2(u))\frac{dx_i}{dt}\right)dt$

□

Exemple. On veut calculer l'intégrale $\oint_C y^2\,dx+x^2dy$, où C désigne la demi ellipse supérieure $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $y>0$ parcourue dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

La première chose à faire est de paramétrer C de façon intelligente. Ici, on pose $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ avec $t\in[0,\pi]$. Donc notre intégrale vaut $\int_0^{\pi}b^2\sin^2(t)\times a(-\sin t)\,dt+a^2\cos^2(t)b\cos(t)dt=-4/3ab^2$

Une proposition importante.

PROPOSITION 3.37. *Si ω est la différentielle d'une fonction f et C est un chemin joignant deux points a, b, alors $\oint_c \omega = f(b) - f(a)$ ne dépend pas du chemin choisi. On dit que ω est une différentielle exacte.*

Démonstration. On a $(f(c(t)))' = f'(c(t)).c'(t) = \omega(c(t))c'(t)$, d'où le résultat puisque $\int_{t_0}^{t_1} (f(c(t)))' \mathrm{dt} = f(b) - f(a)$ □

Le travail d'une force le long d'un chemin est aussi une intégrale curviligne.

Si $\vec{F}$ est un champ de forces de coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ qui est une fonction du point, on peut considérer la forme différentielle $\delta W = \vec{F}^t$ (travail) qui est $\alpha dx + \beta dy + \gamma dz$. Alors le travail de la force $\vec{F}$ le long d'un chemin C est juste $\oint_c \omega$. Si le chemin C est paramétré par c: $[t_0, t_1] \to \mathbb{R}^3$, $c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, on a alors que le travail de la force est

$$\oint_c \omega = \int_{t_0}^{t_1} \alpha(c(t)) \frac{dx}{dt} + \beta(c(t)) \frac{dy}{dt} + \gamma(c(t)) \frac{dz}{dt} = \int_{t_0}^{t} < \vec{F}, c'(t) > dt$$

En particulier si $\vec{F}$ est un gradient $\vec{F} = -\nabla U$, alors $\delta W = -dU$ et on peut reformuler la proposition 3.5

PROPOSITION 3.38. *Si une force dérive d'un gradient, son travail le long d'un chemin joignant deux points a, b ne dépend pas du chemin choisi entre ces deux points. On dit que la force est conservative.*

Pour contre si $\vec{F}$ n'est pas un gradient le travail dépend du chemin choisi. Par exemple, si $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ qui est le vecteur $i.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, quelle que soit la courbe choisie, le travail de la force en question est $\int yx' - xy'$. Si la courbe est le carré $0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b$ on trouve $2ab$. plus généralement si c'est une courbe fermée, on trouve l'aire entourée.

Avertissement 3.39. En mécanique, une force dépend souvent non seulement du point ou elle s'applique mais de la vitesse que le point a à ce moment la : c'est le cas pour les forces de frottements par exemple : plus on va vite plus la force de frottement est grande. Il faut alors faire le calcul du travail dans l'espace des phases (position et vitesse) mais ça ne change rien sauf qu'il est de dimension 6 au lieu de 3 pour une particule ou 6N pour N particules. Si en plus la force étudiée dépend du temps, il faut rajouter un paramètre à l'espace étudiée qui devient de dimension 6N+1, par exemple 7 si on veut calculer le travail du vent lors d'un trajet en bateau à voile. Le but étant évidement de trouver le meilleur chemin à prendre pour le bateau à voile, en supposant connu à chaque instant la force et la direction du vent $V(t)$.

La quantité d'énergie dépensée pour faire un chemin $c(t)$ est le travail total de toutes les forces exercées sur notre système.

Si N désigne le nombre de particules, si les positions de celles ci sont notées q_i et leurs quantité de mouvement p_i, on a donc l'énergie dépensée grâce une formule $\oint \Sigma_i \ f_i(p, q) \frac{dq_i}{dt}$ qui n'est autre que l'intégrale de la forme différentielle $\lambda = \Sigma f_i(p, q)\, dq_i$. Bien évidemment personne ne connait exactement les forces qui s'exercent sur chacune des $N = 10^{20}$ particules, et comme la somme fait intervenir 6.10^{20} termes, ce qui est utile et important c'est qu'il existe une forme différentielle δQ qui si on l'intègre le long du chemin donne la quantité d'énergie dépensée. Très souvent cette forme différentielle peut se calculer très facilement en fonctions des variables d'état.

3.4.2. Formule de Green Riemann.

C'est la formule qui « généralise » $\int_a^b f'(t)\, dt = f(b) - f(a)$, mais pour les fonctions de deux variables. Le plus difficile est de savoir définir les domaines ou elle s'applique, qu'on appelle domaine de Jordan.

Elle porte le nom de Green[3.1], un physicien anglais totalement autodidacte, qui était meunier jusqu'à l'âge de 40 ans, et faisait de la physique pour se distraire. Green n'a pas écrit la formule de Green-Riemann, et c'est Cauchy qui l'a écrit en premier en 1846. Techniquement Green l'a écrit sous la forme du « théorème de la divergence ». Après, Riemann[3.2] en a établi une démonstration très générale. Notons au passage que Green utilisait les domaines de Jordan[3.3] bien avant que Jordan ne naisse.

Si $c\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ est une courbe fermée $(c(a) = c(b))$ simple, c'est à dire que $c(t) \neq c(s)$ si $t \neq s$ sauf précisément si $t = a, s = b$, et si c est de classe C^1, on dit que C est une courbe de Jordan. On démontre et nous admettrons que C découpe le plan en deux parties dont l'une est compacte, et de bord précisément égal à C : on l'appelle l'intérieur de C. On fait bien attention alors d'orienter C suivant le sens inverse des aiguilles d'une montre. Si on considère $c(t_0) + i h c'(t_0)$ on trouve un point de l'intérieur de C. L'intérieur de C s'appelle un domaine de Jordan. Si D est un tel domaine, son bord est une courbe orientée, fermée et simple, notée $\partial D = C$

Théorème 3.40. *Soit D un domaine de Jordan et $\omega = A dx + B dy$ une forme différentielle de classe C^1. Alors $\iint_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{C = \partial D} \omega$.*

Démonstration. On ne va pas le démontrer en général, mais juste sur un exemple : D est le domaine délimité par $a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant f(x)$ ou f est une fonction . On voit que ∂D est la réunion de 3 morceaux

$y = c, x \in [a, b]$, $x = b, c \leqslant y \leqslant f(c), x \in [b, a], y = f(x), x = a, y \in [f(a), c]$.

D'une part,

$\oint_{C = \partial D} \omega = \int_a^b A(x, c) dx + \int_c^{f(b)} B\,(c, y) dy + \int_b^a A(x, f(x)) dx + B(x, f(x)) f'(x) dx + \int_{f(a)}^c B\,(c, y) dy$

De l'autre

$\iint_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = \int_{x=a}^b \left(\int_{y=c}^{f(x)} \left(\frac{\partial B}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dy \right) dx$

Le terme $\int_{x=a}^b \left(\int_{y=c}^{f(x)} - \frac{\partial A}{\partial y} dy \right) dx$ est justement $\int_b^a A(x, f(x)) dx + \int_a^b A(x, c) dx$

Notons que $\frac{d}{dx} \int_{y=c}^{f(x)} B(x, y)) dy = \left(\int_{y=c}^{f(x)} \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) \right) dy + f'(x).B(x, f(y))$

Donc $\int_{x=a}^b \left(\int_{y=c}^{f(x)} \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) \right) dy \Big) dx = \int_{x=a}^b \frac{d}{dx} \left(\int_{y=c}^{f(x)} B(x, y) \right) dy - f'(x)\, B(x, f(x)) dx$
$= \int_c^{f(b)} B\,(c, y) dy + B(x, f(x)) f'(x) dx + \int_{f(a)}^c B\,(c, y) dy$

On obtient le résultat en mettant bout à bout ces deux égalités. □

L'aire délimitée par une courbe de Jordan est un cas particulier

3.1. George Green, Physicien anglais 1793-1841.

3.2. Bernhard Riemann, Mathématicien allemand 1826-1866, considéré comme l'un des plus grand génie des mathématiques, il a publié -outre sa thèse et son habilitation- moins de 10 articles, tous fondamentaux.On lui doit en particulier : le théorème de la représentation conforme et les surfaces de Riemann (sa thèse) l'intégrale de Riemann, la géométrie riemannienne (version mathématique de la relativité générale) en particulier l'invention du tenseur métrique g_{ij} et du tenseur de courbure R_{ij}^{kl} (son habilitation), la fonction ζ et l'hypothèse de Riemann dans le but d'étudier la répartition des nombres premiers.

3.3. Camille Jordan. Mathématicien français 1838-1922.

THÉORÈME 3.41. *Soit D un domaine de Jordan de bord C alors son aire est*
$A(D) = \oint_C x dy = -\oint_C y dx = \frac{1}{2}\oint_C x dy - y dx.$

Démonstration. On applique la formule de Green Riemann à $\omega = x dy$. □

Si une courbe de Jordan est donnée en coordonnées polaires $\rho = f(\theta)$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$ son aire est très facile à calculer

THÉORÈME 3.42. $A(D) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\rho^2(\theta)\, d\theta.$

Démonstration. En effet si la courbe est calculée en polaire $x = \rho(\theta)\cos(\theta), y = \rho(\theta)\sin(\theta)$ et un calcul facile montre que $x dy - y dx = \rho^2 d\theta$ □

Un autre application importante de cette formule est d'approfondir la notion de forme exacte.

On dit qu'un domaine D est étoilé par rapport au point A si pour tout point $P \in D$, le segment $[A, P]$ est tout entier contenu dans D. on dit qu'il est étoilé si cette propriété est satisfait pour un point au moins.

THÉORÈME 3.43. *(Clairault 1739) Soit $\omega = A dx + B dy$ une forme différentielle C^1 définie sur un domaine étoilé D. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

i. La forme ω est exacte.

ii. $\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} = 0$

Démonstration.
L'implication $i \Rightarrow ii$ résulte du théorème d'inversion des dérivées. C'est à cette occasion que Clairault l'a énoncé.

Pour l'autre sens on choit un point A par rapport auquel le domaine est étoilé, en on définit $f(x, y) = \oint_{\left[A, \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right]} \omega.$

Pour calculer $f(x, y_0) - f(x_0, y_0)$, on considère le chemin $C = \left[\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)\right]$. Comme le chemin $\left[A, \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)\right] \cup C \cup \left[\left(\begin{smallmatrix} x \\ y_0 \end{smallmatrix}\right), A\right]$ est entièrement contenu dans le domaine pour (x, y) suffisamment proche de (x_0, y_0), on peut lui appliquer la formule de Green Riemann dont l'intégrante est 0.

Il en résulte que
$f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = \int_{t=x_0}^{x} A(t, y_0)\, dt$
Ainsi, f est dérivable par rapport à x et $\frac{\partial f}{\partial x} = A(x, y)$
De même par rapport à y, f est dérivable par rapport à y et $\frac{\partial f}{\partial y} = B(x, y)$
Comme ces fonctions sont continue$f$ est C^1, et $df = \omega$

□

3.4.3. Exercices.

Exercice 3.19. Calculer les intégrales curvilignes $\oint_C \omega$:

1. C est l'arc de parabole $y = x^2$ reliant A=(1,1) et $B = (2, 4)$. Calculer $\oint_C (x^2 - 2xy)\, dx + (2xy + y^2) dy$.
2. C est le premier arc de la cycloïde $x = a(t - \sin(t)), y = a(1 - \cos(t))$ pour $t \in [0, 2\pi]$, $\omega = (2a - y) dx + x dy$
3. C est l'un des trois chemin reliant $O = (0, 0)$ à $A = (2, 1)$: la droite [OA], la parabole $y = 2x^2$, la parabole $x = y^2/4$, et $\omega = 2xy dx - x^2 dy$

Même question avec $\omega = 2xy dx + x^2 dy$. Que remarque t on ?

Exercice 3.20. Sur $\mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$ on considère la forme $\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$.

En utilisant la changement de variable polaire, démontrer que si Δ est la demi droite $y = 0, x \leqslant 0$sur $\mathbb{R}^2 - \Delta$, ω est une différentielle exacte.

Intégrer ω sur une cercle centré à l'origine de rayon ρ. Pourquoi le résultat n'est pas 0?

démontrer que quel que soit le contour fermé, $\frac{1}{2\pi}\oint_C \omega \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3.21. Les formes différentielles suivantes sont exactes. Trouver leur primitives.

$$\omega = (2x+3y)dx + (3x-4y)dy$$

$$\omega = \frac{dx}{x+y} + \frac{dy}{x+y} \text{ (domaine } x+y>0)$$

Exercice 3.22. Appliquer la formule de Green Riemann pour calculer $\oint_C \omega$ quand :
1. C est le cercle de rayon a parcouru dans le sens trigonométrique, et $\omega = -x^2 y dx + x y^2 dy$
2. C est le triangle $A = (1,1), B = (2,2), C = (1,3)$parcouru dans le sens trigonométrique et $\omega = 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2 dy$

Exercice 3.23. On considère la parabole P définie par l'équation $y = \frac{x^2}{2p} + a$. Pour quelle valeur de p, a passe t elle par les points $A = (1,0)$ et $B = (2,3)$. Soit C le contour constitué du segment $[A,B]$ suivi de l'arc de parabole joignant ces deux points. Calculer $\oint_C \omega$ pour $\omega = (x+y)dx - (x-y)dy$ par deux méthodes. toit d'abord par un calcul direct, et ensuite en utilisant la formule de Green Riemann.

Exercice 3.24. Utiliser la formule de Green Riemann pour calculer des aires délimitées par les courbes suivantes, que l'on aura dessiné.
L'ellipse $x = a\cos(t), y = b\sin(t), \, , t \in [0, 2\pi]$
L'astroïde $x = a\cos^3(t), y = a\sin^3(t), t \in [0, 2\pi]$
La cardioïde. $x = a(2\cos(t) - \cos(2t)), y = a(2\sin(t) - \sin(2t)) t \in [0, 2\pi]$

Exercice 3.25. *Spirographe. Soit R et r deux rayons tels que $\frac{R}{r} \in \mathbb{N}$.
1. Epicycloïde. On fait rouler un cercle de rayon r sans glisser sur un cercle de rayon R par l'extérieur. Quelle est l'aire délimitée après un tour complet ?
2. Hypocycloïde. Même question si le petit cercle roule à l'intérieur du grand.

Exercice 3.26. Si un objet est soumis à une force $\vec{F}$ il acquiert une accélération $\frac{1}{m}\vec{F}$. Soit $m(t)$ la position du point considéré à l'instant t, et $\vec{v}(t) = \frac{dm(t)}{dt}$ sa vitesse Montrer que le travail de $\vec{F}$ le long du chemin $M[t_0, t_1]$ est la différence des énergies cinétique $1/2m\,(v(t_1)^2 - v(t_0)^2)$, où $v(t)^2 = <\vec{v}(t), \vec{v}(t)>$ désigne le carré de la longueur du vecteur vitesse.

Remarque. Si un système est constitué de N particules chacune soumise à une force $\vec{F_i}$, et si $m_i(t)$ désigne la position de la $i-$ème particule à l'instant i, il existe donc une forme différentielle δW telle que si on l'intègre le long de la trajectoire $(m_i(t))$ de l'espace des phase, on trouve la différence entre les énergies cinétique totale pendant la durée de l'expérience.

Exercice 3.27. Une force $\vec{F}$ est dirigée vers l'origine $(0,0)$, sa valeur au point (x,y) est proportionnelle à la distance à ce point (égale à $\alpha\sqrt{x^2+y^2}$). De quel potentiel dérive-t-elle ?

Plus généralement si une force est dirigée vers un point fixé et ne dépend que de la distance à ce point, elle dérive d'un potentiel.