

Equations différentielles.

Cours de L3.

THOMAS DELZANT

Email: delzant@unistra.fr

TABLE DES MATIÈRES

PROLOGUE	7
Bibliographie.	7
1. INTRODUCTION	9
1.1. Qu'est ce qu'une équation différentielle?	9
1.2. Le problème de Cauchy.	10
1. Exemple. Un modèle d'épidémie.	10
1.3. Quelques grands principes	11
1.3.1. Un théorème d'existence et d'unicité (Cauchy-Lipschitz).	11
1.3.2. Equation autonome en dimension 1.	12
1.3.3. Mise sous forme intégrale. Continuité par rapport à la donnée initiale.	13
1.3.4. Réduction de l'ordre d'une équation.	14
1.4. Exercice du chapitre 1.	14
2. EQUATIONS LINÉAIRES.	17
2.1. Généralités.	17
2.1.1. Le système linéaire d'équations $\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)$	17
2.1.2. L'équation différentielle scalaire d'ordre n en une variable.	17
2.2. La dimension 1.	18
2.2.1. L'équation $\frac{dx}{dt} = ax + b(t)$	18
2.2.2. L'équation $\frac{dx}{dt} = a(t)x$	19
2.2.3. L'équation $\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)$	19
2.3. L'équation homogène à coefficients constants.	19
2.3.1. Position du problème et équivalence	19
2.3.2. Matrices diagonales, changement de base.	19
2.3.3. Exponentielle d'une matrice. EDO linéaire à coefficients constants.	20
2.3.4. Réduction d'un endomorphisme sur \mathbb{C} , décomposition de Dunford et calcul de $\exp tA$. ..	22
2.3.5. Cas de la dimension 2 à coefficients réels : portraits de de phase.	23
Cas 1. Deux v.p. imaginaires conjuguées.	23
Cas 2. Deux valeurs propres réelles $\lambda_1 \geq \lambda_2$, et a est diagonalisable. on a encore 3 cas principaux.	23
Cas 3. Deux valeurs propres réelles confondues $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, et A n'est pas diagonalisable.	24
2.3.6. Equation linéaire d'ordre n à coefficients constants.	24
2.4. Equation linéaire avec second membre.	26
2.4.1. Système linéaire à coefficients constants et second membre variable.	26
2.4.2. Equation scalaire d'ordre n à coefficients constants et second membre	26
2.4.3. Exemple : l'équation $x'' + ax' + bx = c(t)$	27
2.4.4. Cas particulier où le second membre est un quasi-polynôme de la forme $q(t)e^{rt}$	27
2.4.5. Le cas particulier du degré 2.	28
2.4.6. Battements et résonance : l'oscillateur harmonique forcé.	28
2.5. Coefficients variables : matrice fondamentale, et wronskien.	32
2.5.1. Equation sans second membre : la matrice fondamentale.	32
2.5.2. Equation avec second membre : variation de la constante.	33
2.5.2.1. L'équation $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$	33
2.5.3. Wronskien et théorème de Liouville.	33
2.6. Méthodes de résolution des équations linéaires.	34
2.6.1. Equation scalaire d'ordre n dont on connaît une solution : réduction de l'ordre	34
2.6.2. * Séries entières : méthode de la série majorante.	34
2.7. Exercices du chapitre 2.	35
2.7.1. Généralités 1.	35
2.7.2. Dimension 1.	36
2.7.3. Equation homogène à coefficients constants.	37
2.7.4. Equation à coefficients constants avec second membre.	38

2.7.5. Coefficients variables.	39
2.7.6. Méthodes de résolution	40
3. CHAMPS DE VECTEURS AUTONOMES, ÉQUATION $y' = f(x, y)$.	43
3.1. Flot d'un champ de vecteur, orbites	43
3.2. Portrait de phase.	44
3.2.1. Portrait de phase.	44
3.2.2. Dérivée d'une fonction, intégrale première.	44
3.3. écriture différentielle, séparation des variables, intégrale première.	45
3.3.1. Courbe intégrale, trajectoire, orbite.	46
3.3.2. Ecriture différentielle.	46
3.3.3. Séparation des variables.	46
3.4. Changement de variables.	47
3.4.1. Changement de variables dans l'équation $\omega = 0$	47
3.4.2. Coordonnées polaires	48
3.4.3. Equations homogènes	49
3.4.4. Redressement des champs de vecteurs.	49
3.5. Etude qualitative d'un champ de vecteur.	49
3.5.1. Sortie de tout compact.	50
3.5.2. Points d'équilibre : partie linéaire et stabilité.	50
3.6. Système à un degré de liberté : espace des phases et applications.	50
.	51
3.7. Exercices du chapitre 3.	52
3.7.1. Orbite et flot.	55
3.7.2. Portrait de phase	55
3.7.3. Courbes intégrales, séparation des variables.	55
3.7.4. Changement de variables	55
3.7.5. Points d'équilibre.	56
3.7.6. Système à un degré de liberté.	58
4. ASPECTS QUALITATIFS	59
4.1. Lemme de Grönwall. Solutions approchées. Schéma d'Euler.	61
4.1.1. Lemme de Grönwall	61
4.1.2. Solutions approchées.	61
4.1.3. Schéma d'Euler	61
4.2. Convergence uniforme, théorème de Cauchy-Lipschitz.	62
4.2.1. Convergence uniforme.	63
4.2.2. Théorème de Cauchy-Lipschitz. Première méthode.	63
4.2.3. Méthode de Picard	64
4.3. Régularité des solutions. Linéarisation.	65
4.3.1. Dépendance des conditions initiales.	66
4.3.2. Variation par rapport à un paramètre	66
4.4. Exercices du chapitre 4.	67
4.4.1. Lemme de Grönwall.	68
4.4.2. Euler et Picard.	68
4.4.3. Convergence uniforme.	68
4.4.4. Dépendance par rapport à la condition initiale.	69
ANNEXE A.	69
Schéma d'Euler pour le modèle SIR	71
Portrait de phase d'un champ de vecteurs.	71

PROLOGUE

Il s'agit d'un premier cours sur les équations différentielles, destinés aux étudiants de L3. Il existe une bibliographie très importante sur ce sujet, sur laquelle nous nous sommes appuyés pour faire le cours, en particulier les livres de Coddington, Arnold et Reinhard qui sont écrits dans un esprit très différent, mais qui sont très complémentaires. Les exercices sont tirés du livre de Reinhard, des livres de Démidovitch et Filippov, et des exemples venant de la physique sont pris dans les livres de Feynman, Landau-Lifshitz. Le volume limité de ce cours (20 heures de cours) ne permet pas d'aller très loin. En particulier nous ne traitons pas des méthodes numériques, du problème de la stabilité structurelle des solutions, des solutions périodiques, de la théorie de Poincaré Bendixson, de l'équation d'Euler-Lagrange, ni de plein d'autres sujets accessibles à des étudiants de L3. Les simulations numériques ont été faites avec Octave (scripts en appendice) qui est la version gratuite de Matlab. Le lecteur n'aura pas de mal à en faire avec Python.

Bibliographie.

V.I. Arnold. Equations différentielles ordinaires. Mir Moscou 1974

E.A. Coddington. Ordinary differential equations. Dover

H. Reinhard. Equations différentielles. Gauthier-Villars 1982

B. Démidovitch. Recueil d'exercices et de problèmes d'analyse mathématique. Mir Moscou 1977, Ellipses 1994

A. Filippov. Recueil de problèmes d'équations différentielles. Mir Moscou 1977

Pour aller plus loin.

E.A Coddington, N. Levison. Theory of ordinary differential equations. McGraw-Hill 1984

W. Walter. Ordinary Differential Equations; GTM. Springer 1998.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

There is only one precise way of presenting the laws, and that is by means of differential equations. They have the advantage of being fundamental and, so far as we know, precise. If you have learned the differential equations you can always go back to them. There is nothing to unlearn.

R.P. Feynman¹

1.1. QU'EST CE QU'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ?

C'est une équation de la forme $f(t, x, \frac{dx}{dt}) = 0$, ou peut être $f(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}) = 0$,

Où f est une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, ou peut être $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, ou bien $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

On cherche une fonction $x(t)$ à valeurs dans \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n , dérivable ou deux fois dérivable, telle que à chaque instant, on ait

$$f(t, x(t), \frac{dx}{dt}(t)) = 0$$

DÉFINITION 1.1.1. Une solution de l'équation différentielle est une fonction x dérivable définie sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} et à valeur dans \mathbb{R}^n telle que pour tout t de I , $(t, x(t), \frac{dx}{dt})$ est dans Ω et $f(t, x, \frac{dx}{dt}) = 0$

Remarque 1.1.1. On dit aussi « équation différentielle ordinaire, en abrégé EDO, par comparaison avec des équations faisant intervenir des dérivées partielles, comme l'équation de la chaleur, ou l'équation des ondes, par exemple.

DÉFINITION 1.1.2. Une courbe intégrale est une courbe paramétrée par une solution, mais dont on oublie le paramétrage.

Exemple 1.1.1. On rappelle que l'application exponentielle $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est définie $e^z = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}$

Elle satisfait $e^{a+b} = e^a \times e^b$.

Si t est réel $e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$

$e^{a+ib} = e^a \times (\cos(b) + i \sin(b))$

$e^z = 1 + z + o(z)$ (quand z tend vers 0).

Elle est la clef pour étudier les équations différentielles en général et l'équation $\frac{dz}{dt} = a.z$ en particulier.

On cherche ici les fonctions $x: I \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $\frac{dz}{dt} = a.z$

THÉORÈME 1.1.1. La fonction $z(t) = z_0 e^{a(t-t_0)}$ est l'unique solution de l'équation différentielle telle que $z(t_0) = z_0$

Démonstration. $z(t+h) = z_0 e^{a(t-t_0)+ah} = z(t) e^{ah} = z(t)(1+ah+o(h))$ donc z est dérivable en tout point et $z'(t) = a.z(t)$

Si $z(t)$ est une autre solution, $z(t) \times e^{-a(t-t_0)}$ satisfait $z' = 0$ donc z est de la forme $Ce^{a(t-t_0)}$ et $C = z_0$ en évaluant en t_0 □

¹ Feynman R.-P., Leyton R.-B., Sand M. Lectures on Physics, 1967. Pour les paresseux il y a une excellente traduction en français publiée chez Dunod.

On voit aussi que si $\operatorname{Re}(a) > 0$ et $t \rightarrow +\infty$ z tend vers ∞ et par contre si $\operatorname{Re}(a) < 0$ $z(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

Un cas intéressant est la cas où $a = i\omega$ est imaginaire pur. La solution est $x_0 e^{i\omega(t-t_0)}$, qui est périodique de période $\frac{2\pi}{\omega}$.

En général, les courbes intégrales sont des **spirales** logarithmiques qui tournent autour de l'origine.

Il se trouve qu'on a pu résoudre explicitement cette équation, mais très souvent ça n'est pas le cas. Néanmoins, nous allons essayer d'étudier les problèmes disons fondamentaux.

Nous allons étudier les problèmes dit d'**évolution** où la vitesse $\frac{dx}{dt}$ s'exprime en fonction de la position x et du temps t . Alors l'équation devient :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

On dit que l'équation est résolue (sous entendu par rapport à $\frac{dx}{dt}$). Dans ce cours, nous n'étudierons que des équations de cette forme.

Très souvent x est un point de l'espace, et t le temps $\frac{dx}{dt}$ est alors un vecteur vitesse et il est commode de représenter le champ de vecteurs $f(t, x)$ dans le plan ou dans l'espace si $x \in \mathbb{R}^2$ ou $x \in \mathbb{R}^3$.

Exemple 1.1.2. Le vent est un champ de vecteurs qui dépend du temps. On peut se demander la trajectoire d'une montgolfière, qui se laisse porter par le vent sans rien faire et alors on étudie l'équation $\frac{dx}{dt} = \vec{v}(x, t)$

DÉFINITION 1.1.3. Dans le cas où f ne dépend pas de temps t on dit que l'équation est **autonome**. On écrit $\frac{dx}{dt} = f(x)$.

1.2. LE PROBLÈME DE CAUCHY.

Le problème de Cauchy est une liste de plusieurs questions que l'on peut résumer à « peut on prédire l'avenir ? ».

1. Etant fixée une « donnée initiale (t_0, x_0) l'équation différentielle $f(t, x, \frac{dx}{dt}) = 0$ a-t-elle une solution telle que $x(t_0) = x_0$
2. Sur quel intervalle de temps $]t_1, t_2[$ est elle définie ?
3. Cette solution est elle unique ?

On peut y ajouter un problème tout aussi intéressant. Comment cette solution se comporte elle ?

1. Exemple. Un modèle d'épidémie.

On a une épidémie dans une population. On « divise » la population en trois sous-populations S, I, R qui sont trois fonctions du temps t : ainsi S est le nombre de gens n'ayant pas été atteints par le virus, I le nombre de personnes infectées à la date t , et R le nombre de personnes guéries (ou mortes).

Bien sûr S, I, R sont des nombres entiers, on y pense comme à des fonctions continues du temps, de sorte que $S + I + R = N$ est une constante. On introduit souvent $x = \frac{S}{N}, y = \frac{I}{N}, z = \frac{R}{N}$ pour exprimer le nombre de personnes susceptibles d'être infectée ou infectée en termes de *proportion*.

En 1927, [Kermack and McKendrick](#) ^{1.2.1} proposent le modèle suivant

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta \frac{I \cdot S}{N} \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I \\ \frac{dI}{dt} &= \beta \frac{I \cdot S}{N} - \gamma I \end{aligned}$$

^{1.2.1.} Voir N. Bacaer Mathématiques et épidémies, Cassini 2021 pour avoir une idée globale de la vision contemporaine du sujet.

La première équation dit que le nombre de personnes qui attrapent le virus est proportionnel au produit du nombre de personnes malades par le nombre de gens susceptibles d'attraper le virus^{1.2.2}.

La seconde que, chaque jour, le nombre de personnes guéries (ou mortes) est proportionnel au nombre de malades. La dernière, résulte des deux premières équations.

Il est plus facile d'écrire notre équation
$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta x \cdot y \\ \beta y - \gamma z \\ \gamma y \end{pmatrix},$$
 où $x, y, z \in [0, 1]$ sont les proportions de gens respectivement susceptibles d'attraper le virus, infectées ou guéries.

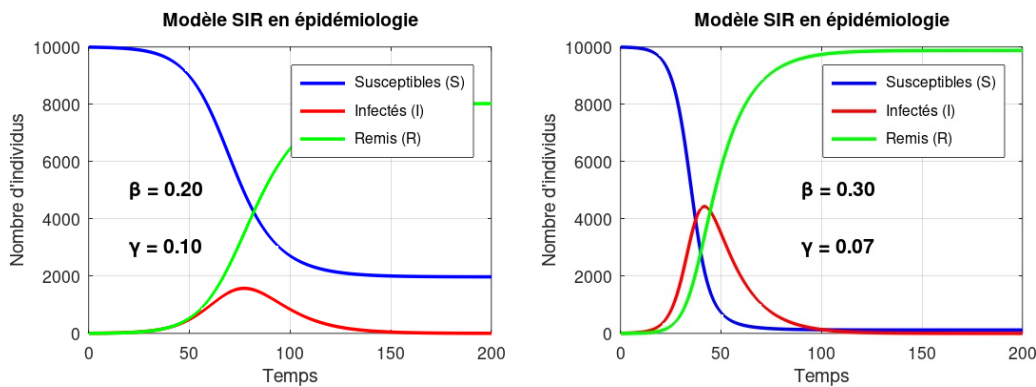
Il est important de constater que même sur cette équation très simple et qui ne reflète probablement pas du tout la réalité, on ne peut pas trouver de solution explicite. Une bonne méthode est d'utiliser des schéma numériques pour comprendre à quoi ressemblent les solutions. Cela dépend de façon importante des paramètres.

On voit sur la figure suivante un « pic épidémique » au bout de 70 jours pour une certaine épidémie quand $\beta = 0.2, \gamma = 0.1$ alors que le pic est atteint au bout de 40 jours si $\beta = 0.3, \gamma = 0.07$ (le virus est plus contagieux, et les gens guérissent moins vite).

En fait, le nombre $r_0 = \frac{\beta}{\gamma}$ joue un rôle très important, en effet $\frac{dx}{dz} = -r_0 x$, de sorte que $x = \exp -r_0 z$ et donc $z = \frac{-\ln x}{r_0}$.^{1.2.3}

A l'instant $t = +\infty, y = \frac{I}{N} = 0, x + z = 1$, et on a donc $x = \exp -r_0(1 - x)$, ce qui donne implicitement le nombre de gens qui ne tomberont jamais malade.

On voit qu'une question tout aussi importante que celle posée dans le problème de Cauchy est de trouver des solutions approchées, et de comprendre ce qui se passe quand on change un peu les paramètres. Voici le résultat d'une simulation avec deux paramètres différents.



1.3. QUELQUES GRANDS PRINCIPES

1.3.1. Un théorème d'existence et d'unicité (Cauchy-Lipschitz).

DÉFINITION 1.3.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, f(t, x)$ une fonction. on dit que f est localement lipschitzienne par rapport à x si, pour tout (x_0, t) de Ω , il existe un couple ε, r et un réel $k \geq 0$ tels que $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times B(x_0, r) \subset \Omega$ et $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k \|x - y\|$ pour t dans $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ et x, y dans $B(x_0, r)$.

1.2.2. Il s'agit d'une hypothèse de type « mélange ». On suppose que pour une personne la probabilité dp d'attraper le virus entre l'instant t et l'instant $t + dt$ est proportionnelle au nombre de gens infectés $dp = \beta \cdot \frac{I}{N} dt$. Alors le nombre de personnes infectées s'accroît de $dI = S \cdot \beta \cdot \frac{I}{N} dt$ auquel on retranche le nombre de personnes guéries ou mortes $dI = \beta S \cdot \frac{I}{N} dt - \gamma I dt$

1.2.3. Voir le film Contagion de Steven Soderbergh, ou Kate Winsley explique cela au tableau..

On rappelle que la fonction $F: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est de classe C^1 si et seulement si les dérivées partielles $\frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ existent et sont continues. On note souvent $\frac{\partial F}{\partial x}$ la matrice $\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\right)$.

Exemple 1.3.1. Si f est de classe C^1 par rapport à x et si $\frac{\partial f}{\partial x}: \Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est continue, alors f est localement lipschitzienne par rapport à x .

Démonstration. En effet, si $k = \text{Max}_{x, y \in \bar{B}(x_0, r)} \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|$, le théorème des accroissements finis montre que $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k \|x - y\|$. \square

THÉORÈME 1.3.1. (Cauchy-Lipschitz) Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(t, x)$ une fonction continue. On suppose que f est localement lipschitzienne par rapport à la variable x , par exemple que f est C^1 .

1. *Existence.* Pour toute donnée initiale (t_0, x_0) il existe un couple ε, r tel que $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\times B(x_0, r) \subset \Omega$ et une fonction $x:]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\rightarrow B(x_0, r)$ telle que $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$.

2. *Unicité.* Si $y: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une autre solution, alors sur l'intervalle $I \cap]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, $x = y$.

Remarque 1.3.1. Dans certains pays, ce théorème s'appelle Picard-Lindelöf. Cauchy démontre la première version en 1821, Lipschitz en 1868, Picard en 1893 et Lindelöf en 1894. En fait Picard utilise le théorème du point fixe repris par Lindelöf, alors que Cauchy montre la convergence du schéma d'Euler sous l'hypothèse que la fonction est C^1 . Nous donnerons les deux démonstrations, très différentes, dans le dernier chapitre.

Pour l'instant nous admettrons ce théorème.

DÉFINITION 1.3.2. Une solution x définie sur un intervalle $]t_1, t_2[$ est dite maximale si on ne peut pas trouver une autre solution \tilde{x} définie sur un intervalle strictement plus grand $]t'_1, t'_2[$ telle que x et \tilde{x} coïncide en un point t_0 .

Grâce au théorème d'existence et d'unicité on peut démontrer

THÉORÈME 1.3.2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(t, x)$ une fonction continue. On suppose que f est localement lipschitzienne par rapport à la variable x , par exemple que f est C^1 . Pour toute donnée initiale (t_0, x_0) il existe une unique solution maximale de l'équation $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ telle que $f(t_0) = x_0$. \square

1.3.2. Equation autonome en dimension 1.

On écrit alors $\frac{dx}{dt} = f(x)$, ou $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Le domaine Ω est donc ici $\Omega = I \times \mathbb{R}$, et le champ de vecteur associé est $f(x)$.

On suppose que f est de classe C^1 de sorte qu'on est dans les conditions d'application des théorèmes d'existence et d'unicité. Pour chaque donnée initiale (t_0, x_0) , il existe un intervalle de temps maximal sur $J \subset \mathbb{R}$ et une fonction $x(t)$ définie sur J telle que $\frac{dx}{dt} = f(x)$.

Cette fonction $J \rightarrow I$ est soit strictement croissante, soit strictement décroissante soit constante, en effet si sa dérivée s'annule en un point alors la solution maximale est constante.

Cette équation est autonome, donc il suffit de se concentrer sur la question de trouver la solution qui vaut x_0 à l'instant initial $t = 0$.

L'idée est de l'inverser et de chercher non pas une fonction $x(t)$ mais son inverse $t(x)$, qui satisfait quand à elle l'équation $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{f(x)}$ et que l'on peut intégrer

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{du}{f(u)}.$$

Ainsi grâce au calcul d'une intégrale, on peut trouver l'inverse de la solution.

On peut se demander quelle est la solution maximale telle que $x(0) = x_0$ et quel est son comportement au borne de l'intervalle de définition. Pour cela on considère $I =]a, b[$, avec peut être $a = -\infty, b = +\infty$ et on suppose que f s'annule seulement en un nombre fini de point a_1, \dots, a_n .

Si la donnée initiale est l'un des a_i la solution maximale est la solution constante $x(t) = a_i$ définie sur \mathbb{R}

Sinon on se donne x_0 et on distingue trois cas soit $x_0 \in]a, a_1[$ soit $x_0 \in]a_n, b[$, soit il appartient à $]a_{k-1}, a_k[$.

Dans tous deux cas, la fonction f garde un signe constant sur l'intervalle contenant x_0 . Pour fixer les idées disons que $f > 0$ sur cet intervalle, de sorte que $x(t)$ va être une fonction croissante tant qu'on reste dans l'intervalle en question : partant d'un point x_0 , on va aller vers la droite. Posons $c = b, a_k$ suivant les cas.

On pose $t_1 = \lim_{x \rightarrow c} \int_{x_0}^x \frac{du}{f(u)}$ (peut être que $t_1 = +\infty$). Cette limite existe dans $\mathbb{R} \cup +\infty$ car c'est une fonction croissante.

PROPOSITION 1.3.1. *Alors la solution maximale de l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = f(x)$ telle que $x(0) = x_0$ est définie sur l'intervalle $[0, t_1[$, et c'est l'inverse de la fonction $\int_{x_0}^x \frac{du}{f(u)}$.*

On a de plus $\lim_{t \rightarrow t_1} x(t) = c$. En particulier si $c = a_k \in I$, alors $t_1 = +\infty$ \square

Exemple : la cocotte minute.

L'équation de la pression dans une cocotte minute est $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{\alpha}$, que l'on écrit $\frac{dt}{dx} = \frac{\alpha}{x^2}$, qui est juste la recherche d'une primitive.

$$t = \alpha \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} \right), \text{ et donc } x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - \frac{t}{\alpha}} = x_0 \times \frac{1}{1 - \frac{x_0}{\alpha} t}$$

cette solution est bien définie sur l'intervalle $]-\infty, \frac{\alpha}{x_0}[$, et elle explose quand $t \rightarrow \frac{\alpha}{x_0}$.

On voit sur cet exemple que le renseignement le plus utile est *la durée pendant laquelle la solution est bien définie.*

1.3.3. Mise sous forme intégrale. Continuité par rapport à la donnée initiale.

Même si cela paraît complètement idiot, il est souvent utile d'écrire l'équation différentielle :

$$(*) \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x); \quad x(t_0) = x_0$$

sous forme intégrale :

$$(**) \quad x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

ces deux formulations sont équivalentes, et si souvent la première est la plus naturelle, la seconde est plus facile à exploiter.

Voici un exemple, où l'on étudie la dépendance par rapport à la condition initiale.

THÉORÈME 1.3.3. *(Lemme de Grönwall) On suppose que la fonction f est globalement lipschitzienne par rapport à x , plus précisément qu'il existe une constante $k \geq 0$ telle que*

$$\|f(s, x) - f(s, y)\| \leq k \|x - y\|$$

Si x et y sont deux solutions de () définies sur l'intervalle $[t_0, t]$ telles que $x(t_0) = x_0$ et $y(t_0) = y_0$, alors $\|x(t) - y(t)\| \leq \exp k(t - t_0) \|x_0 - y_0\|$*

Démonstration. D'après (**), on a $\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(t_0) - y(t_0)\| + \int_{t_0}^t k \|x(s) - y(s)\| ds$

On pose $z(t) = \|x(t) - y(t)\|$. Il vient $z(t) \leq z(t_0) + k \int_{t_0}^t z(s) ds$

On définit $\varphi(t) = (z(t_0) + k \int_{t_0}^t z(s) ds) \exp -k(t - t_0)$. On remarque que φ est dérivable et on calcule

$$\varphi'(t) = k(z(t) - z(t_0) - k \int_{t_0}^t z(s) ds) \exp -k(t - t_0) \leq 0, \text{ d'où le résultat. } \square$$

Ce résultat a deux corollaires. L'unicité de la solution avec une même donnée initiale, et la relative stabilité de la solution : si on part de deux points proches, on ne s'écarte pas trop à l'instant t .

THÉORÈME 1.3.4. Soit $f: I \times \Omega \rightarrow E$ une fonction continue et localement lipschitzienne par rapport à x . Alors la solution du problème de Cauchy est unique et dépend continument de la position initiale. \square

Remarque 1.3.2. Nous verrons d'autres applications de cette méthode au chapitre « Le Lemme de Grönwall ».

1.3.4. Réduction de l'ordre d'une équation.

Souvent l'équation différentielle est donnée sous la forme $f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$, avec $x \in \mathbb{R}^n$ ou même (c'est rare, mais ça arrive) $f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}\right) = \frac{d^kx}{dt^k}$ 1.3.1

Dans ce cas, on se ramène à une équation du premier ordre dans \mathbb{R}^{2n} ou $\mathbb{R}^{k \cdot n}$ en posant $X(t) = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$, ou bien $X(t) = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ x^{[k-1]} \end{pmatrix}$, si $x^{[i]} = \frac{d^i x}{dt^i}$ désigne la i -ème dérivée de la fonction x .

Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{pmatrix}$, l'équation devient $\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ f(t, x_1, \dots, x_{k-1}) \end{pmatrix}$

Nous verrons comment ça marche sur des exemples concrets, donnons juste un exemple l'équation de Newton.

Si un corps de masse m se promène dans un champs de forces $\vec{F}(X)$, Newton nous dit que son accélération suit la loi

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = \vec{F}(X)$$

On introduit alors le vecteur vitesse, et on écrit

$$\frac{dX}{dt} = \vec{V}, \quad \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{1}{m} \vec{F}, \quad \text{ce qui est un système dans } \mathbb{R}^6, \text{ appelé l'espace des phases.}$$

1.4. EXERCICE DU CHAPITRE 1.

Exercice 1.4.1. Il y a deux sortes d'atome de Carbone : les C_{12} les plus nombreux et les C_{14} qui sont radioactifs. On admet que le taux de concentration τ_0 de C_{14} est constant dans l'atmosphère (il est produit par le rayonnement cosmique et son taux reste constant, sinon soit l'atmosphère serait totalement radioactive et nous ne serions pas là pour en parler, soit il n'y aurait plus de C_{14} du tout). Ainsi tant qu'un organisme est vivant et qu'il absorbe du carbone (si c'est une plante, par exemple) son taux de concentration en C_{14} est constant égal à τ_0 . Dès qu'il meure, comme le C_{14} se désintègre le taux va baisser. En fait il baisse suivant une loi probabilité : la probabilité qu'un atome de se désintègre entre l'instant t et l'instant $t + dt$ est $dp = \lambda dt$. On suppose que le nombre d'atomes radioactifs est petit devant le nombre total. (En fait $\tau_0 = 1,3 \cdot 10^{-12}$), ce qui veut dire que dans 12 gramme de carbone il y a $8 \cdot 10^{11}$ atomes radioactifs).

Si $\tau(t)$ est le taux de C_{14} à l'instant t démontrer que $\tau(t + dt) - \tau(t) = -\lambda \tau(t) dt$.

En déduire que $\frac{d\tau}{dt} = -\lambda \tau$.

Au bout de combien de temps la moitié des atomes de C_{14} présents à l'instant 0 ont disparu ?

Proposer un expérience de durée 1 an pour évaluer λ . On trouve $\lambda = 1,2 \cdot 10^{-4}$.

Un papyrus a un taux de concentration de C_{14} égal à $0,7 \cdot 10^{-12}$. Quel âge a t il ?

Supposons qu'en fait $\lambda = 1,1 \cdot 10^{-4}$ ou $\lambda = 1,3 \cdot 10^{-4}$ qu'aurait on trouvé ?

1.3.1. La très grande majorité des équations différentielles liées à la physique sont d'ordre 1 ou 2. Dans un premier temps on peut donc supposer que $k = 2$

Exercice 1.4.2. Un récipient contient 100 litres d'eau mélangée à du vin, à la concentration de 10%. On le remplit à la vitesse de 5 litres par minute avec de l'eau douce et il se vide à la même vitesse. Quelle équation différentielle satisfait la concentration de vin ? Au bout de combien de temps celle-ci est inférieure à 1%.

Exercice 1.4.3. On considère l'équation différentielle (E) $\frac{dx}{dt} = ax + b(t)$, où a est une certaine constante et b une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

On pose $y(t) = x(t)e^{-at}$. Quelle équation différentielle satisfait y ?

En déduire la solution de l'équation (E) telle que $x(t_0) = x_0$

Résoudre l'équation quand $b(t) = t^2$, $a = -1$.

Exercice 1.4.4. On considère l'équation différentielle linéaire dans \mathbb{R}^2 : $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -\omega \\ \omega & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

En posant $z = x + iy$, écrire l'équation sous la forme complexe $\frac{dz}{dt} = f(z)$ et la résoudre. Dessiner les solutions quand $\lambda = 1$, $\omega = 2\pi$.

Exercice 1.4.5. Soit $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 . On considère l'équation autonome $\frac{dx}{dt} = f(x)$.

Rappeler pourquoi on dit que l'équation est autonome.

Démontrer que si la fonction x définie sur un intervalle $]a, b[$ est une solution telle que $x(t_0) = x_0$ de cette équation, alors la fonction y définie par $y(t) = x(t - c)$ est une solution définie sur $]a + c, b + c[$.

Si $x(t)$ et $y(t)$ sont deux solutions et si $x(t_0) = y(t_1)$ démontrer que pour tout t , $y(t) = x(t - t_1 + t_0)$.

Exercice 1.4.6. Modèle logistique (Pierre-Francois Verhulst, 1836).

On étudie une population de mammifères dans un parc animalier. Soit $N(t)$ le nombre de ces animaux. On observe que si $N > A$ il n'y a pas assez à manger et la population décroît, alors que si $N < A$ elle a tendance à augmenter. Verhulst (1836) a décidé de modéliser cela par l'équation

$$(E) \frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{A} \right)$$

Ecrire l'équation différentielle satisfaite par $x = \frac{N}{A}$.

En notant que cette équation est une équation autonome de dimension 1, la résoudre explicitement.

Dessiner (peut être avec votre logiciel préféré) cette solution, en supposant que $r=0,15$, $A=1500$, $N_0 = 100$, 1000, 10000.

Exercice 1.4.7. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . On suppose que en tout point de Ω , l'une des deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ est non nulle.

On note C_λ la courbe de niveau $\{(x, y) \in \Omega: f(x, y) = \lambda\}$.

0. Rappeler le théorème des fonctions implicites, et démontrer qu'au voisinage d'un point (x_0, y_0) tel que $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ on peut décrire C_λ comme graphe d'une fonction $y(x)$ dont on calculera la dérivée.

1. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $c: I \rightarrow \Omega$ une fonction de classe C^1 : autrement dit, $c(t) = (x(t), y(t))$ est une courbe paramétrée. Démontrer que $c(t)$ reste dans une courbe C_λ si et seulement et $\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0$

2. Démontrer que les courbes de niveau de f sont les solutions de l'équation différentielle

$$-\frac{\partial f}{\partial x} / \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{dy}{dx} \text{ (qu'on écrit aussi } \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0)$$

4. Ecrire une équation différentielle dont les graphes des solutions sont les hyperboles $x^{-1} + y = \lambda$ du demi plan $x > 0$. Sur quel intervalle est définie la solution $y(x)$ telle que $y(x_0) = y_0$

Exercice 1.4.8. Système conservatif. Une particule se promène dans un champs de forces. Newton nous dit

que sa position $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ satisfait l'équation différentielle du second ordre.

$$m_0 \frac{d^2 X}{dt^2} = \vec{F}$$

On suppose que \vec{F} dérive d'une potentiel $\vec{F} = -\nabla U = - \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}$

On note $X(t)$ la position à l'instant t . Montrer que $X'(t) = Y(t)$ satisfait $\frac{d}{dt} U(X(t)) = -\langle \nabla U, Y(t) \rangle$, et en déduire que $U(X(t)) + 1/2 m < Y.Y >$ reste constant.

On suppose la pesanteur est un vecteur constant $\vec{G} = -10m.s^{-2} \cdot \vec{k}$, où \vec{k} est un vecteur unitaire dirigé vers le haut. Trouver U tel que $\nabla U = -m_0 \vec{G}$ et en déduire à quelle hauteur un objet lancé verticalement à la vitesse $10m.s^{-1}$ va monter (on néglige les frottements de l'air).

Exercice 1.4.9. * Equation Prédateurs-Proies : Lotka 1925 Voltera 1926

Il s'agit d'une variante de l'équation logistique, ou maintenant on suppose qu'une population est non pas régulée par une constante (la quantité de nourriture) mais par un prédateur. Dans la littérature on l'appelle l'équation Prédateurs-Proies, ou Lynx et Lapins.

On considère l'équation $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x(1-y) \\ y(1-x) \end{pmatrix}$ définie sur l'ouvert $x > 0, y > 0$.

1. Dessiner le champs de vecteur associé. On commencera par chercher où il s'annule, où il est vertical vers le haut, vers le bas, horizontal à droite ou à gauche.

2. Montrer que si $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ est la solution qui vaut $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ à l'instant $t=0$, $\begin{pmatrix} x(t-t_1) \\ y(t-t_1) \end{pmatrix}$ est la solution qui vaut $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ à l'instant t_1 .

Comme on pense à cette équation différentielle comme un champ de vecteur autonome, une solution s'appelle une trajectoire.

3. En utilisant le théorème d'unicité montrer que deux trajectoires sont soit égales soit ne se rencontrent jamais.

4. On note 1, 2, 3, 4 les régions (1): $\{x > 1, y > 1\}$, (2) $\{x > 1, y < 1\}$ (3) = $\{y < 1, x < 1\}$ (4) = $\{x < 1, y > 1\}$. Montrer que si la donnée initiale est dans la région 1 la trajectoire va d'abord rentrer dans la région 2 puis dans la 3 et dans la 4 avant de revenir dans la région 1.

5. Soit $H(x, y) = x - \ln(x) + y - \ln(y)$.

Démontrer que le long d'une trajectoire, la fonction H reste constante.

6. Montrer que la restriction de la fonction H à la demi-droite $x \geq 1, y = 1$ est injective, et en déduire que la trajectoire revient à sa position initiale.

7. En utilisant l'unicité montrer que toute trajectoire est périodique.

CHAPITRE 2

EQUATIONS LINÉAIRES.

2.1. GÉNÉRALITÉS.

Les deux formes des EDO linéaires.

2.1.1. Le système linéaire d'équations $\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , par exemple $E = \mathbb{R}^n$ ou \mathbb{C}^n .

On se donne un intervalle I de \mathbb{R} deux applications continues
 $A: I \rightarrow L(E) \simeq M_n(\mathbb{R})$ ou $M_n(\mathbb{C})$ et $B: I \rightarrow E \simeq \mathbb{R}^n$ ou \mathbb{C}^n

Dans ce cas le théorème de Cauchy-Lipschitz est très simple.

THÉORÈME 2.1.1. *Pour toute donnée initiale $t_0 \in I$, $x_0 \in E$ il existe une unique solution $x(t)$ définie sur I tout entier, telle que pour $t = t_0$, $x(t) = x_0$.*

DÉFINITION 2.1.1. *On dit que l'équation différentielle est « sans second membre » si $B \equiv 0$. On dit aussi que l'équation est « homogène ».*

Le théorème le plus important est le théorème suivant connu en physique sous le nom de principe de superposition.

THÉORÈME 2.1.2. *L'espace \mathcal{E} des solutions de l'équation différentielle sans second membre $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ est un espace vectoriel de même dimension que E (donc de dimension n sur \mathbb{R} si $E = \mathbb{R}^n$ ou sur \mathbb{C} si $E = \mathbb{C}^n$).*

Si $t_0 \in I$ est fixé l'application $\mathcal{E} \rightarrow E$ qui à la solution x associe sa valeur au point t_0 est un isomorphisme.

Démonstration. Si x, y sont deux solutions et si $\lambda \in \mathbb{R}$ est un scalaire, $x + \lambda y$ est encore une solution. Ainsi \mathcal{E} est un sous-espace de l'espace vectoriel des fonction continues $C_0(I, E)$. D'après le théorème de Cauchy Lipschitz, l'application $\mathcal{E} \rightarrow E$ qui à la solution x associe sa valeur au point t_0 est bijective. \square

THÉORÈME 2.1.3. *L'espace \mathcal{A} des solutions de l'équation différentielle avec second membre $\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)$ est un espace affine de même dimension que E dont l'espace vectoriel sous-jacent est l'espace \mathcal{E} des solutions de l'équation sans second membre.*

Si y est une solution fixée de cette équation, toute solution s'obtient en ajoutant à y une solution de l'équation sans second membre.

On verra plus tard la méthode dite de la variation de la constante qui permet de calculer une solution particulière si on connaît toutes les solutions de l'équation sans second membre.

2.1.2. L'équation différentielle scalaire d'ordre n en une variable.

Il s'agit de l'équation :
$$x^{[n]} + a_{n-1}(t)x^{[n-1]} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$$

Ici, I est un intervalle de \mathbb{R} , les a_i (et b) sont des fonctions continues de I à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et on cherche une fonction x n fois dérivable sur I qui satisfait cette équation.

On peut facilement se ramener au premier cas en posant $E = \mathbb{R}^n$ ou $E = \mathbb{C}^n$ et en étudiant l'équation

$$\begin{cases} x = y_0 \\ \frac{dx}{dt} = y_1 \\ \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_{n-2}}{dt} = y_{n-1} \\ \frac{dy_{n-1}}{dt} = -a_{n-1}y_{n-1} - a_{n-2}y_{n-2} + \dots - a_0y_0 + b(t) \end{cases}$$

On pose alors $Y(t) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ de sorte que $\frac{dY}{dt} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ -a_{n-1}y_{n-1} - a_{n-2}y_{n-2} + \dots - a_0x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$ Ou s'il l'on préfère $\frac{dY}{dt} = C_P Y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$.

Ici, $C_P(t)$ est la matrice compagnon du polynôme $P_t(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$.

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

Dans la pratique, $n=2$, et on regarde l'équation :

$$\boxed{x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)}$$

La matrice associée est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}$ et on peut écrire notre équation :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}}$$

Remarque 2.1.1. On voit ainsi que l'équation différentielle linéaire d'ordre n en une variable est un cas particulier de l'équation différentielle linéaire en n variables. Simplement la matrice est un peu particulière.

2.2. LA DIMENSION 1.

2.2.1. L'équation $\frac{dx}{dt} = ax + b(t)$

Ici a est un nombre réel ou bien complexe. La fonction b est à valeurs dans \mathbb{R} (si $a \in \mathbb{R}$) ou dans \mathbb{C} (si $a \in \mathbb{C}$). Nous dirons \mathbb{K} .

THÉORÈME 2.2.1. *L'espace vectoriel des solutions de l'équation $\frac{dx}{dt} = ax$, ou $a \in \mathbb{K}$ est de dimension 1. La solution telle que $x(t_0) = x_0$, est $x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}$*

Démonstration. On a deux choses à voir. La fonction $x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}$ est bien solution de l'EDO, ce qui est facile, et nous devons vérifier que c'est la seule qui satisfait $x(t_0) = x_0$. Soit y une autre solution. Alors $ye^{-a(t-t_0)} = z$ satisfait $z' = 0$, donc z est constante. \square

Exemple 2.2.1. $\frac{dx}{dt} = i\omega x$ admet comme solution $x(t) = e^{i\omega t}$, qui est périodique de période $\frac{2\pi}{\omega}$.

N'importe quel vecteur non nul en est une base si $a \neq 0$, $x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}$, si $a = 0$, $x(t) = x_0$.

Pour obtenir la solution générale, on adopte la méthode dite de *la variation des constantes*.

On cherche la solution x sous la forme $x(t) = c(t)e^{a(t-t_0)}$, $c(t_0) = x_0$

Comme $\frac{dx}{dt} = a.x + \frac{dc}{dt}e^{at}$, il vient $\frac{dc}{dt} = e^{-at}b(t)$, qui se résout $c(t) = x_0 + \int_{t_0}^t e^{-au}b(u) du$

au total, nous avons démontré un théorème.

THÉORÈME 2.2.2. *La solution de l'équation telle que $x(t_0) = x_0$ est $x(t) = e^{a(t-t_0)}(x_0 + \int_{t_0}^t e^{-au}b(u) du)$.*

2.2.2. L'équation $\frac{dx}{dt} = a(t)x$

Soit $a: I \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} une fonction continue.

On rappelle que si à un instant t_0 , $x(t_0) = 0$ alors la solution est $x(t) \equiv 0$.

Supposons donc que pour tout $t \in I$, $x(t_0) \neq 0$. Alors la fonction x garde un signe constant et on peut écrire l'équation sous la forme :

$$\frac{dx}{x dt} = \frac{d(\ln(x))}{dt} = a(t), \text{ qui s'intègre facilement}$$

$$\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = \int_{t_0}^t a(u) du.$$

Autrement dit, nous avons démontré :

THÉORÈME 2.2.3. *Si A est une primitive de la fonction a sur l'intervalle I , la solution du problème de Cauchy $\frac{dx}{dt} = a(t)x$, $x(t_0) = x_0$ est $x(t) = x_0 e^{A(t) - A(t_0)}$.*

2.2.3. L'équation $\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)$.

On reprend le paragraphe précédent. On peut écrire la solution de l'équation « sans second membre », sous la forme $x(t) = C e^{A(t)}$.

Pour résoudre l'équation générale, on fait *varier la constante*, c'est à dire qu'on cherche la solution sous la forme $x(t) = C(t) e^{A(t)}$.

$$\text{Il vient } \frac{dx}{dt} = a(t)x + C'(t)e^{A(t)} = a(t)x + b(t).$$

Ainsi la fonction $x(t)$ est solution de notre équation différentielle si et seulement si :

$$C'(t) = e^{-A(t)} b(t).$$

Ce qui s'intègre très facilement. Nous avons donc démontré le théorème :

THÉORÈME 2.2.4. *Si A est une primitive de a sur l'intervalle I , et C la primitive de $e^{-A(t)} b(t)$ telle que $C(t_0) = x_0$, la solution du problème de Cauchy est $x(t) = C(t) e^{A(t) - A(t_0)}$ □*

Remarque 2.2.1. Au lieu de « faire varier la constante », on peut écrire $y(t) = x(t) e^{-A(t)}$ et remarquer que $\frac{dy}{dt} = b(t)$. Autrement dit, on peut se ramener au cas où $a(t) \equiv 0$.

2.3. L'ÉQUATION HOMOGENÈME À COEFFICIENTS CONSTANTS.

Dans la suite E désigne un \mathbb{R} – espace vectoriel de dimension finie, $A \in L(E)$ une application linéaire. Il se peut que E soit un \mathbb{C} – espace vectoriel, ce qui simplifie souvent les choses. Nous noterons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , en expliquant au moment utile où se trouve la distinction.

2.3.1. Position du problème et équivalence

Il s'agit des équations :

$$\frac{dX}{dt} = AX, \text{ où } A \in M_n(\mathbb{K}) \text{ ou bien } A \in L(E), \text{ où } E \text{ est un } \mathbb{K} \text{ espace vectoriel de dimension finie.}$$

ou bien :

$$x^{[n]} + a_{n-1} x^{[n-1]} + \dots + a_1 x' + a_0 x = 0$$

Comment trouver une base de l'ensemble des solutions ? On verra en fait que le second problème est un cas particulier du premier.

2.3.2. Matrices diagonales, changement de base.

On considère un endomorphisme $A \in L(E)$.

Si A est diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans la base de vecteurs propres, l'équation est

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 x_1 \\ \frac{dx_n}{dt} = \lambda_n x_n \end{cases}$$

On a donc n équations différentielles en dimension 1, très facile à résoudre. La solution qui vaut $x_{1,0}, \dots, x_{n,0}$ pour $t=0$ est donc, dans cette nouvelle base.

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_{1,0} e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ x_{n,0} e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Notons ici une petite difficulté. Il se peut très bien que A soit une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ qui est diagonalisable dans \mathbb{C} .

Peut être que au départ, l'endomorphisme A était donné par une matrice. On a $A = P \Delta P^{-1}$, où Δ est une matrice diagonale, et P la matrice de passage vers la base de diagonalisation. On a alors

$$\frac{dX}{dt} = AX, \text{ et en posant } Y = P^{-1}.X, \text{ on obtient}$$

$$\frac{dY}{dt} = \Delta Y, \text{ qui comme on l'a vu est très facile à résoudre, puis on obtient}$$

$$X = P.Y, \text{ ce qui permet d'exprimer simplement } X(t).$$

Remarque 2.3.1. Il se peut très bien que la matrice A soit dans $M_n(\mathbb{R})$ mais qu'elle soit diagonalisable dans \mathbb{C} . Alors la matrice de passage est aussi à coefficients complexes, mais $X(t) = PY(t)$ est une solution de l'équation différentielle donc elle reste à coefficients réels.

Exemple 2.3.1. Soit à résoudre une équation $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et on suppose que $b \neq 0$.

On cherche d'abord les valeurs propres.

$$\chi_m = (a - \lambda)^2 + b^2 = (\lambda - (a + ib))(\lambda - (a - ib))$$

Puis on calcule les vecteurs propres.

$$e_+ = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ satisfait } Ae_+ = (a + ib) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.u - bv \\ bu + av \end{pmatrix}, \text{ ou bien } \begin{cases} i.bu - bv = 0 \\ ibv + bu = 0 \end{cases}$$

$$e_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre associé à } \lambda_+ = a + ib.$$

$$\text{De même, } e_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre associé à } \lambda_- = a - ib$$

$$\text{Ainsi, si } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \text{ de sorte que } P^{-1} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } X(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, Y(0) = P^{-1}.X_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_0 - iy_0 \\ x_0 + iy_0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } X(t) = P.Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{\lambda_+ t} (x_0 - iy_0) \\ e^{\lambda_- t} (x_0 + iy_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{e^{\lambda_+ t} + e^{\lambda_- t}}{2} \right) x_0 + \left(\frac{e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}}{2i} \right) y_0 \\ \left(\frac{e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}}{2i} \right) x_0 + \left(\frac{e^{\lambda_+ t} + e^{\lambda_- t}}{2} \right) x_0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } \lambda_{\pm} = a \pm ib, \frac{e^{\lambda_+ t} + e^{\lambda_- t}}{2} = \cos(bt) e^{at}, \frac{e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}}{2i} = \sin(bt) e^{at}$$

$$\text{Ainsi } X(t) = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Remarque 2.3.2. 1. Soit $z = x + iy$. On voit que $Az = \lambda z$, ce qui donne immédiatement $\frac{dz}{dt} = a.z$, ou bien $z = e^{(a+ib)t} z_0$ et on obtient plus rapidement le même résultat.

2. On donnera plus tard une troisième démonstration de ce résultat.

2.3.3. Exponentielle d'une matrice. EDO linéaire à coefficients constants.

Rappel. Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , la **norme** d'une application linéaire de E dans E est définie par $\|A\| = \sup_{x \in E - \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$. Cette norme satisfait la propriété fondamentale $\|A.B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, et en particulier $\|A^n\| \leq \|A\|^n$.

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ ou $M_n(\mathbb{C})$ il y a une autre norme $n(A) = \sup_{i,j} (|a_{ij}|)$, et on sait bien que ces deux normes sont équivalentes. En particulier il existe une constante κ telle que les coefficients $a_{ij,n}$ de A^n satisfont $|a_{ij,n}| \leq \kappa \|A^n\| \leq \kappa \|A\|^n$.

Cette majoration permet de montrer.

THÉORÈME 2.3.1. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et et $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ρ à coefficients dans \mathbb{K} . La série de $M_n(\mathbb{K})$ de terme général $a_n A^n$ converge pour toute matrice A de norme $\|A\| < \rho$. Cette convergence est uniforme et définit une fonction continue (et même C^∞) $f: B(0, \rho) \subset M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$. \square

Nous allons d'abord utiliser ce théorème dans la situation très spéciale où $f(z) = e^z = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}$,

Dans ce cas $\rho = +\infty$, de sorte qu'on définit une application exponentielle $\exp: M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$. On note indifféremment e^A ou bien $\exp(A)$. Notons $GL_n(\mathbb{K}) \subset M_n(\mathbb{K})$ le groupe formé par les matrices inversibles.

THÉORÈME 2.3.2. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ deux matrices qui commutent. Alors $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.

L'application $(\mathbb{R}, +) \rightarrow (GL_n(\mathbb{K}), \times)$ définie par $\varphi(t) = \exp(tA)$ est un homomorphisme de groupes.

Démonstration.

Comme les séries de terme général $\frac{A^k}{k!}$ et $\frac{B^l}{l!}$ sont absolument convergentes, le théorème sur les produits de Cauchy permet d'affirmer que la série de terme général $\frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \cdot \frac{B^{n-k}}{(n-k)!}$ est absolument convergente et que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \cdot \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B^l}{l!} \right) = e^A \cdot e^B$$

Comme A et B , commutent, $\frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \cdot \frac{B^{n-k}}{(n-k)!}$ (binôme de Newton)

$$\text{Or } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = e^{A+B} \quad \square$$

THÉORÈME 2.3.3. 1. Au voisinage de la matrice nulle $e^X = \text{Id} + X + o(\|X\|)$.

L'application $\mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ définie par $\varphi(t) = \exp(tA)$ est C^∞ et $\varphi'(t) = A \cdot \varphi(t)$

Démonstration. Le 1. résulte immédiatement de la définition de l'exponentielle comme somme d'une série entière. Pour le 2 calculons:

$$\varphi(t_0 + t) = e^{t_0 A + t A} = e^{t A} \cdot \varphi(t_0) = (1 + t A + o(t)) \varphi(t_0)$$

$$\text{Donc } \frac{\varphi(t_0 + t) - \varphi(t_0)}{t} = A \cdot \varphi(t_0) + o(1) \quad \square$$

On a alors le théorème fondamental de la théorie des équations différentielles linéaires à coefficient constant.

THÉORÈME 2.3.4. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ la solution de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants $\frac{dX}{dt} = A \cdot X$ telle que $X(t_0) = X_0$ est $X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0$

Démonstration. En effet, d'après ce qui précède, $X(t) = \varphi(t) \cdot e^{(-t_0)A} X_0$, donc $X'(t) = A \cdot \varphi(t) \cdot e^{(-t_0)A} X_0 = A \cdot \varphi(t)$. De plus $X(t_0) = X_0$ par construction. \square

On a ainsi généralisé le résultat des EDO de dimension 1, mais le problème est comment calculer $e^{A?}$ ce que nous allons voir au paragraphe suivant. Commençons simplement par un cas particulier très simple.

On rappelle qu'un endomorphisme est dit **nilpotent** si il existe un entier k tel que $N^k = 0$. Comme le polynôme minimal de N , X^k , est de degré plus petit que la dimension on en déduit que $N^d = 0$

THÉORÈME 2.3.5. Soit N un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension d . Alors $\exp tN = \text{Id} + tN + \dots + \frac{t^{n-1}}{n-1!}N^{n-1}$ est une matrice dont les coefficients sont des polynômes de degré $\leq n-1$.

Démonstration. Résulte de la définition de e^{tN} . \square

2.3.4. Réduction d'un endomorphisme sur \mathbb{C} , décomposition de Dunford et calcul de $\exp tA$.

Pour résoudre l'équation différentielle, il est commode, comme on l'a vu, de trouver une base de diagonalisation. En général, un endomorphisme n'est pas diagonalisable, comme le montre l'exemple de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors on utilise la décomposition de Dunford sur \mathbb{C} .

On rappelle qu'un endomorphisme N est dit **nilpotent** si il existe un entier k tel que $N^k = 0$.

THÉORÈME 2.3.6. Soit $A \in \text{End}(E)$ un endomorphisme. On suppose que le polynôme caractéristique de A est scindé : $P = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\nu_i}$, où les λ_i sont des nombres complexes distincts. Soit $E_i = \ker(A - \lambda_i \text{Id})^{\nu_i}$ la sous-espace caractéristique, et N_i la restriction à E_i de $A - \lambda_i \text{Id}$. On pose $N = \bigoplus_{1 \leq i \leq k} N_i$.

L'espace vectoriel E est la somme directe $\bigoplus E_i$, et l'endomorphisme A se décompose $A = D + N$, où N est nilpotente ($N^{\max \nu_i} = 0$), D (resp. N) est l'application linéaire diagonalisable (nilpotente) dont la restriction à E_i est $\lambda_i \text{Id}$ (resp. N_i).

Ainsi, on a la décomposition $A = D + N$, D diagonalisable N nilpotente et D et N commutent.

La démonstration repose sur un lemme appelé le « lemme des noyaux ».

LEMME 2.3.1. Soient P, Q deux polynômes. On suppose que P et Q sont premiers entre eux, et que le produit $P \cdot Q$ annule l'endomorphisme A . Alors $\ker(P(A)) \oplus \ker(Q(A)) = E$

Démonstration. D'après le lemme de Bézout, il existe deux polynôme U, V tels que $UP + VQ = 1$.

Il en résulte que $P(A)(U(A)(x)) + Q(A)(V(A)(x)) = x$

Donc tout élément x est la somme d'un élément de $\text{Im}(P(A))$ et d'un élément de $\text{Im}(Q(A))$. Mais $Q(A) \circ P(A) = 0$ donc $\text{Im}(P(A)) \subset \ker(Q(A))$ et de même $\text{Im}(Q(A)) \subset \ker(P(A))$. Ainsi $\ker(P(A)) + \ker(Q(A)) = E$. Si x est dans l'intersection des noyaux, comme $U(A)(P(A)(x)) + V(A)(Q(A)(x)) = x$, alors $x = 0$. \square

En appliquant le lemme par récurrence k fois, et en posant $E_i = \ker(A - \lambda_i \text{Id})^{\nu_i}$ on voit que E se décompose $E = \bigoplus E_i$, de sorte que la restriction de A à E_i satisfait $A = \lambda_i \text{Id} + N_i$, où N_i est un endomorphisme nilpotent.

On est alors en mesure de « calculer » l'exponentielle de l'application linéaire A .

COROLLAIRE 2.3.1. Soit $A = D + N$ la décomposition de Dunford de A . Alors $\exp(tA) = \exp(tD) \times (\exp tN) = \exp(tN) \times \exp(tD)$.

Le calcul de $\exp(tD)$ est facile dans une base où D est diagonale $D = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} P$, alors $\exp tD = P^{-1} \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & \\ & e^{t\lambda_2} & \\ & & \ddots \\ & & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} P$, et les coefficients de $\exp tD$ sont des combinaisons linéaires de fonction $e^{\lambda_i t}$. Si N est nilpotente, son ordre de nilpotence est inférieur ou égal à d (à cause du théorème de Cayley-Hamilton) et les coefficients de $\exp tN = \sum_{k=0}^{d-1} \frac{t^k}{k!} N^k$ sont donc des polynômes en t de degré $\leq d-1$. En multipliant, on obtient donc.

PROPOSITION 2.3.1. Soit $X(t)$ la solution de l'équation différentiel $\frac{dX}{dt} = AX$ dont la valeur à l'instant 0 est X_0 . Les coordonnées de $X(t)$ sont donc de la forme :

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^l e^{\lambda_i(t)} \cdot p_{i,k}(t), \text{ où } p_{i,k} \text{ est un polynôme de degré } \nu_i - 1.$$

DÉFINITION 2.3.1. Une fonction de la forme $\sum_{i=1}^l e^{\lambda_i(t)} \cdot p_{i,k}(t)$ est un quasi-polynôme.

2.3.5. Cas de la dimension 2 à coefficients réels : portraits de de phase.

En dimension 2, à coefficients réels, il y a trois sortes de matrices. Les matrices diagonalisables sur \mathbb{R} , les matrices ayant une seule v.p. réelle mais pas diagonalisables, et les matrices ayant deux v.p. complexes conjuguées (et donc diagonalisables sur \mathbb{C}).

Dans chacun des cas, le calcul de l'exponentielle est facile, à condition d'avoir mis la matrice sous forme élégante.

Il y a donc 3 grands cas, mais en fait le premier admet 3 sous-cas.

Remarque 2.3.3. Quand famille d'objets se sépare en trois sortes, deux « génériques » et une la limite, on les appelle souvent « elliptique, hyperbolique et parabolique ». Par exemples les coniques se regroupent en trois familles : les ellipses, les hyperboles et les paraboles. On peut déterminer la nature d'une conique d'équation $ax^2 + bxy + cy^2 + ex + fy + g = 0$ en étudiant le signe du discriminant $4a \cdot c - b^2$

Si on se restreint aux matrices $(2, 2)$ de trace nulle, disons $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ on en a trois sortes : celles qui ont deux valeurs propres réelles opposées, appelées « hyperboliques », les matrices complexes ayant un valeur propres imaginaires pure et conjugués appelées elliptiques et les matrices conjuguées à la matrice de Jordan, que l'on peut appeler parabolique. A titre d'exercice le lecteur pourra regarder ce que ces définitions disent sur le déterminant qui est $-a^2 - bd$.

Cas 1. Deux v.p. imaginaires conjuguées.

Rappelons que si u désigne un vecteur propre de A , $Au = \lambda u$.
Donc, comme A est réelle, $A\bar{u} = \bar{\lambda} \cdot \bar{u}$, et $A \begin{pmatrix} u + \bar{u} \\ \frac{u - \bar{u}}{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \bar{\lambda} \\ \frac{\lambda - \bar{\lambda}}{2i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u + \bar{u} \\ \frac{u - \bar{u}}{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda + \bar{\lambda} \\ \frac{\lambda + \bar{\lambda}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u + \bar{u} \\ \frac{u - \bar{u}}{2i} \end{pmatrix}$. On écrit $\lambda = a + ib$, et dans la base $\left(\frac{u + \bar{u}}{2}, \frac{u - \bar{u}}{2i}\right)$ de \mathbb{R}^2 , la matrice est $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ qui est la matrice de l'application $z \rightarrow \lambda z$.

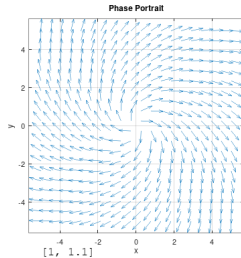
On a alors $\exp tA \cdot z_0 = e^{\lambda t} z_0 = e^{ib t} \cdot e^{at} z_0$, qui est la solution au problème de Cauchy.

On distingue alors trois cas.

1. $\operatorname{Re}(\lambda) = a > 0$, les orbites sont des spirales logarithmiques qui s'en vont à l'infini
2. $\operatorname{Re}(\lambda) = a < 0$ les orbites sont des spirales logarithmiques qui tendent vers 0.
3. $\operatorname{Re}(\lambda) = a = 0$ les orbites sont des cercles centrés en 0

Par ailleurs, le signe de b détermine le sens de la rotation des orbites autour de l'origine.

Le cas 1 s'appelle un foyer instable. Le cas 2 un foyer stable : il suffit de renverser le sens des orbites. le cas 3 s'appelle un centre.



Foyer instable. Exemple la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 2 + i$

Cas 2. Deux valeurs propres réelles $\lambda_1 \geq \lambda_2$, et a est diagonalisable. on a encore 3 cas principaux.

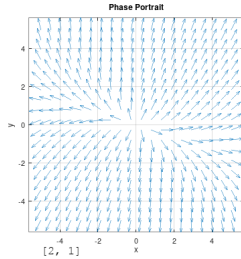
- $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$: il s'agit d'un col
- $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$: il s'agit d'un noeud instable

$\lambda_2 \leq \lambda_1 < 0$: il s'agit d'un noeud stable

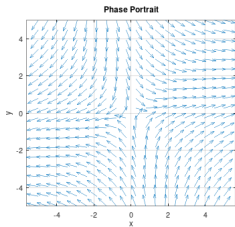
Il reste quelques cas limites.

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$. La solution est $y = c \cdot e^{-\lambda x}$

Le cas où $A = 0$ n'est pas passionnant.



Noeud instable. Exemple la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \geq \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} > 0$



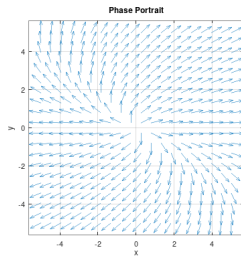
Col . Exemple la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = \sqrt{5}, \lambda_2 = -\sqrt{5}$

Cas 3. Deux valeurs propres réelles confondues $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, et A n'est pas diagonalisable.

Le dernier cas, $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \text{Id} + N$ avec $N^2 = 0$ et donc

$$\exp(tA) = \exp t\lambda (\text{Id} + tN) = \exp t\lambda \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou bien $x = x_0 e^{t\lambda} + y_0 t e^{t\lambda}, y = y_0 e^{t\lambda}$



Matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.3.6. Equation linéaire d'ordre n à coefficients constants.

C'est l'équation : $x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = 0$,

Où on cherche une solution $x(t)$ qui est une fonction réelle du temps.

DÉFINITION 2.3.2. *Le polynôme $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 = P(X)$ est appelé polynôme caractéristique de l'équation différentielle d'ordre n à coefficients constants $x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = 0$*

On rappelle que l'astuce est de poser $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{[n-1]} \end{pmatrix}$ et de remarquer que cette équation est équivalente à $\frac{dX}{dt} = A.X$, ou A est la matrice compagnon du polynôme P .

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ -a_0 & -a_1 & & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On a donc comme cas particulier du théorème fondamental

THÉORÈME 2.3.7. *L'ensemble E des solutions de l'équation différentielle à coefficients constants est un espace vectoriel de dimension n . L'application $E \rightarrow \mathbb{K}^n$ qui à x associe $\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{[n-1]} \end{pmatrix}(t_0)$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.*

On verra en exercice une autre démonstration de ce résultat, comme résultat d'algèbre linéaire sur l'espace vectoriel des quasi-polynômes.

On peut le reformuler en un théorème.

THÉORÈME 2.3.8. *Pour toute donnée initiale x_0, x_1, \dots, x_{n-1} il existe une unique solution de l'équation différentielle $x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0$ telle que $x(0) = x_0, x'(0) = x_1, \dots, x^{[n-1]}(0) = x_{n-1}$*

On est donc amené à calculer le polynôme caractéristique de la matrice compagnon de C_P .

THÉORÈME 2.3.9. *Le polynôme caractéristique de la matrice compagnon de P est P c'est aussi son polynôme minimal.*

Démonstration. On commence par le cas des polynômes de degré 2, et des matrices (2,2). Le polynôme caractéristique d'une matrice (2,2) M est $X^2 - \text{tr}(M)X + \det(M)$. Donc Le polynôme $P(X) = X^2 + aX + b$ est le polynôme caractéristique de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$. C'est aussi son polynôme minimal : en effet soit il a deux racines distinctes et il n'y a rien à démontrer, soit ses deux racines sont égales disons égales à λ . Dans ce second cas ce polynôme est $(X - \lambda)^2$, mais si son polynôme minimal était $X - \lambda$ la matrice serait diagonale ce qui n'est pas le cas;

* Le cas général est peu se faire d'une façon analogue, mais voici un argument plus abstrait. La matrice compagnon C_P est la transposée de la matrice de la multiplication par X dans $\mathbb{K}[X]/P$ dans la base

$(1, X, \dots, X^{n-1})$ qui est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & & -a_0 \\ 1 & 0 & & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & -a_n \end{pmatrix}$. Il en résulte que $Q(C_P)$ est la multiplication par $Q(X)$ dans

cet anneau. Si Q_1 désigne le reste de la division euclidienne de Q par P , $Q(C_P)1 = Q_1$ donc si Q annule cet endomorphisme si et seulement si P divise Q . Le polynôme minimal est donc P . et comme il est de degré n c'est son polynôme caractéristique. \square

1. Le cas complexe.

COROLLAIRE 2.3.2. *Les n fonctions (quasi-polynômes) $t^k e^{\lambda_i t}$, $k \leq \nu_i$, $1 \leq i \leq m$ forment une base de l'espace vectoriel des solutions.*

Démonstration. Ecrivant $(\frac{d}{dt} - \lambda \text{id})^\nu t^k e^{\lambda t} = 0$ si $k < \nu$, donc les fonctions sont bien des solutions de l'équation.

Par ailleurs on a vu que x est une combinaison linéaire de ces fonctions. Donc ce système est générateur. Comme il a le bon cardinal c'est une base. \square

Remarque 2.3.4. Une démonstration abstraite d'algèbre linéaire est proposée en exercice.. Elle est basée sur le fait que l'on recherche le noyau $\ker(P(D))$, où $P(D)D$ est la dérivation agissant dans l'espace vectoriel des quasi-polynômes.

2. Le cas des coefficients réels s'en déduit très facilement

Soit P un polynôme unitaire à coefficient réel. On a donc $\Pi = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\nu_i} \cdot \prod_{j=1}^l (X - \mu_j)^{\nu_j} (X - \bar{\mu}_j)^{\nu_j}$, ou les μ_j sont complexe et non réels, et les λ_j sont réels

Une solution réelle est simplement une solution complexe qui est égal à à sa conjuguée. Pour simplifier, posons $\mu_j = \alpha_j + i \cdot \beta_j$

THÉORÈME 2.3.10. Les n fonctions $t^k e^{\lambda_i t}, t^l \cos(\beta_j t) e^{\alpha_i t}, t^m \sin(\beta_j t) e^{\alpha_i t}$, avec $0 \leq k < \nu_i, 0 \leq l, m \leq \nu_j$ sont une base de l'espace vectoriel des solutions réelles de l'équation différentielle.

2.4. EQUATION LINÉAIRE AVEC SECOND MEMBRE.

2.4.1. Système linéaire à coefficients constants et second membre variable.

On considère le système $\frac{dX}{dt} = AX + B(t)$, ou $A \in \text{End}(E) = M_n(\mathbb{K})$ est une application linéaire constante et $B: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E$ une fonction continue.

La méthode de la variation de la constante marche très bien.

On cherche X sous la forme $X(t) = e^{tA} \cdot Y(t)$, alors $\frac{dX}{dt} = AX + e^{tA} Y'(t)$, et l'équation devient $\frac{dY}{dt} = e^{-tA} B(t)$, soit $Y(t) = Y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-uA} B(u) du$, avec $Y(t_0) = e^{-t_0 A} X_0$

THÉORÈME 2.4.1. La solution de l'équation différentielle avec second membre telle que $X(t_0) = X_0$ est $X(t) = X_0 + e^{tA} \int_{t_0}^t e^{-uA} B(u) du$

En pratique, il arrive très souvent qu'on ne connaisse pas e^{tA} , mais une base X_1, \dots, X_n de l'ensemble des solutions. On cherche alors des fonctions $c_i(t)$ telles que

$\sum c_i X_i$ satisfasse l'équation. En reportant, on voit que $\sum c_i' X_i = B(t)$

En considérant la matrice $R(t)$ dont le colonnes sont les X_i , on obtient

$R(t)C'(t) = B(t)$, soit $C'(t) = R(t)^{-1}B(t)$, ou si l'on veut $C'(t) = R(-t)B(t)$ et on intègre.

Remarque 2.4.1. La matrice $R(t)$ s'appelle *matrice fondamentale*.

2.4.2. Equation scalaire d'ordre n à coefficients constants et second membre

Nous avons vu que l'équation différentielle :

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = b(t)$$

est un cas particulier de (en fait se ramène à) l'équation $\frac{dX}{dt} = A \cdot X(t) + B(t)$, où A est la matrice compagnon $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}$

Donc du point de vue théorique, on peut calculer les solutions grâce à la méthode de la variation de la constante. Mais on avait vu que (au moins si on connaît les racines du polynôme caractéristique), l'équation est plus facile à résoudre puisqu'on a une base des solutions qui sont les $(t^k e^{\lambda_i t})_{k < \nu_i}$, ou les λ_i sont les racines du polynômes caractéristique et les ν_i -leur multiplicités. On connaît donc une matrice fondamentale.

On pourrait espérer que la méthode de la variation de la constante soit plus simple. Malheureusement, il faut se ramener à la forme matricielle pour bien l'écrire.

On considère donc notre base de l'ensemble des solutions y_1, \dots, y_n . On pose $Y_i(t) = \begin{pmatrix} y_i \\ y_i' \\ \vdots \\ y_i^{[n-1]} \end{pmatrix}$ et on cherche des fonctions c_1, \dots, c_n telle que $\sum_{i=1}^n c_i(t) Y_i(t) = X(t)$ soit une solution. de l'équation $X' = AX + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}$

Soit $\Phi(t)$ la matrice dont les colonnes sont les Y_i et $C(t)$ la matrice $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

Notre équation devient $X = \Phi \cdot C$, donc $X' = \Phi' C + \Phi C' = A \Phi C + \Phi C' = AX + \Phi C'$

On a alors $X' = AX + B$

Et on est ramené à $C' = \Phi^{-1} \cdot B$, qui en principe peut s'intégrer.

2.4.3. Exemple : l'équation $x'' + ax' + bx = c(t)$

On a vu qu'il est facile de trouver une base de l'ensemble des solutions. Au moins si les deux racines de l'équation $x^2 + ax + b$ sont distinctes, disons λ et μ , on peut prendre $x_1(t) = e^{\lambda t}$, $x_2(t) = e^{\mu t}$.

On écrit alors $X_1(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ \lambda e^{\lambda t} \end{pmatrix}$, $X_2(t) = \begin{pmatrix} e^{\mu t} \\ \mu e^{\mu t} \end{pmatrix}$, et on cherche deux fonctions, $c_i(t)$ telles que $X = c_1 X_1 + c_2 X_2 = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & e^{\mu t} \\ \lambda e^{\lambda t} & \mu e^{\mu t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ satisfasse $X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$.

Soit on utilise directement la formule $C' = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & e^{\mu t} \\ \lambda e^{\lambda t} & \mu e^{\mu t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu - \lambda} \begin{pmatrix} \mu e^{\mu t} & -e^{\mu t} \\ -\lambda e^{\lambda t} & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$.

On voit qu'en fait : $C' = \frac{c(t)}{\mu - \lambda} \begin{pmatrix} -e^{\mu t} \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix}$.

On est ainsi ramené à calculer deux primitives de la forme $\int c(t) e^{\alpha t} dt$ avec $\alpha = \lambda, \mu$.

2.4.4. Cas particulier ou le second membre est un quasi-polynôme de la forme $q(t)e^{rt}$

Si le second membre de $x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = b(t)$ est de la forme $t^d e^{rt}$, ou plus généralement $q(t) = \sum_{i=1}^k p_i(t) e^{r_i t}$, ou les p_i sont des polynômes^{2.4.1}, il y a une méthode très simple pour trouver une solution particulière.

THÉORÈME 2.4.2. *Si le second membre est de la forme $t^d e^{rt}$, il existe une solution particulière de la forme $z(t) = e^{rt} p(t)$, où p est un polynôme de degré d si r n'est pas une racine du polynôme caractéristique de l'équation sans second membre, ou bien de degré $d + \nu$ si r est une racine d'ordre ν de ce polynôme.*

Par le principe de superposition, on en déduit donc.

THÉORÈME 2.4.3. *Si le second membre est de la forme $\sum_{i=1}^k e^{r_i t} q_i(t)$, où q_i est un polynôme de degré d_i , il existe une solution particulière de la forme $z(t) = \sum_{i=1}^k e^{r_i t} p_i(t)$, où p_i est un polynôme de degré d_i si r_i n'est pas racine du polynôme caractéristique, et de degré $d_i + \nu_i$ si r_i est une racine d'ordre ν_i du polynôme caractéristique.*

Démonstration. On démontre juste le premier de ces deux résultats. Soit E_k l'espace vectoriel des fonctions de la forme $e^{rt} q(t)$, où q est un polynôme de degré $d + \nu$, ramené à sa base naturelle $(1, t, \dots, t^{d+\nu}) \cdot e^{rt}$, notée $e_1, \dots, e_{d+\nu}$. Dans cette base la matrice de d est la matrice de Jordan :

^{2.4.1.} Ainsi $q(t)$ est un quasi-polynôme.

$$\begin{pmatrix} r & 1 & & & \\ & r & 2 & & \\ & & r & & \\ & & & d+\nu-1 & \\ & & & & r \end{pmatrix} = \lambda \text{Id} + N, \text{ avec } N^{d+\nu} = 0$$

Soit D l'opérateur de dérivation de E . Notre propos est de résoudre $P(D)u = v$, ou v est un vecteur de l'espace engendré par e_1, \dots, e_d . On note que si λ n'est pas une racine de P la matrice est inversible, ce qui prouve 1. Si λ est racine de P d'ordre ν , $P = (X - \lambda \text{Id})^\nu Q$, et $Q(D)$ est inversible $(D - \lambda \text{Id})^\nu = N^\nu$ et P ont même image. On remarque que $N \langle e_1, \dots, e_{n+\nu} \rangle = \langle e_1, \dots, e_{n+\nu-1} \rangle$, il en résulte que $N^\nu \langle e_1, \dots, e_{n+\nu} \rangle = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$, et donc l'image de $P(D)$ contient bien $\langle e_1, \dots, e_d \rangle$.

□

2.4.5. Le cas particulier du degré 2.

On résume ici l'étude de ce cas particulier.

On étudie une équation différentielle de degré 2 dont le second membre est un quasi polynôme.

$$x'' + ax' + bx = \sum_{i=1}^k q_i(t) e^{\lambda_i t}.$$

1. On forme le polynôme caractéristique $P(X) = X^2 + aX + b$.
 - a) Si ses deux racines λ, μ sont distinctes, $e^{\lambda t}, e^{\mu t}$ est une base de l'espace de l'équation homogène.
 - b) Si elles sont confondues $e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}$ est une base de l'équation homogène.
2. Pour trouver une solution particulière, on cherche pour chaque terme $q_j(t) e^{\lambda_i t}$ une solution x_j de l'équation $x'' + ax' + bx = q_j(t) e^{\lambda_i t}$ alors $x_j(t)$ sera une solution particulière de notre équation, et on distingue trois cas :
 - a) $\lambda_i \notin \{\lambda, \mu\}$ n'est pas racine du polynôme caractéristique, et dans ce cas, alors il existe une solution de la forme $p_j(t) e^{\lambda_i t}$, où p est de même degré que q_i
 - b) $\lambda_i \in \{\lambda, \mu\}$ est une racine simple du polynôme caractéristique, alors il existe une solution de la forme $p_j(t) e^{\lambda_i t}$, où p_i est degré $\deg(q_i) + 1$
 - c) λ_i est une racine double du polynôme caractéristique, alors il existe une solution de la forme $p_j(t) e^{\lambda_i t}$, où p_i est degré $\deg(q_i) + 2$.

2.4.6. Battements et résonance : l'oscillateur harmonique forcé.

Le théorème général vu au paragraphe précédent est très important dans le cas d'une équation de degré 2 dont le second membre est de la forme $a \cos(\omega t + \varphi)$ (ou bien $a e^{i\omega t}$).

L'équation différentielle modélise alors un oscillateur harmonique forcé.

Il y a plusieurs phénomènes physiques décrit par cette équation. Les plus connus sont les circuits électriques dit circuits L, R, C , ou alors les systèmes périodiques (ressort par exemple) que l'on amplifie par une force d'excitation. ^{2.4.2}

Circuit L, R, C . En gros, on a un circuit électrique composé d'une résistance, d'un condensateur, et d'une bobine mis bout à bout. On met au borne du circuit un courant électrique de fréquence connue qui maintient une différence de potentiel $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$ (par exemple $E_0 = 220 \text{ V}$, $\omega = 50 \text{ Hz}$, pour du courant vendu par EDF), et on mesure l'intensité du courant qui passe. Si q désigne la charge de l'armature de l'entrée du condensateur, on a :

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

^{2.4.2.} Le lecteur intéressé par des applications à la physique peut lire les chapitre 21-22-23-24 du livre Mécanique 1 de Feynman.

Un autre exemple vient de la mécanique. On gros, on a un solide qui glisse sur une barre horizontale et qui est fixé par un ressort a une borne. A l'aide d'un électro-aimant on exerce une force sur ce solide de la forme $F \cos(\omega t)$. La constante de raideur du ressort est ρ , et les forces de frottements (petites) sont proportionnelles à la vitesse $-\lambda \frac{dx}{dt}$. Si il n'y a pas de frottement, il n'y a pas de perte d'énergie, sinon ça chauffe. Les équations sont donc :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + \rho x = F \cos(\omega t)$$

m est la masse de l'objet

λ le coefficient de frottement (viscosité)

ρ la constante de raideur du ressort

ω la fréquence de la force d'excitation, F son amplitude

Dans les deux cas, on la ramène le tout à l'équation

$$x'' + kx' + \nu^2 x = \gamma_0 \cos(\omega t)$$

dans le cas mécanique, $k = \frac{\lambda}{m} > 0, \nu^2 = \frac{\rho}{m} \neq 0$,

ν est la fréquence propre du système, $\gamma_0 = \frac{F}{m}$.

Électricité	Mécanique	Abstrait	
q = charge électrique	x = distance ou longueur	x	
L = inductance de la bobine	m = masse	1	n
R = résistance	λ = viscosité	k	
C = capacité	ρ = constante de raideur	ν fréquence propre	

L'équation caractéristique est $X^2 + kX + \nu^2 = 0$. La somme des valeurs propres $-k$ est ≤ 0 et leur produit est positif. On a donc soit deux valeurs propres réelles négatives, soit deux valeurs propre complexes conjuguées dont la partie réelle est < 0 . Il y a toujours amortissement du système libre ($F = 0$) sauf si les deux valeurs propres sont imaginaires pure, c'est à dire si $k = 0$. C'est normal, si il n'y a pas de frottement il n'y a pas de raison que le système libre s'arrête.

Pour se simplifier la vie, on étudie l'équation complexe:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + k \frac{dz}{dt} + \nu^2 z = \gamma_0 e^{i\omega t}$$

et on prendra la partie réelle de la solution.

1. Il y a des frottements ($k > 0$).

On cherche une solution particulière sous la forme $z(t) = ce^{i\omega t}$, il vient $(-\nu^2 + i\nu k + \omega^2)c = \gamma_0$, soit $c = \frac{\gamma_0}{\omega^2 - \nu^2 + i k \nu}$

On revient à la partie réelle.

La fonction $x(t) = \text{Re}\left(\frac{\gamma_0}{\omega^2 - \nu^2 + i k \nu} e^{i\omega t}\right)$ est une solution particulière de :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + \nu^2 x = \gamma_0 \cos(\omega t)$$

Ainsi la solution générale est somme de deux termes : $x(t) = x_1(t) + \text{Re}\left(\frac{\gamma_0}{\omega^2 - \nu^2 + i k \nu} e^{i\omega t}\right)$

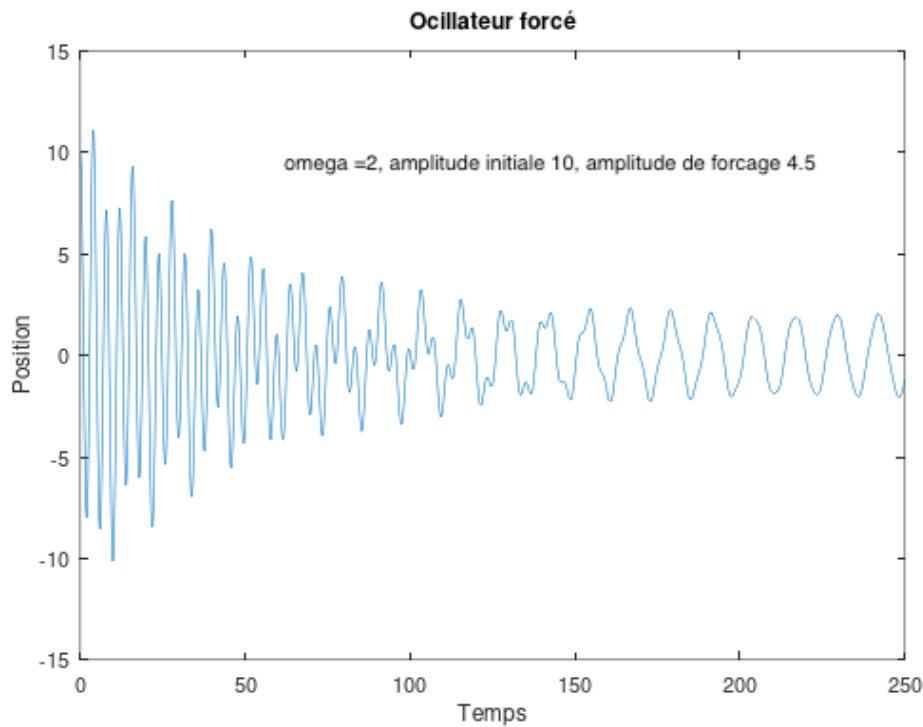
Le premier terme n'a pas une si grande importance : par hypothèse il y a une décroissance exponentielle, donc au bout d'un certain temps, il disparaît.

On dit que le régime stationnaire est une *oscillation forcée* d'amplitude :

$$\left| \frac{\gamma_0}{\omega^2 - \nu^2 + i k \nu} \right| = \gamma_0 \sqrt{((\omega^2 - \nu^2)^2 + k^2 \nu^2)^{-1}}$$

et de phase $\omega t - \arctan \frac{\omega^2 - \nu^2}{k \nu} = \omega t - \nu_0$.

Notons que $\nu_0 = \arctan \frac{\omega^2 - \nu^2}{k \nu} [0, \pi]$: ce nombre s'appelle le décalage de phase.



PROPOSITION 2.4.1. *Le régime stationnaire a la même fréquence que la force d'excitation. Mais elle a un retard de phase de $\nu_0 = \arctan \frac{\omega^2 - \nu^2}{k\nu}$. Son amplitude est celle de la force d'excitation multipliée par $\sqrt{((\omega^2 - \nu^2)^2 + k^2\nu^2)^{-1}}$*

On voit déjà que si ω est très proche de ν et qu'il n'y a pas beaucoup de frottement ($k\nu \ll 1$), le régime a une grande amplitude, bien supérieure à celle de la force d'excitation. Nous allons regarder en fait le cas limite sans frottement $k = 0$.

Remarque 2.4.2. Le décalage de phase entre l'oscillation forcée et la force oscillante joue un rôle important en physique. Ce décalage permet par exemple d'expliquer l'origine de l'indice de réfraction. Quand la lumière traverse un objet on a l'impression qu'elle ralentit. Pour les détails voir Feynman, Mécanique tome 2, chapitre 31.

2. Il n'y a pas de frottements ($k = 0$).

Il y a deux cas à considérer.

1. Battements : $\omega \neq \nu$.

L'équation est donc $x'' + \nu^2 x = \gamma_0 \cos(\omega t)$. La solution de l'équation sans second membre est $\rho \cos(\nu t + \varphi)$.

La solution particulière trouvée par la méthode de 1 est $\text{Re}\left(\frac{\gamma_0}{\omega^2 - \nu^2 + ik\nu} e^{i\omega t}\right) = \frac{\gamma_0}{\omega^2 - \nu^2} \cos(\omega t)$.

La solution générale est $x(t) = \rho \cos(\nu t + \varphi) + \frac{\gamma_0}{\omega^2 - \nu^2} \cos(\omega t)$.

Si $\omega \gg \nu$ ou bien $\omega \ll \nu$ on ne voit pas le second terme. Le premier est prépondérant, et tout se passe comme si on n'avait pas mis de force d'excitation.

On remarque que si ω est proche de ν apparaissent des valeurs de x très grande, bien plus grande que l'amplitude de forçage : le second terme l'emporte.

Pour étudier cette fonction, quand ω est proche de ν , on pose $a = \rho$, $A = \frac{\gamma_0}{\omega^2 - \nu^2}$ et on l'écrit :

$$x(t) = \operatorname{Re}(ae^{i\nu t + \varphi} + Ae^{i\omega t}) = \operatorname{Re}\left(Ae^{i\omega t}\left(1 + \frac{a}{A}e^{i(\nu - \omega)t + \varphi}\right)\right)$$

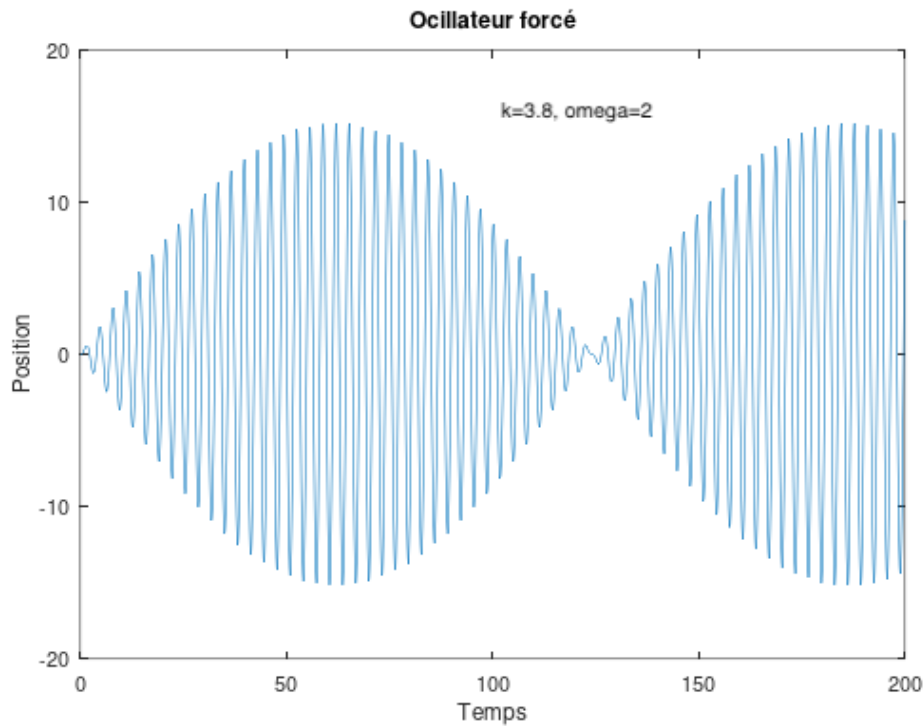
On a une onde $Ae^{i\omega t}$, dont l'amplitude est modulée par la fonction $\left(1 + \frac{a}{A}e^{i(\nu - \omega)t + \varphi}\right)$.

Notons que si $\frac{a}{A}$ est petit, le module de $\left(1 + \frac{a}{A}e^{i(\nu - \omega)t + \varphi}\right)$ est proche de 1, mais son argument varie entre 0 et 2π à la fréquence $\frac{\nu - \omega}{2\pi}$ (très lente). On dit qu'il y a battement :

PROPOSITION 2.4.2. *L'amplitude de $x(t)$ varie périodiquement entre $\frac{\gamma_0}{\omega^2 - \nu^2} + \rho$ et $-\frac{\gamma_0}{\omega^2 - \nu^2} - \rho$ à la fréquence $\frac{\nu - \omega}{2\pi}$, lente devant la fréquence ω de l'oscillation.*

Pour des fréquences proches de ce nombre, la partie réelle de $Ae^{i\omega t}$ est nulle et l'amplitude de $x(t)$ devient petite. Cela permet de dessiner $x(t)$.

Si ω est proche de ν , le second membre se met à osciller de façon très importante entre $\pm \frac{\gamma_0}{\omega^2 - \omega_0^2}$.



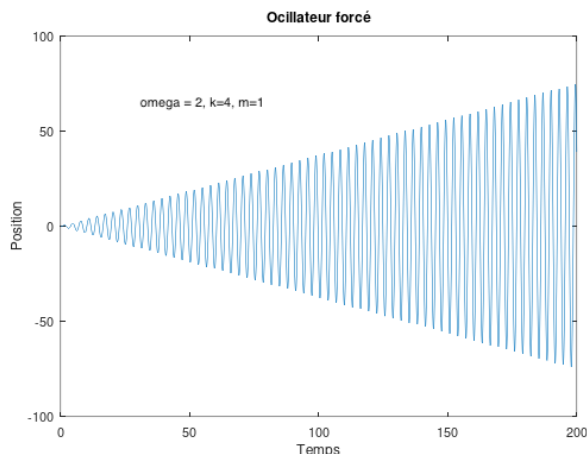
Remarque 2.4.3. En musique, le battement est audible lorsque deux cordes vibrent à des fréquences dont la différence est entre 0,5 et 5 hertz environ. Par exemple si on mélange un La 440 et La 441 on va entendre des battements à la fréquence de 1Hz.

2. Résonance : $\omega = \nu$.

Une solution particulière est $x(t) = \operatorname{Re}\left(\gamma_0 \frac{t}{2\omega} e^{i\omega t}\right) = \gamma_0 \frac{t}{2\omega} \cos(\omega t)$, la solution générale

$$x(t) = \rho \cos(\omega t + \varphi) + \gamma_0 \frac{t}{2\omega} \cos(\omega t)$$

On voit que l'amplitude de la solution tend linéairement vers l'infini : on dit qu'il y a résonance.



2.5. COEFFICIENTS VARIABLES : MATRICE FONDAMENTALE, ET WRONSKIEN.

Dans ce paragraphe, on étudie une EDO linéaire, mais à coefficients variables.

On a donc un espace vectoriel E défini sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , souvent \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n , un intervalle de $I \subset \mathbb{R}$ et deux fonctions $A: I \rightarrow L(E)$, $B: I \rightarrow E$ et on étudie l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{dX}{dt} = A(t)X + B(t)}$$

La différence avec les coefficients constants c'est qu'on a pas, en général, de solution explicite de l'équation (avec ou sans second membre), et donc le cours sera plus théorique, même si les résultats sont comparables.

2.5.1. Equation sans second membre : la matrice fondamentale.

Nous noterons \mathcal{E} l'espace vectoriel des solutions de l'équation sans second membre.

Rappelons que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sans second membre (quand on fait $B \equiv 0$) est un espace vectoriel isomorphe à E . Plus précisément

PROPOSITION 2.5.1. *Pour tout t dans I , l'application $\mathcal{E} \rightarrow E$ qui à la solution X associe sa valeur à l'instant t est un isomorphisme.*

Il est commode d'introduire la notion de matrice fondamentale.

DÉFINITION 2.5.1. *On suppose que $E = \mathbb{K}^n$, et on suppose connue une base X_1, \dots, X_n de l'ensemble des solutions. La matrice fondamentale est l'application $\Phi: I \rightarrow M_n(\mathbb{K})$, où $\Phi(t)$ est la matrice dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des solutions X_i .*

Parmi les exemples importants, nous nous rappelons que l'ED scalaire d'ordre 2

$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ se ramène à une équation différentielle linéaire en deux variables en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$.

Ainsi, si x_1 et x_2 sont deux solutions indépendantes, la matrice fondamentale est :

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix}$$

Remarque 2.5.1. Cette matrice dépend du choix d'un système fondamental de solutions.

PROPOSITION 2.5.2. *Soit X une solution, et C_0 la matrice des coordonnées de $X(t_0)$ dans la base X_1, \dots, X_n , $X = \sum c_i X_i = \Phi \cdot C_0$*

Il est utile de constater que la matrice fondamentale satisfait aussi une équation linéaire

PROPOSITION 2.5.3. $\frac{d\Phi}{dt}(t) = A(t)\Phi(t)$.

2.5.2. Equation avec second membre : variation de la constante.

On a vu au début de cours que l'espace des solutions de l'équation $\frac{dX}{dt} = A(t)X + B(t)$ est un espace affine dont l'e.v. sous-jacent est l'espace des solutions de l'équation sans second membre.

Soit Φ la matrice fondamentale de l'équation sans second membre.

On cherche une solution X sous la forme $X(t) = \Phi(t)C(t)$. On a donc à résoudre

$$\frac{dX}{dt} = \Phi'C + \Phi C' = A(t)X + B(t) \text{ or } \Phi' = A\Phi \text{ et l'équation devient}$$

$$\Phi C' = B, \text{ soit } C' = \Phi^{-1}.B \text{ que l'on peut en principe intégrer.}$$

Nous allons regarder plus en détail le cas d'une équation du second ordre.

2.5.2.1. L'équation $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$

Si on connaît deux solutions x_1, x_2 de l'équation sans second membre, la matrice fondamentale est

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix}.$$

On cherche alors la solution sous la forme $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$

Et l'équation s'écrit $\frac{dX}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$

Comme $\Phi' = A\Phi$, il vient $\Phi \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$, soit $\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \Phi^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$,

il est facile d'inverser une matrice (2, 2)

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \Phi} \begin{pmatrix} x_2' & -x_2 \\ -x_1' & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{x_1x_2' - x_2x_1'} \begin{pmatrix} -cx_2 \\ cx_1 \end{pmatrix}$$

On voit apparaître le terme $\det(\Phi) = x_1x_2' - x_2x_1'$ qui va jouer un rôle très important dans la suite.

Cette quantité s'appelle le **wronskien**.

THÉORÈME 2.5.1. *Le wronskien $w(t)$ de l'équation $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ est le déterminant de la matrice fondamentale. Il satisfait l'équation différentielle $\frac{dw}{dt} = -a(t)w(t)$*

Démonstration. On dérive $\frac{dw}{dt} = \frac{d(x_1x_2' - x_2x_1')}{dt} = x_1x_2'' - x_2x_1'' = -a(t)w(t)$ □

On va voir que cette propriété s'étend pour toute les équations différentielles linéaires.

2.5.3. Wronskien et théorème de Liouville.

Soit $\frac{dX}{dt} = A(t)X(t)$, une équation différentielle linéaire ou $A: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$ est une application continue vers les matrices (n, n) , ou bien une application continue $I \rightarrow \text{end}(E)$, où E est un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{K} .

Si X_1, \dots, X_n est une base de l'espace vectoriel des solutions, on forme la matrice fondamentale $\Phi(t)$ des coordonnées des X_i dans une base fixée de E .

DÉFINITION 2.5.2. *Le wronskien est $W(t) = \det(\Phi(t))$.*

Remarque 2.5.2. Ce wronskien dépend du choix d'une base, mais seulement à une constante près. Dans une autre base la matrice Φ serait $\Psi = \Phi.P$, où P est la matrice de passage de la première à la seconde et $\det(\Psi) = \det(\Phi)$. constante

THÉORÈME 2.5.2. *de Liouville. Le wronskien satisfait l'équation différentielle linéaire d'ordre 1.*

$$\boxed{\frac{dW}{dt} = \text{tr}(A(t))W(t)}$$

La démonstration utilise un lemme.

LEMME 2.5.1. Soit F une forme n linéaire $E^n \rightarrow \mathbb{K}$ fixée. Soit $t \in I \subset \mathbb{R} \rightarrow (X_1(t), \dots, X_n(t))$ une application dérivable. Alors $f(t) = F(X_1, \dots, X_n)$ est dérivable et $f'(t) = \sum_{i=1}^n F'(X_1, \dots, X_{i-1}, X'_i, X_{i+1}, \dots, X_n)$

Démonstration. On écrit $X_i(t_0 + h) = X_i(t_0) + h \cdot X'_i(t_0) + o(h)$ et on reporte

$$F(X_1(t), \dots, X_n(t)) = F(\dots, X_i(t_0) + X'_i(t_0)h + o(h), \dots) = F(X_1(t_0), \dots, X_n(t_0)) + h \cdot \sum_{i=1}^n F'(X_1(t_0), \dots, X_{i-1}(t_0), X'_i(t_0), X_{i+1}(t_0), \dots, X_n(t_0)) + o(h) \quad \square$$

Dans le cas particulier qui nous intéresse F est le déterminant, et on a donc

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{i=1}^n \det(X_1, \dots, X_{i-1}, X'_i, X_{i+1}, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n \det(X_1, \dots, X_{i-1}, A(t)X_i, X_{i+1}, \dots, X_n) \quad \square$$

On sait bien que le déterminant ne dépend pas de la base dans laquelle on le calcule, et ici la base que nous allons prendre est la base $(X_1, \dots, X_n)(t)$ (attention on a fixé un t pour faire le calcul). Le terme $\det(X_1, \dots, X_{i-1}, A(t)X_i, X_{i+1}, \dots, X_n)$ vaut a_{ii} , et donc on a $\frac{dW}{dt} = \text{tr}(A(t))$ \square

2.6. MÉTHODES DE RÉOLUTION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES.

2.6.1. Equation scalaire d'ordre n dont on connaît une solution : réduction de l'ordre

Comment calculer une base de l'ensemble des solutions? Mystère, et boule de gomme : sauf dans le cas des coefficients constants, il n'y a en général aucune méthode.

Cependant dans le cas des équations scalaire, si on connaît une solution, alors on peut réduire l'ordre

On considère l'équation scalaire $x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = b(t)$.

On suppose qu'on connaît une solution x_1 de l'équation sans second membre. On cherche alors les solutions sous la forme $y \cdot x_1$.

PROPOSITION 2.6.1. Soit J un intervalle sur lequel x_1 ne s'annule pas. La fonction $y \cdot x_1$ satisfait $x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = b$ si et seulement si y' satisfait une équation différentielle linéaire d'ordre $n-1$

Démonstration. On fait d'abord le cas $n=2$

$$x'' = y'' \cdot x_1 + 2y' \cdot x_1' + y \cdot x_1''$$

$$x' = y' \cdot x_1 + y \cdot x_1'$$

$$x = y \cdot x_1$$

Donc $x'' + a_1x' + a_0x = x_1(y'' + a_1y')$. L'équation devient

$$(y'' + a_1y')x_1 = b$$

En général $x^{(m)} = \sum \binom{m}{k} x_1^{[k]} y^{[m-k]} = x_1^{(m)} y + \sum_{k=0}^{m-1} a_{k,m} (y')^k$

Quand on va calculer $x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x$, il ne restera plus de terme en y . \square

Remarque 2.6.1. Le cas des coefficients constants ressemble comme une goutte d'eau au problème suivant. On cherche les racines d'un polynôme P . Si on connaît l'une d'entre elle λ , alors P est divisible par $(X - \lambda)$ et les autres racines de P sont celle de $\frac{P}{X - \lambda}$. C'est normal car les solutions de l'équation scalaire sont les $e^{\lambda t}$, ou λ est une racine du polynôme caractéristique.

2.6.2. * Séries entières : méthode de la série majorante.

Il est fréquent qu'une équation différentielle $x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0(t)x = b(t)$, ou bien $\frac{dX}{dt} = A(t)X + B(t)$ ait des coefficients a_i, b_i (ou A_i, B_i) qui soient développables en série entière au voisinage d'un point t_0 . Nous allons voir que, dans ce cas, il existe au moins une solution développable en série entière dont le rayon de convergence est supérieur ou égal au rayon de convergence des séries définissant les a_i, b_i, A_i, B_i . On sait bien que l'équation se ramène toujours la forme plus concise $\frac{dX}{dt} = A(t)X + B(t)$.

On peut même se ramener $\frac{dX}{dt} = A(t)X$, grâce à l'astuce $\tilde{X} = \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Le théorème suivant est théorique, mais il va donner une méthode « pratique » pour trouver une solution.

THÉORÈME 2.6.1. *On considère l'équation différentielle $\frac{dX}{dt} = A(t)X$, et l'on suppose que la matrice $A(t)$ est développable en série entière au voisinage de t_0 avec un rayon de convergence $R > 0$, Alors pour toute donnée initiale (t_0, X_0) il existe une unique solution développable en série entière de rayon de convergence $\geq R$.*

Démonstration. Pour simplifier, on pose $t_0 = 0$, et on développe la matrice $A(t)$ en série entière :

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k A_k, \text{ où les } A_k \text{ sont des matrices. Si on veut } A(t) = A_0 + A_1 t + \dots + A_n t^n + \dots +$$

On cherche une solution DSE, donc de la forme $X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k X_k$, les inconnues sont les X_k , et bien sûr on connaît X_0 .

$$\text{On écrit d'abord formellement } \frac{dX}{dt}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)t^k X_{k+1} = X_1 + 2tX_2 + 3t^2X_3 \dots$$

$$\text{Et } A(t).X(t) = A_0X_0 + (A_0X_1 + A_1X_0)t + \dots + (\sum_{i+j=k} A_iX_j) t^k$$

En identifiant, il vient

$$X_1 = A_0X_0$$

$$2X_2 = (A_0X_1 + A_1X_0)$$

$$(k+1)X_k = (\sum_{i+j=k} A_iX_j)$$

Ce système est déjà résolu. Si jamais notre série existe, elle est simplement donnée par la formule de récurrence :
$$X_{k+1} = \frac{\sum_{i+j=k} A_iX_j}{k+1}$$

On pose donc ça comme formule, et on va montrer que la série entière correspondante converge.

Si R est le rayon de convergence d'une série $\sum_{k=0}^{\infty} t^k A_k$ et si $0 \leq \rho < R$, on sait que la série $\|A_n\| \rho^n$ est bornée. On fixe un tel ρ . On peut donc trouver une constante c et majorer $\|A_n\|$ par $a_k = \frac{c}{\rho^n}$.

$$\text{On considère alors } m(t) = c \left(1 + \frac{t}{\rho} + \dots + \frac{t^k}{\rho^k} + \dots \right) = \frac{c}{1 - \frac{t}{\rho}}$$

$$\text{Résolvons } \frac{dx}{dt} = m(t).x, \text{ soit } \frac{dx}{x} = c \frac{dt}{1 - t/\rho}, \text{ ou } \ln|x| = -\frac{C}{\rho} d \ln \left| 1 - \frac{t}{\rho} \right|$$

La solution est $x = x_0 e^{-c \ln(1 - t/\rho)}$ qui est développable en série entière avec un rayon de convergence ρ .

$$\text{Si on la développe, on aura } x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n \text{ et } x_{k+1} = \frac{\sum_{i+j=k} a_i x_j}{k+1}.$$

Comme tous les a_k sont positifs, en prenant $x_0 = \|X_0\|$ positif, on aura tous les $x_i \geq 0$ et donc $\|X_{k+1}\| = \left\| \frac{\sum_{i+j=k} A_i X_j}{k+1} \right\| \leq \frac{\sum_{i+j=k} a_i x_j}{k+1} = x_{k+1}$

La série des $\|X_{k+1}\|$ est majorée par celle des x_k donc son rayon de convergence est au moins égal à ρ . \square

Remarque 2.6.2. Dans la pratique on a souvent à résoudre une équation $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$. Ici, les fonctions sont définies sur un intervalle I et DSE au voisinage de t_0 . Bien entendu, on ne cherche pas à la résoudre sous forme vectorielle, mais on cherche à développer x sous la forme $\sum a_n t^n$. Le théorème nous dit que les solutions (définie sur tout I) sont développables en série entière autour de t_0 , avec un rayon de convergence au moins égal au plus petit des trois rayons des séries qui définissent a, b, c .

2.7. EXERCICES DU CHAPITRE 2.

2.7.1. Généralités 1.

Exercice 2.7.1. On considère l'équation du second ordre dans \mathbb{R} .

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

On pose $z(t) = \frac{dx}{dt} + i\omega x$. Ainsi z est une fonction à valeurs dans \mathbb{C} . Quelle équation satisfait z ? Quelle équation satisfait \bar{z} .

Résoudre l'équation.

Exercice 2.7.2. Soit $\frac{dx}{dt} = A(t)x$, $x \in E$, $t \in I$ une équation diff. linéaire.

1. En utilisant le théorème d'existence et d'unicité, démontrer que si x_1, \dots, x_k est une famille de solutions, les propositions suivantes sont équivalentes :

- i. Il existe un instant t_0 de I tel que les vecteurs $x_1(t_0), \dots, x_k(t_0)$ sont linéairement indépendants (forment une famille libre).
- ii. Dans \mathcal{E} les vecteurs x_1, \dots, x_k sont indépendants.
- iii. Pour tout instant t de I , les vecteurs $x_1(t), \dots, x_k(t)$ sont linéairement indépendants.

2. Même question avec « sont une famille génératrice » à la place de famille libre.

Exercice 2.7.3. On rappelle que le barycentre d'une famille de point a_1, \dots, a_k d'un espace affine affectée des coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (avec $\sum_{1 \leq i \leq k} \lambda_i = 1$) est l'unique point b tel que pour tout point o , $\vec{ob} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{oa}_i$. Si

Soit $\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)$, une équation diff. linéaire avec second membre.

Vérifier que si $x_i(t)$ est une famille de solutions telle qu'à l'instant t_0 , $x_i(t_0) = a_i$, la fonction $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ est la solution de l'équation différentielle dont la valeur à l'instant t_0 est $\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$.

Autrement dit l'ensemble des solutions de l'équation avec second membre est un espace affine.

Exercice 2.7.4. (Equation de Ricatti)

On considère l'équation différentielle linéaire en dimension 2 :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

On considère une solution $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et on se place dans un intervalle de temps où ni x ni y ne s'annule pas.

On pose $z(t) = \frac{x}{y}$. Montre que z satisfait une équation différentielle de la forme $z'(t) = q_2(t)z^2 + q_1(t)z + q_0(t)$.

Réciproquement, si on a une équation différentielle de la forme (R) $z'(t) = q_2(t)z^2 + q_1(t)z + q_0(t)$, construire une équation différentielle linéaire (L) telle que les solutions de (R) soient précisément les quotients de deux solutions de (L)

* Soit E un espace vectoriel de dimension n , I un intervalle de \mathbb{R} . On se donne trois applications continues Q, A, B de I à valeurs dans les matrices symétriques (n, n) , les matrices (n, n) et le vecteur colonnes. Expliquer pourquoi l'équation de Ricatti $\frac{dz_i}{dt} = \sum_j q_{ij}(t)z_i z_j + \sum_j a_{ij}(t)z_j + b_i(t)$ peut se ramener à l'étude d'une équation différentielle linéaire en dimension $n+1$.

2.7.2. Dimension 1.

Exercice 2.7.5. Résoudre, en faisant « varier la constante » $\frac{dx}{dt} - 2x = 1$, $\frac{dx}{dt} + x = e^t$, $\frac{dx}{dt} + 3x = e^{it}$

Exercice 2.7.6. On, considère l'équation $L \frac{dx}{dt} + Rx = E$, où L, R, E sont trois constantes positives (circuit L, R).

Trouver la solution telle que $x(0) = I_0$ est une constante positive donnée.

Quelle est la limite de x quand $t \rightarrow +\infty$?

Exercice 2.7.7.

1. On considère l'équation $\frac{dx}{dt} + ax = b(t)$, où b est définie sur \mathbb{R} . La constante a et la fonction b sont à valeurs complexes.

On suppose que si $t \geq 0$, $|b(t)| \leq k$, et on suppose que la partie réelle $\text{Re}(a)$ de a est non nulle.

Soit $x(t)$ la solution telle que $x(0) = 0$. Démontrer que $|x(t)| \leq \frac{k}{\text{Re}(a)}(1 - e^{-\text{Re}(a)t})$

2. On considère deux équations $\frac{dx_1}{dt} + ax_1 = b_1(t)$, $\frac{dx_2}{dt} + ax_2 = b_2(t)$ ou b est définie sur \mathbb{R} , et on suppose que $|b_1(t) - b_2(t)| \leq k$. On considère des solutions, x_1, x_2 .

On suppose que $x_1(0) = x_2(0)$ démontrer que $|x_1(t) - x_2(t)| \leq \frac{k}{\text{Re}(a)}(1 - e^{-\text{Re}(a)t})$

On montre ainsi, que si $\text{Re}(a) < 0$, asymptotiquement les solutions de l'équations ne dépendent pas trop du second membre (le bruit), à condition que celui ci soit borné.

Exercice 2.7.8. Résoudre les équations suivantes.

$$\frac{dx}{dt} + \cos(t)x = \sin(2t), \text{ ici } t \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{dx}{dt} - \frac{x}{t} = t, \text{ ici } t > 0$$

$$\frac{dx}{dt} + 2\frac{x}{t} = t^3, \text{ ici } t > 0$$

Exercice 2.7.9. On considère une fonction périodique continue $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de période T .

Soit x une solution non nulle de $\frac{dx}{dt} + ax = 0$

Démontrer qu'il existe une constante C telle que $x(t+T) = C \cdot x(t)$

Démontrer que $C = \exp - \int_0^T a(u) du$

A quelle condition la fonction x est elle aussi périodique de période T ?

Exercice 2.7.10. * On considère deux fonctions périodiques continue $a, b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de période T , et b n'est pas la fonction nulle.

Soit x une solution non nulle de $\frac{dx}{dt} + ax = b$

Démontrer que s'il existe une unique solution périodique de l'équation avec second membre, il n'y a pas de solution périodique à l'équation homogène $\frac{dx}{dt} + ax = 0$.

Exercice 2.7.11. Repère de Frenet et équation intrinsèque des courbes planes.

On considère, dans le plan affine euclidien orienté, une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne (ton dit aussi longueur d'arc), et de classe C^2 ; ainsi la courbe paramétrée est une fonction de classe C^2 : $M: I \rightarrow E, M(s)$.

Démontrer que le vecteur tangent $\vec{t}(s) = \frac{dM}{ds}$ est de longueur 1.

Soit $\vec{n}(s)$ le vecteur normal tel que \vec{t}, \vec{n} soit une repère direct. On a donc en identifiant E à \mathbb{C} , $\vec{n}(s) = i\vec{t}(s)$. démontrer qu'il existe une fonction continue $\kappa(s)$ telle que :

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa(s)\vec{n} = i\kappa(s)\vec{t}$$

En déduire que la fonction $k: I \rightarrow \mathbb{R}$ détermine \vec{t} à une constante près.

Trouver la fonction $k(\sigma)$ pour un cercle.

Démontrer que si M_1 et M_2 sont deux courbes paramétrées par l'abscisse curviligne et si $\kappa_1(s) = \kappa_2(s)$, alors M_2 se déduit de M_1 par un déplacement (isométrie directe du plan affine).

2.7.3. Equation homogène à coefficients constants.

Exercice 2.7.12.

Soit I une matrice telle que $J^2 = -\text{Id}$, démontrer que $e^{tJ} = \cos(t)\text{Id} + \sin(t)J$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a\text{Id} + bJ$. En utilisant la première question démontrer que :

$$e^{tA} = e^{ta}(\cos(bt)\text{Id} + \sin(bt)J)$$

Soit U un endomorphisme d'un \mathbb{R} -ev de dimension 2 dont les deux valeurs propres sont imaginaires. Montrer que celle-ci sont conjuguées.

Soit $\lambda = a + ib$ l'une d'entre elle. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et en déduire comment calculer e^{tU} (on pourra considérer un vecteur propre e de u dans \mathbb{C}^2 , et poser $e_1 = \text{Re}(e), e_2 = \text{Im}(e)$).

Exercice 2.7.13. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer l'image du carré $|x| \leq 1; |y| \leq 1$ par $\exp A$.

Exercice 2.7.14. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, calculer B^n, C^n et en déduire $\exp tB, \exp tC$.

Exercice 2.7.15. * L'application exponentielle est définie $\exp: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C})$.

Si $H \in M_n(\mathbb{C})$ est une matrice de norme < 1 démontrer que la série $\ln(\text{Id} + H) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} H^k$ est convergente.

Montrer que si M est suffisamment proche de l'identité, par exemple $\|M\| \leq \frac{1}{10}, \|\exp M - \text{Id}\| < 1$

Soit M une matrice diagonalisable suffisamment proche de l'identité, démontrer que $\ln(\exp M) = M$

Montrer que l'ensemble des matrices telles que $\|M\| \leq \frac{1}{10}$ et $\ln(\exp M) - M = 0$ est fermé.

Montrer que dans la boule fermée $\|M\| \leq \frac{1}{10}$ l'ensemble des matrices diagonalisables est dense.

En déduire que si $\|M\| \leq \frac{1}{10} \leq \ln(\exp M) = M$

Par un argument analogue démontrer que si $\|M - \text{Id}\| \leq \frac{1}{10}, \exp(\ln(M)) = M$

Soit $f: (\mathbb{R}, +) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C}), \times$ un homomorphisme continu.

Soit $\alpha > 0$ tel que si $|t| \leq \alpha$, alors $\|f(t) - \text{Id}\| \leq \frac{1}{10}$

Démontrer que si $|t| \leq \frac{\alpha}{2}$ et si $|u| \leq \frac{\alpha}{2}$ alors $\ln f(t+u) = \ln f(t) + \ln f(u)$

Soit n_0 tel que $\frac{1}{n_0} \leq \frac{\alpha}{2}$.
 En déduire que pour tout $|t| \leq \frac{\alpha}{2} \ln f(t) = n_0 t \ln f\left(\frac{1}{n_0}\right)$ (on pourra commencer par les réels t de la forme $t = \frac{1}{n \cdot n_0}$). Et que si $|t| \leq \frac{\alpha}{2}$, $f(t) = \exp tA$, pour $A = n_0 \cdot f\left(\frac{1}{n_0}\right)$.
 Démontrer que cette formule reste vraie pour tout t dans \mathbb{R} .

Exercice 2.7.16. * Démontrer que si E est un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{C} , $A \in \text{End}(E)$ un endomorphisme, la décomposition de Dunford $A = D + N$, D diagonalisable, N nilpotente, et D et N commutent est unique. On pourra utiliser le fait que si A commute avec une matrice D' , les sous-espaces propres de D' sont stables par A .

Exercice 2.7.17. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ses valeurs propres.

Soit L_i le polynôme de Lagrange $L_i(X) = \prod_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \frac{(X - \lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j}$.

1. Montrer que : $\exp(M) = \sum_{1 \leq i \leq n} e^{\lambda_i} L_i(M) = Q(M)$, où $Q = \sum_{1 \leq i \leq n} e^{\lambda_i} L_i$

2. Montrer que si $M \in M_n(\mathbb{R})$, $Q \in \mathbb{R}[X]$

3. Si $n=2$, il existe donc deux coefficients α, β tels que $e^M = \alpha M + \beta \text{Id}$; exprimer α, β en fonction des valeurs propres de M , puis en fonction de la trace et du déterminant.

4. *Si M n'est pas diagonalisable, son polynôme minimal est de la forme $\prod_{1 \leq i \leq m} (X - \lambda_i)^{\nu_i}$. En utilisant la décomposition de Dunford, montrer comment calculer $\exp M$ avec le polynômes de Sylvester, $S_{i,k} = \frac{(X - \lambda_i)^k}{(\lambda_j - \lambda_i)^k} \prod_{1 \leq j \leq m, j \neq i} \frac{(X - \lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j}$, avec $1 \leq i \leq m, 0 \leq k \leq \nu_i - 1$

Exercice 2.7.18. *

On considère l'espace vectoriel complexe E des solutions de l'équation différentielle à coefficients constants $x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0$. On sait que $E \subset C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est un sous espace vectoriel. On considère le polynôme associé $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_n$. On sait que $\dim(E) = n$.

Soit D l'opérateur de dérivation $x \rightarrow \frac{d}{dt}x$. Démontrer que E est stable par D .

Montrer que $E = \ker(P(D))$, et que P est le polynôme minimal de la restriction \bar{D} de D à E

On écrit P comme produit $P = \prod (X - \lambda_i)^{\nu_i}$

Soit $E_i = \ker(D - \lambda_i)^{\nu_i}$.

Montrer que E_i est l'espace vectoriel des fonctions de la forme $p(t)e^{\lambda_i t}$, où p est un polynôme de degré $\deg(p) \leq \nu_i - 1$.

Retrouver le théorème qui décrit toutes les solutions de l'équation.

Exercice 2.7.19. Résoudre.

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = 0, x(0) = 0, \frac{dx}{dt}(0) = 1$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (4i + 1)\frac{dx}{dt} + x = 0, x(0) = 0, \frac{dx}{dt}(0) = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (3i - 1)\frac{dx}{dt} - 3ix = 0, x(0) = 2, \frac{dx}{dt}(0) = 1$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (4 + 2i)\frac{dx}{dt} + (3 + 4i)x = 0, x(0) = \alpha, \frac{dx}{dt}(0) = \beta$$

2.7.4. Equation à coefficients constants avec second membre.

Exercice 2.7.20. Particule dans un champ électro-magnétique.

Une particule de masse m et de charge q se promène dans un champ électro-magnétique constant. Elle subit une force qui se décompose en $\vec{F} = q \cdot \vec{E} + q\vec{V} \wedge \vec{B}$. L'équation de Newton s'écrit $q \cdot \vec{E} + q \cdot \vec{V} \wedge \vec{B} = m \frac{d}{dt} \vec{V}$.

On se place dans un système de coordonnées où $\frac{\vec{B}}{m} = \omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et on pose $\vec{P} = m\vec{V}$ de sorte que l'équation est $\frac{d\vec{P}}{dt} = \omega \vec{P} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C$, où $C = \frac{q}{m} \cdot \vec{E}$ est un vecteur constant.

Ecrire l'équation sans second membre, et la résoudre. (indication quelle est la matrice de l'application linéaire

$\vec{P} \rightarrow \omega \vec{P} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, quelle est son exponentielle ?

Résoudre l'équation avec second membre par la méthode de la variation de la constante.

La position $X(t)$ satisfait $\frac{dX}{dt} = \vec{V} = \frac{1}{m} \cdot \vec{P}$, décrire $X(t)$.

Exercice 2.7.21. Un projectile sort d'un canon qui tire avec un angle α par rapport à l'horizontale. Il subit donc deux forces : la pesanteur $m\vec{g}$ et le frottement de l'air (proportionnel à la vitesse $-k\vec{v}$). On se place dans le cas où le projectile ne va ni très haut ni très loin (ce n'est pas un missile intercontinental), de sorte que \vec{g} est constant.

1. Écrire l'équation différentielle satisfaite par la vitesse de ce projectile.

2. Soit $\vec{w}(t) = \vec{g} \wedge \vec{v}$. Écrire l'équation différentielle satisfaite par $\vec{w}(t)$, et en déduire qu'à tout instant le projectile reste dans le plan perpendiculaire à $\vec{w}(t_0)$ passant par la position initiale.

3. On se place donc dans le plan en question rapporté à un repère orthonormé intelligent. Le vecteur \vec{g} est $-g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, la vitesse initiale est $v_0 \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$, et le point initial est $\begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \end{pmatrix}$. Intégrer l'équation.

Exercice 2.7.22. Résoudre

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = |t|$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = |t|$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = te^{3t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = te^{i\omega t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = 2 + \sin(t)$$

Quelle est la solution de l'équation $\frac{d^2x}{dt^2} + x = b(t)$ qui s'annule ainsi que sa dérivée pour $t=0$

Exercice 2.7.23. * Un ressort exerce une force de rappel proportionnelle à sa longueur.

1. Écrire l'équation différentielle qui décrit le mouvement d'un petit objet accroché au bout d'un ressort accroché au plafond. On suppose que sa vitesse initiale est verticale vers le bas, par exemple, et que l'air n'exerce pas de frottement.

2. Même problème si on suppose que, maintenant, que le point d'attache du ressort accomplit un mouvement oscillatoire $a(t) = a_0 \sin \omega t$. Ici a_0 est petit devant la longueur du ressort, et à l'instant initial, l'objet est au repos.

La valeur $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ joue un rôle spécial. Lequel ?

3. Maintenant on accroche le ressort au plafond d'un ascenseur, et on suppose qu'au départ, il est fixe. Soit $v(t)$ la vitesse verticale de l'ascenseur, de sorte que maintenant on a l'équation

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx - m \frac{dv(t)}{dt}$$

On suppose que $v(t) = \gamma t$ pour $t \in [0, t_0]$ puis $v = \gamma t_0$ pour $t \in [t_0, t_1]$ et $v(t) = 0$ si $t > t_1$. Quand l'ascenseur s'arrête, quelle est l'amplitude du mouvement du ressort ?

2.7.5. Coefficients variables.

Exercice 2.7.24.

1. Soient x_1, x_2 deux fonctions de classe C^2 sur l'intervalle I . On suppose qu'en tout point $w(t) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} \neq 0$ démontrer qu'il existe une équation différentielle $x'' + ax' + bx$ dont x_1, x_2 est une base de l'ensemble des solutions.

2. Dire si les systèmes suivants sont indépendants (et le cas échéant sur quel intervalle) :
 $t, t+1$; t, t^2 ; e^t, t^2 ,

4. Former une équation différentielle linéaire homogène dont on connaît un système fondamental de solutions. $(\sin(t), \cos(t))$; (e^t, te^t) ; (t, t^2) .

Exercice 2.7.25. Trouver les solutions de l'équation *sans second membre* puis résoudre l'équation avec second membre :

$$t^2 x'' - tx' = 3t^3 \text{ si } t > 0$$

Exercice 2.7.26. Soit a une fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle $x'' + a(t)x = 0$ et deux solutions x_1, x_2 .

Montrer que les 0 de x_1 sont des points isolés. On pourra raisonner par l'absurde et montrer que si t_0 est un point où $x(t_0) = 0$, est n'est pas un zéro isolé de la fonction x , alors $x'(t_0) = 0$.

Quelle est l'équation différentielle satisfaite par le wronskien $w(t) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix}$?

Montrer qu'entre deux zéros de x_1 il y a un zéro de x_2

Exercice 2.7.27. * Soit a, b deux fonctions continues sur $I \subset \mathbb{R}$. On considère les équations différentielles $x'' + a(t)x = 0$, $x'' + b(t)x = 0$ et deux solutions x_1, x_2 de la première et la seconde équation. On suppose que $b > a$.

Quelle est l'équation différentielle satisfaite par le wronskien $w(t) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix}$?
 Montrer qu'entre deux zéros de x_1 il y a un zéro de x_2

En étudiant l'équation $x'' + \omega^2 x = 0$, montrer que toute solution de l'équation $x'' + tx = 0$ à une infinité de zéro sur $[1, +\infty[$. montrer qu'on peut ranger ces zéros en une suite croissante $t_1 < t_2 < t_3 \dots$ telle que $t_n \rightarrow \infty$ et $t_{n+1} - t_n \rightarrow 0$

Exercice 2.7.28. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $A = I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ une application continue.

On suppose que pour tout t , la matrice $A(t)$ est antisymétrique. Soit $X(t)$ une solution de $\frac{dX}{dt} = A(t) \cdot X(t)$. Démontrer que la fonction $\|X(t)\|^2 = \langle X(t), X(t) \rangle$ est constante. Soit Y une autre solution. montrer que la fonction $\langle X(t), Y(t) \rangle$ reste constante.

Soient (X_1, \dots, X_n) la solution fondamentale telle que $(X_i(0))$ soit un repère orthonormé. Montrer que pour tout t , $(X_1, \dots, X_n)(t)$ est un repère orthonormé, autrement dit que la solution fondamentale est orthogonale.

Exemple l'exponentielle d'une matrice antisymétrique est orthogonale.

* Réciproque ?

Exercice 2.7.29. * Soit $\Phi(t)$ une solution fondamentale de l'équation différentielle linéaire $\frac{dX}{dt} = A(t) \cdot X(t)$. La matrice $R(t, s) = \Phi(t) \cdot \Phi(s)^{-1}$ appelle résolvante du système, ou monodromie de l'équation. Montrer que :

1. $R(t, s)$ ne dépend pas du choix de la solution fondamentale.
2. $R(t, u) = R(t, s) \cdot R(s, u)$, et en particulier $R(t, s) = R(s, t)^{-1}$ dont $P(t)$
3. $\frac{\partial R(t, u)}{\partial t} = A(t) \cdot R(t, u)$, $\frac{\partial R(t, u)}{\partial u} = -R(t, u) \cdot A(u)$

Exercice 2.7.30. Soit $X(t)$ une solution de l'équation différentielle linéaire $\frac{dX}{dt} = A(t) \cdot X(t)$, et $t \rightarrow P(t)$ une fonction à valeur dans les matrices inversibles. Trouver une équation différentielle linéaire dont $P(t) \cdot X(t)$ est solution.

2.7.6. Méthodes de résolution

Exercice 2.7.31. En utilisant la méthode de la réduction de l'ordre, résoudre les équations dont on donne une solution.

1. $t > 0, t^2 x'' - 7tx' + 15x = 0, x_1(t) = t^3$
2. $t > 0, t^2 x'' - tx' + x = 0, x_1(t) = t$
3. $0 < t < 1 (1 - t^2)x'' - 2tx' + 2x = 0$: on cherchera une solution de la forme t^α .

Exercice 2.7.32. En utilisant la méthode de la réduction de l'ordre, et la méthode de variation de la constante résoudre les équations avec second membre connaissant une solution de l'équation sans second membre.

1. $t > 0$, une solution de $t^2 x'' - 2x = 0$, est $x_1(t) = t^2$, résoudre $t^2 x'' - 2x = 2t - 1$
2. $t > 0$, une solution de $t^2 x'' - tx' + x = 0$, est $x_1(t) = t$ résoudre $t^2 x'' - tx' + x = t^n$

Exercice 2.7.33. Equations d'Euler homogène

C'est une équation linéaire dont le terme de degré k est un monôme de la forme $a_k t^k$

1. On considère l'équation : $t^2 x'' + atx' + bx = f(t)$
 Chercher une solution sous la forme posant $x = t^\alpha$.

2*. Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$.

Démontrer qu'il existe un polynôme Q tel que si $Q(\alpha) = 0$ la fonction t^α satisfait l'équation différentielle $t^n \cdot x^{[n]} + a_{n-1}t^{n-1}x^{[n-1]} + \dots + a_1 \cdot tx' + a_0 x = 0$

Résoudre : $x'' = \frac{2x}{t^2}$; $t^2 x'' + 3tx' + x = 0$

Exercice 2.7.34. * Chercher une solution développable en série entière

1. $x'' - tx' + x = 0$
2. $(1 - t^2)x'' - 2tx' + \alpha(\alpha + 1)x = 0$. Montrer qu'il y a une solution polynomiale..

Exercice 2.7.35. * Equations d'Euler non homogène

C'est une équation linéaire qui se ramène à une équation à coefficients constants grâce à un changement de variables. On se place sur l'intervalle $t > 0$

On fait le cas d'ordre 2

On considère l'équation

$$(1) (at + b)^2 x'' + a_1(at + b)x' + a_2 x = f(t)$$

On se place sur l'intervalle $t > \frac{-b}{a}$ et on pose posant $at + b = e^s$,

1. Vérifier que

$$\frac{dx}{ds} = a \cdot e^{-t} \cdot \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2x}{ds^2} = a^2 e^{-2t} \cdot \left(\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} \right)$$

2. Montrer que la fonction $x(s)$ satisfait une équations différentielle linéaire à coefficients constants.

3. Intégrer l'équation : $(t^2 + 1)x'' - 3(1 + t)x' + 4x = (1 + t)^3$

Problème 2.7.1. * Quasi-polynômes et équations différentielles linéaires à coefficients constant.

On veut donner une approche purement « algèbre linéaire » du théorème sur les équations différentielles à coefficients constants. On considère l'espace vectoriel \mathcal{E} des fonction C^∞ de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{C}

Un quasi-polynôme est une fonction de la forme $f(t) = \sum_{i=1}^k p_i(t)e^{\lambda_i t}$, où les p_i sont des polynômes. Nous noterons $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$, le sous espace des quasi-polynômes et $\mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}_0 \cdot e^{\lambda t} \subset \mathcal{F}$ le sous espace vectoriel des quasi-polynômes de la forme $p(t)e^{\lambda t}$.

Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ un polynôme unitaire de degré n à coefficients constant.

On veut étudier l'équation différentielle sans second membre :

$$x^{[n]} + a_{n-1}x^{[n-1]} + \dots + a_0x = 0$$

Où on cherche x dans \mathcal{E} , et on appelle E l'espace vectoriel des solutions.

On introduit l'application linéaire $D \in \text{End}(\mathcal{E})$ qui est la dérivation.

1. Montrer que $E = \ker(P(D))$

2. Rappeler pourquoi, si P est le produit de deux polynôme A et B premiers entre eux alors $\ker(A(D)) \oplus \ker(B(D)) = \ker(P(D))$

3. Dans \mathbb{C} , tout polynôme unitaire se décompose $P = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\nu_i}$, où les λ_i sont les racines distinctes de P et les ν_i leur multiplicité.

4. Montrer que $\ker(D^\nu)$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $\nu - 1$

5. Montrer que $\ker((D - \lambda \text{Id})^\nu)$ est l'espace vectoriel des quasi-polynômes de la forme $p(t)e^{\lambda t}$, où p est un polynôme de degré inférieur ou égal à $\nu - 1$.

6. En déduire que les fonction $e^{\lambda_i t} \cdot t^j$, avec $1 \leq i \leq k, 0 \leq j < \nu_i$ forment une base de l'ensemble des solutions.

7. Démontrer que les fonctions de la forme $e^{\lambda t} \cdot t^j, \lambda \in \mathbb{C}, j \in \mathbb{N}$ forment une base de \mathcal{F}

8. Soit $P = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\nu_i}$, et $Q = (X - \mu)^\nu$, de sorte que P et Q sont premier entre eux.

On considère l'espace vectoriel $\ker((P \cdot Q)(D))$. En utilisant le fait que P et Q sont premier entre eux démontrer que pour tout quasi-polynôme v de \mathcal{F}_μ , il existe un unique quasi polynôme de \mathcal{F}_μ tel que $P(D)u = v$. En déduire que l'équation différentielle

$$x^{[n]} + a_{n-1}x^{[n-1]} + \dots + a_0x = t^{\nu-1}e^{\mu t} \text{ admet une solution de la forme } p(t)e^{\mu t}.$$

9. On, écrit $P = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\nu_i}$. montrer que l'équation $x^{[n]} + a_{n-1}x^{[n-1]} + \dots + a_0x = t^{\nu-1}e^{\lambda_1 t}$ admet une solution de la forme $p(t)e^{\lambda_1 t}$, où degré de p est inférieur ou égal à ν . On pourra se ramener à étudier une équation de la forme $\frac{d^n x}{dt^\nu} = p(t)$, où p est un polynôme.

CHAPITRE 3

CHAMPS DE VECTEURS AUTONOMES, ÉQUATION $y' = f(x, y)$.

Dans ce chapitre, on va étudier les équations différentielles du point de vue géométrique. On écrira $y' = f(x, y)$, ou bien $\frac{dX}{dt} = f(X)$, X dans un ouvert de \mathbb{R}^n (en général $n=2$).

L'idée principale est qu'au lieu de chercher une fonction $y(x)$, ou $X(t)$, qui soit la solution, on cherche une courbe dans le plan des (x, y) (ou dans \mathbb{R}^n) qui décrit cette solution. Les deux cas particuliers les plus pertinents sont :

1. $y' = f(x, y)$ La solution est une fonction $y(x)$. Comme on ne la connaît pas on s'intéresse plutôt à la forme de la courbe $y(x)$, et à comprendre la famille de ces courbes quand on fait varier les conditions initiales.

2. $\frac{dX}{dt} = f(X)$, X dans un ouvert de \mathbb{R}^n (le plus souvent \mathbb{R}^2). On écrit alors $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que l'on représente par un champ de vecteur.

On remarque que le second cas est une généralisation du premier quand on fait $n=2$ $\frac{dX}{dt} = f(X)$ s'écrit $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ f(x, y) \end{pmatrix}$.

Ceci dit, on va voir que si dans le cas 2 on s'intéresse juste à l'image de la courbe solution, on peut ramener le second cas au premier :

En fait, l'équation $\frac{dx}{dt} = a(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = b(x, y)$ devient $\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}$ si on paramètre la courbe par x , et qu'on ne cherche pas à décrire la loi horaire, si la tangente est verticale, alors on la paramètre $x(y)$ et l'équation devient $\frac{dx}{dy} = \frac{a(x, y)}{b(x, y)}$.

Ainsi, si on se limite à la dimension 2, le point 1 est la même chose que le point 2 si au lieu de chercher les solutions, on cherche les courbes qui les supportent. Nous introduisons deux termes « flot d'un champ de vecteurs » et « portrait de phase » pour comprendre ce qui se passe.

3.1. FLOT D'UN CHAMP DE VECTEUR, ORBITES

DÉFINITION 3.1.1. Si X est un champ de vecteur défini sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n , et $x_0 \in \Omega$, l'orbite de x_0 est la courbe de \mathbb{R}^n que l'on peut paramétrer par la solution maximale de l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = X$, $x(0) = x_0$. On dit aussi courbe intégrale de X .

Autrement dit la solution de l'équation différentielle est une courbe paramétrée (par le temps). L'orbite d'un champ de vecteur est une courbe, mais qui n'a pas de paramétrage particulier.

Remarque 3.1.1. Cette terminologie vient de l'astronomie où on s'intéresse à l'orbite des planètes qui tournent dans le ciel en suivant une équation différentielle. A ce jour, le problème des 3 corps, qui consiste à étudier l'équation différentielle du système Soleil, Terre, Lune est toujours très mystérieux. Nous étudierons en exercice le problème des 2 corps pour vérifier la loi de Kepler qui dit que les planètes tournent autour du Soleil avec des orbites elliptiques (c'est faux, bien sûr, mais approximativement correct).

DÉFINITION 3.1.2. Le flot de X est la fonction $\varphi: W \subset \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega$, noté $\varphi(x, t)$, tel que si $x = x_0$ est fixé, $\varphi(x_0, t)$ est la solution maximale de l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = X$, $X(0) = x$

Exemple 3.1.1. Si A est une matrice et on considère l'équation $\frac{dx}{dt} = A.x$, alors $\varphi(t, x) = \exp(tA).x$

Le théorème d'unicité de la solution de l'équation différentielle permet de vérifier la proposition suivante.

PROPOSITION 3.1.1. 1. Deux orbites sont soit égales soit disjointes.

$$2. \varphi(x, t+u) = \varphi(\varphi(x, t), u).$$

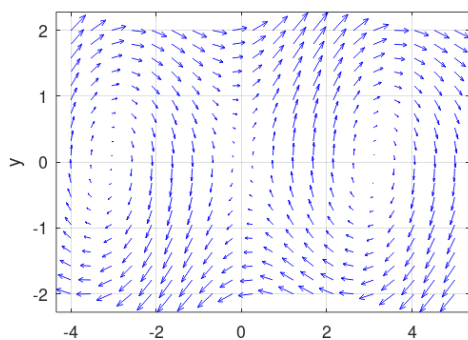
3.2. PORTRAIT DE PHASE.

On fixe un ouvert Ω de \mathbb{R}^n et une fonction $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ que l'on pense comme a un **champs de vecteurs** : en tout point de Ω on se donne un vecteur $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ qui dépend du point.

3.2.1. Portrait de phase.

Comme il s'agit d'un premier cours sur les équations différentielles, nous nous intéresserons surtout au cas où la dimension est 2. Pour comprendre de quoi il retourne, on dessine souvent « le » portrait de phase, qui est un dessin dans le plan qui permet de comprendre à quoi ressemblent les courbes intégrales. On choisit beaucoup de points dans le domaine considéré, et on dessine le vecteur $X(x, y)$ en ces points.

Par exemple on peut prendre quelques centaines de points disons (x_i, y_j) avec i, j dans $\{1, \dots, 20\}$ et dessiner le vecteur V en chacun de ces points. L'utilisation d'un logiciel est recommandé (voir en appendice un code qui permet de faire ça sans s'épuiser).



Equation différentielle $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.3\sin(y) \\ \frac{dy}{dt} = 0.2y + \sin(x) \end{cases}$ Le dessin est fait sur le domaine $[-4, 4] \times [-4, 4]$ avec une grille de 20×20 . remarquer que certaines flèches débordent de la grille initiale.

Pour dessiner un tel champs « à la main », la première chose à faire est d'identifier les points où le champs s'annule.

DÉFINITION 3.2.1. *Un point singulier, ou zéro du champs de vecteur X est un point où $X(x_0, y_0) = 0$. La solution de l'équation différentielle associée telle que $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ est évidemment constante.*

3.2.2. Dérivée d'une fonction, intégrale première.

Si $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 , rappelons que pour tout point et tout vecteur, on a $f(x_0 + t\vec{x}) = f(x_0) + t f'(x_0)\vec{v} + o(t)$, où $f'(x_0)$ est la forme linéaire $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)(x_0)$

PROPOSITION 3.2.1. *Si $X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est un champ de vecteur sur Ω , si f est une fonction, $c(t)$ est une solution de l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = X(x)$, alors $\frac{d}{dt} f(c(t)) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(c(t))$.*

NOTATION 3.2.1. On note $X.f = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ la dérivée de f selon X .

Cette fonction définie sur Ω permet d'étudier les variations de la fonction f le long des trajectoires de X .

Exemple 3.2.1. Soit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ -bx+ay \end{pmatrix}$ un champ de vecteur linéaire dans le plan, et soit $f(x, y) = x^2 + y^2$.

$$\text{On a } X.f = (ax + by)2x + (-bx + ay)2y = 2a(x^2 + y^2) = 2af$$

$$\text{On en déduit que } \frac{d}{dt}f(c(t)) = 2af(c(t)), \text{ et que } f(c(t)) = e^{af(c(0))t}.$$

Cette proposition est très utile pour étudier les courbes intégrales par exemple si $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un champ de vecteur et qu'on le représente dans le plan, $X.(x^2 + y^2) = 2xa + 2yb$ dit comment va varier le carré de la distance à l'origine le long des solutions. Un cas particulier très important est celui où la fonction ne varie pas.

DÉFINITION 3.2.2. On dit que la fonction f est une intégrale première de X si $X.f = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$.

PROPOSITION 3.2.2. Si f est une intégrale première de X , les solutions de l'équation $\frac{dx}{dt} = X$ sont contenues dans les ensembles de niveau $f = \text{cte}$ de la fonction f .

3.2.3. Opérateur différentiel associé à un champs de vecteurs.

Au champ de vecteur $X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, on associe l'opérateur différentiel $\sum_{1 \leq i \leq n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$: si f est une fonction de classe C^1 , $X.f = \langle X, df \rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

On lit « X dérivant f ». Si $x(t)$ est une solution de l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = X$, alors on peut facilement calculer la variation de la fonction $f(x(t))$: en effet

PROPOSITION 3.2.3. Si $x(t)$ est une solution de l'équation différentielle la variation de la fonction $f(x(t))$ est donnée par $\frac{d}{dt}f(x(t)) = (X.f)(x(t))$.

$$\boxed{X.f = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}}$$

Exemple 3.2.2. Si $q(x) = \langle x, x \rangle$ représente le carré de la distance à l'origine, $X.q = 2 \langle X, x \rangle = 2 \sum a_i(x)x_i$: on remarque que cette quantité ne dépend que de la composante radiale de X .

NOTATION 3.2.2. On utilise couramment la notation $X = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ pour désigner le champ de vecteur X .

Remarque 3.2.1. C'est très pratique pour calculer $X.f$. Cette notation est duale à la notation $\omega = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i dx_i$ pour les formes différentielles. En fait X n'est autre que l'application $x \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et ω l'application $(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n)$. En dimension 2, on note souvent $X = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$, $\omega = \alpha dx + \beta dy$.

Ainsi à un champ de vecteur défini sur un ouvert de $E \approx \mathbb{R}^n$ on associe deux objets apparemment très différents. Schématiquement :

Champ de vecteurs $X: \Omega \subset E \rightarrow E$ $\begin{cases} \nearrow \text{équation } \frac{dx}{dt} = X \\ \searrow \text{opérateur } f \rightarrow X.f \end{cases}$

En coordonnées

$X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\begin{cases} \nearrow \text{équation } \frac{dx_i}{dt} = a_i \\ \searrow \text{opérateur } X = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \end{cases}$

3.3. ÉCRITURE DIFFÉRENTIELLE, SÉPARATION DES VARIABLES, INTÉGRALE PREMIÈRE.

3.3.1. Courbe intégrale, trajectoire, orbite.

Soit X un champ de vecteur autonome sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Rappelons que les mots « courbe intégrale », « trajectoire », « orbite » désignent le même objet. C'est une courbe que l'on peut paramétrer par une solution de l'équation différentielle.

On se place dans les conditions d'existence et d'unicité ($f \in C^1$ par exemple). On peut reformuler sous forme géométrique.

THÉORÈME 3.3.1. *Par tout point de Ω passe une unique courbe intégrale. Si deux courbes intégrales se rencontrent en un point elle sont égales.*

C'est juste une reformulation du théorème d'existence et d'unicité.

PROPOSITION 3.3.1. *Deux champs de vecteurs partout non nuls, X, Y ont les mêmes courbes intégrales si et seulement si ils sont proportionnels, c'est à dire qu'il existe une fonction partout non nulle f telle que $Y = f.X$.*

Démonstration. A faire en exercice □

Remarque 3.3.1. Cette proposition est très utile numériquement pour dessiner les courbes intégrales. Il peut être commode (et numériquement efficace de remplacer le champ de vecteur X , par le champ normalisé $\frac{X}{\|X\|}$ qui donne en chaque point la direction de X . Ces deux champs ont les mêmes courbes intégrales, mais le fait que le second soit normalisé fait qu'elle sont plus facile à numériser. Evidemment ça marche bien loin des points où $X = 0$.

3.3.2. Ecriture différentielle.

Maintenant, on se place en dimension 2, et même dans un plan ramené à des coordonnées (x, y) .

Au lieu d'écrire $y' = f(x, y)$, on écrit plutôt :

$$\boxed{dy - f(x, y) dx = 0}$$

La signification est la suivante. Si $c: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une courbe intégrale de l'équation différentielle, et si c paramétrée $c(t) = (x(t), y(t))$, alors on a $\frac{dy}{dt} = f(x, y) \frac{dx}{dt}$: en effet $\frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$.

DÉFINITION 3.3.1. *si $\omega = adx + bdy$ est une forme différentielle, une courbe intégrale de ω est une courbe paramétrée telle qu'en tout point la droite tangente soit dans le noyau de ω . Cette tangente est donc dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$*

On se place au voisinage d'un point où $b \neq 0$, la courbe n'est pas verticale, et localement on peut donc la paramétrer comme fonction $y(x)$.

Convention 3.3.1. Quand on écrit $\omega = 0$, on veut dire qu'on cherche les courbes intégrales de ω . On ne cherche pas des courbes paramétrées (des solutions) mais des objets géométriques (les trajectoires (=orbites) d'un champ de vecteurs qui dirige $\ker(\omega)$).

Si $\omega = adx + bdy$. Résoudre $\omega = 0$, c'est chercher une famille de courbes (non paramétrée). Mais on peut décrire les solutions on peut chercher une courbe paramétrée par x , et alors on étudie l'équation $\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b}$, ou alors une courbe paramétrée par y par écrit $\frac{dx}{dy} = -\frac{b}{a}$, on peut aussi résoudre l'équation différentielle $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = b(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = -a(x, y) \end{cases}$.

PROPOSITION 3.3.2. *On suppose $b \neq 0$, une courbe intégrale de ω paramétrée par x satisfait l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b}$. De même, si $a \neq 0$ et si elle est paramétrée par y , elle satisfait $\frac{dx}{dy} = -\frac{b}{a}$*

PROPOSITION 3.3.3. *La forme $adx + bdy$ et le champ de vecteurs $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = -b\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y}$ ont les mêmes courbes intégrales. Deux formes différentielles proportionnelles partout non nulles ont les mêmes courbes intégrales. Il en est de même de deux champs de vecteurs proportionnels. \square*

3.3.3. Séparation des variables.

L'écriture différentielle est très intéressante si la fonction a ne dépend que de x et la fonction b que de y

DÉFINITION 3.3.2. *La forme différentielle $adx + bdy$ est à variables séparées, si la fonction a ne dépend que de x et la fonction b que de y .*

PROPOSITION 3.3.4. *Si $\omega = a(x)dx + b(y)dy$ est à variables séparées, si $A(x)$ est une primitive de a et $B(y)$ de b , on a alors $\omega = d(B - A)$, et les courbes intégrales de ω sont les courbes $A(x) - B(y) = \text{cte}$.*

Un autre cas particulier important est le cas où ω est la différentielle d'une fonction $\omega = dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$.

THÉORÈME 3.3.2. *Soit $F: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Les courbes $F = \lambda$ sont les courbes intégrales de l'équation différentielle $\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$. Ou bien de l'équation $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \end{cases}$*

Remarque 3.3.2. On peut donc utiliser les formes différentielles pour envisager le problème inverse. Etant donnée une famille de courbes écrire une équation différentielle dont ces courbes sont les courbes intégrales.

Remarque 3.3.3. En utilisant le théorème de Schwartz sur les dérivées seconde, on démontre que pour que $\omega = adx + bdy$ soit la dérivée d'une fonction, il est nécessaire que $\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial x} = 0$, et que localement au moins cette condition est suffisante (voir l'exercice correspondant).

3.4. CHANGEMENT DE VARIABLES.

Il arrive souvent qu'un problème soit posé avec un système de coordonnées mais qu'il soit plus facile à résoudre dans un autre : un exemple typique est celui des coordonnées polaires qui sont très utiles à résoudre certains des problèmes (par exemple l'équation du mouvement d'un objet soumis à une force centrale, comme l'équation qui décrit le mouvement des planètes autour du soleil). Attention ici on parle de système de coordonnées non linéaires : le changement de variable polaire est donné par les formules

$$\boxed{x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta)}$$

En regardant ces formules on voit qu'elles donnent les **anciennes coordonnées** (x, y) en fonction des nouvelles (r, θ) .

Remarque 3.4.1. On peut facilement exprimer $\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$ en fonction de x, y ; par contre pour θ ce n'est pas possible. Cependant, si on enlève la demi droite $y = 0, x < 0$, on peut poser $\boxed{\theta = \arctg \frac{y}{x}}$, en convenant que $\arctg \frac{y}{x} = \pi/2$, si $y > 0$ et $-\pi/2$ si $y < 0$. On peut aussi enlever la demi-droite $x = 0, y < 0$ et poser $\boxed{\theta = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}}$

On a déjà vu ça en algèbre linéaire si $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}, \mathcal{B}' = \{f_1, \dots, f_n\}$ sont deux bases d'un espace vectoriel, on considère souvent la matrice de passage P qui est la matrice (n, n) dont les colonnes sont les coordonnées des f_i dans la base \mathcal{B} . La formule du changement de base nous dit que les coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ d'un vecteur dans la base \mathcal{B} s'exprime en fonction de celle dans la base \mathcal{B}' , disons $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ par la formule :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Cela résulte du diagramme

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ x \swarrow & & \searrow x' \\ \mathbb{R}^n & \xleftarrow{P} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Pour nous un système de coordonnées non linéaires sur un ouvert d'un espace vectoriel est un difféomorphisme de cet ouvert avec un ouvert de \mathbb{R}^n données par des fonctions x_1, \dots, x_n , et un **changement de variables non linéaire** est une application $\varphi: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ donnée par des formules de classes C^1 qui expriment les **anciennes coordonnées** en fonction des **nouvelles**.

Souvent φ est bijective, mais comme le montre l'exemple des coordonnées polaires ça n'est pas toujours le cas. Pour simplifier, et comme il s'agit d'un premier cours sur les équations différentielles, nous nous limitons au cas $n = 2$.

Un **changement de variables** est donc juste donnée par deux ouverts de \mathbb{R}^2, U, Ω et deux applications de classe C^1 : $\varphi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}$ (par abus on note $x(u, v)$ la première coordonnée de $\varphi(u, v)$ et $y(u, v)$ la seconde).

3.4.1. Changement de variables dans l'équation $\omega = 0$.

Etant donnée une équation différentielle $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x, y) \\ b(x, y) \end{pmatrix}$, comment trouver une équation différentielle $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(u, v) \\ \beta(u, v) \end{pmatrix}$ qui transforme précisément les solutions de la première dans celle de la seconde.

On va simplifier le problème en cherchant non pas les solutions de l'équation différentielle $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, mais simplement les *courbes intégrales non paramétrées*. On se rappelle que celles-ci sont les courbes intégrales d'une forme différentielle $\omega = a dx + b dy$

Pour se faire, la notation différentielle simplifie considérablement les calculs : en fait, on peut penser aux fonctions u, v comme à des fonctions de la position (x, y) et chercher leur différentielles. De la même façon qu'il est facile d'exprimer les anciennes coordonnées x, y en fonction des nouvelles il est facile d'exprimer le différentielle des fonctions coordonnées dx, dy en fonction des nouvelles

Si x s'exprime comme fonction $x(u, v)$ des variables u, v la forme dx est la différentielle $d(x(u, v)) = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$. De même dy est $d(y(u, v)) = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$

Alors on peut « calculer ω ».

$\omega = a \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix} d(x(u, v)) + b \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix} d(y(u, v))$, où $d(x(u, v)) = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$ (et $d(y(u, v)) = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$) est la différentielle de la fonction $x(u, v)$.

Tout cela semble très compliqué, mais nous allons le voir sur deux exemples.

3.4.2. Coordonnées polaires

On considère une forme différentielle $\omega = a(x, y) dx + b(x, y) dy$ et on cherche à l'exprimer en coordonnées polaires, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, alors ω devient

$$\eta = a(r \cos \theta, r \sin \theta) (\cos \theta dr - \sin \theta r d\theta) + b(r \cos \theta, r \sin \theta) (\sin \theta dr + \cos \theta r d\theta) = (a \cos \theta + b \sin \theta) dr + (b \cos \theta - a \sin \theta) r d\theta$$

On écrit pour $a = 1, b = 0$ et $a = 0, b = 1$

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \quad dy = \sin \theta dr + \cos \theta r d\theta$$

Ainsi, $\omega = a(x, y) \cdot (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) + b(x, y) \cdot (\sin \theta dr + \cos \theta r d\theta)$

$$\text{Ou bien } \boxed{\omega = (a \cos \theta + b \sin \theta) dr + r(-a \sin \theta + b \cos \theta) d\theta}$$

Réciproquement, on peut exprimer $d\theta$ et dr en coordonnées euclidiennes, puisque $r^2 = x^2 + y^2$ et $\text{tg } \theta = \frac{y}{x}$, on obtient :

$$2r dr = 2x dx + 2y dy, \quad \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) d\theta = \frac{x dy - y dx}{x^2} \text{ et on a :}$$

$$\boxed{d\theta = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}, \quad r dr = x dx + y dy, \quad dr = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}}$$

Exemple 3.4.1. L'équation différentielle $(\alpha x - \beta y) dx + (\beta x + \alpha y) dy = 0$ devient $\alpha r dr + \beta r^2 d\theta = 0$, où encore $\frac{dr}{r} = -\frac{\beta}{\alpha} d\theta$ qui s'intègre en $r = r_0 e^{-\beta/\alpha \theta}$, ce qui permet de tracer les courbes intégrales exprimée en coordonnées polaires.

3.4.3. Equations homogènes

On étudie une équation homogène $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{x}{y}\right)$, où f est une certaine fonction. On pose $u = \frac{x}{y}$ et on prend comme nouvelles variables u, x .

Les formules sont donc $y = ux, x = x$

On écrit $f\left(\frac{x}{y}\right) dx - dy = 0$, et il vient $f(u) dx - u dx - x du = 0$, soit

$$(f(u) - u) dx = x du \text{ qui est à variables séparables, car on peut l'écrire } \boxed{\frac{dx}{x} = \frac{du}{f(u) - u}}$$

On peut aussi résoudre l'équation en passant en polaire $f(\cotg \theta) (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) = \sin \theta dr + \cos \theta r d\theta$ soit $(f(\cotg \theta) \cos \theta - \sin \theta) \cdot \frac{dr}{r} = (f(\cotg \theta) \sin \theta + \cos \theta) d\theta$

Sui est à variables séparables.

3.4.4. Redressement des champs de vecteurs.

Le changement de variable dans l'équation $\omega = 0$ permet seulement de regarder comment se transforment les courbes intégrales du champ de vecteur associée, mais pas les solution de l'équation différentielle. Regardons comment se transforme un champ de vecteur par un C^1 difféomorphisme. On rappelle la définition de difféomorphisme.

DÉFINITION 3.4.1. Soit E, F deux espace vectoriels de même dimension, U, V deux ouvert de ces espaces. Une application $\varphi: U \subset E \rightarrow V \subset F$ est un C^1 difféomorphisme si φ set bijective, de classe C^1 et si son inverse φ^{-1} est aussi de classe C^1 .

Remarque 3.4.2. Le théorème d'inversion locale dit qu'une application φ de classe C^1 est un difféomorphisme au voisinage d'un point x_0 si et seulement si $\varphi'(x_0)$ est une application linéaire inversible.

Si X est un champ de vecteurs sur l'ouvert U et $\varphi: U \rightarrow V$ est un C^1 difféomorphisme, on peut fabriquer l'image de X par φ , notée $Y = \varphi_*(X)$, par la formule $Y(y) = \varphi'(\varphi^{-1}(y)) \cdot X_{\varphi^{-1}(y)}$

PROPOSITION 3.4.1. Si $c(t)$ est la solution du problème de Cauchy $\frac{dx}{dt} = X, x(t_0) = x_0, y(t) = \varphi(c(t))$ est la solution de problème de Cauchy $\frac{dy}{dt} = Y, y(t_0) = \varphi(x_0)$

Démonstration. On a $\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ c(t)) = \varphi'(c(t)) \frac{dc}{dt} = \varphi'(\varphi^{-1}(\varphi(c(t)))) \cdot X_{\varphi^{-1}(\varphi(c(t)))}$ \square

Grâce au théorème de différentiabilité par rapport au paramètre, nous démontrerons qu'au voisinage d'un point x_0 où le champ de vecteur X ne s'annule pas, on peut trouver un difféomorphisme φ qui le rend constant. Rappelons que $\frac{\partial}{\partial x_1}$ désigne le champ de vecteurs constant $X(x) = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

THÉORÈME 3.4.1. Soit X un champ de vecteur de classe C^1 défini sur un ouvert Ω et $x_0 \in \Omega$. Il existe un voisinage U de x_0 et un difféomorphisme φ de U vers un voisinage V de $0 \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi_*(X) = \frac{\partial}{\partial x_1}$. \square

Nous démontrerons ce résultat comme conséquence du théorème sur la dépendance différentiable de la solution par rapport à la condition initiale, donc à la fin du cours. Mais en gros il dit qu'au voisinage d'un point où le champ ne s'annule pas, il peut s'étudier comme un champ constant.

3.5. ÉTUDE QUALITATIVE D'UN CHAMP DE VECTEUR.

On se place dans un ouvert de \mathbb{R}^n , le plus souvent $n=2$ et on se donne un champ de vecteur X supposé de classe C^1 . On veut étudier l'équation différentielle autonome $\frac{dx}{dt} = X$.

3.5.1. Sortie de tout compact.

THÉORÈME 3.5.1. Soit (t_0, x_0) une donnée initiale, et $I =]a, b[\subset \bar{\mathbb{R}}$ l'intervalle de temps maximal sur lequel la solution de l'équation est définie. Alors soit $b = +\infty$, soit $b < \infty$ et la solution $x(t)$ sort de tout compact contenu dans Ω et n'y revient jamais: pour toute partie compacte $K \subset \Omega$ il existe un temps t_1 tel que si $t > t_1$, $x(t) \notin K$.

Démonstration. En gros l'idée est la suivante. Le théorème de Cauchy-Lipschitz dit que pour toute donnée initiale (t_0, x_0) , on peut trouver un ε telle que la solution qui au temps t_0 vaut x_0 soit définie jusqu'à l'instant $t_0 + \varepsilon$. Comme le champ est autonome, il est clair que ce ε ne dépend pas de t_0 . Une étude attentive de la démonstration (que nous n'avons pas encore faite) montre que si x_0 est fixé et si $K \subset \Omega$, est compact on peut trouver un ε qui marche pour tous les points de K . On en déduit que si une orbite arrive dans K à l'instant t , alors on peut la prolonger jusqu'à l'instant $t + \varepsilon_K$. On applique ce résultat à $b - \varepsilon_K/2$. Jamais après cet instant l'orbite ne peut se trouver dans K sinon la solution maximale serait définie jusqu'à l'instant $b + \varepsilon_K/2$. \square

3.5.2. Points d'équilibre : partie linéaire et stabilité.

DÉFINITION 3.5.1. Un point d'équilibre, ou zéro, du champ de vecteur X est un point x_0 tel que $X(x_0) = 0$. On dit aussi point singulier ou point critique^{3.5.1}.

Evidemment si x_0 est un point d'équilibre, la seule solution de l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = X$ telle que $x(t_0) = x_0$ est la solution constante. On peut alors regarder la partie linéaire de X , en effet la formule de Taylor dit que $X(x_0 + x) = X'(x_0) \cdot x + o(x)$

Ou matriciellement :

$$X(x_0 + x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \cdot \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_1} & \frac{\partial X_n}{\partial x_{1n}} \end{pmatrix} (x_0) \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} + o(x) = Ax + o(x), \text{ ou } A \text{ est une matrice qui est juste la partie linéaire de } X.$$

Une question importante est de savoir à quelle point l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = X$ et l'équation linéaire $\frac{dx}{dt} = Ax$ ont des solutions qui se ressemblent.

^{3.5.1}. On peut regretter qu'il y ait 4 noms pour désigner la même chose, mais cela souligne l'importance de ces points. Quand on étudie un champ de vecteur la première chose à faire est de chercher les points où il s'annule.

Pour cela, on va introduire une notion importante : celle de *stabilité*.

Si x_1 est un point du domaine de définition U de X , nous noterons $x_1(t)$ la solution de l'équation différentielle qui vaut x_1 à l'instant initial.

DÉFINITION 3.5.2. *Un point d'équilibre x_0 du champ de vecteur X est dit*

- uniformément stable si*
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tel que si $\|x_1 - x_0\| \leq \alpha$, alors $\forall t > 0, \|x_1(t) - x_0\| \leq \varepsilon$.
- asymptotiquement stable si de plus il existe un $\rho > 0$ tel que si $\|x_1\| \leq \rho$ implique que la limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t)$ existe et vaut x_0 .*
- uniformément asymptotiquement stable si de plus la limite précédente est uniforme, autrement dit*
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \exists t_1$ tel que si $\|x_1 - x_0\| \leq \alpha$, alors $\forall t > t_1, \|x_1(t) - x_0\| \leq \varepsilon$.
- Si un équilibre n'est pas stable, on dit qu'il est instable.*

Remarque 3.5.1. En dimension finie, et en utilisant le théorème de Heine-Borel, on vérifie que si un équilibre est asymptotiquement stable, il est uniformément asymptotiquement stable.

THÉORÈME 3.5.2. de Lyapunov. *Soit A la partie linéaire d'un champ de vecteur au voisinage d'un point critique x_0 . On suppose que toutes les valeurs propres de la matrice A ont une partie réelle strictement négative $\operatorname{Re}(\lambda) = -a < 0$. Alors x_0 est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable. Mieux, il existe une norme équivalente à la norme initiale telle que si $\|x_1 - x_0\| \leq \alpha$ alors $\|x_1(t) - x_0\| \leq \alpha e^{-a \cdot t}$.*

Démonstration. On se place en dimension 2, dans le cas où il y a deux valeurs propres imaginaires pures conjuguées. Le cas général sera fait en exercice. On suppose que $x_0 = (0, 0)$. On considère une base dans laquelle $A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $-a < 0$. Étudions la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$.

On a $X \cdot f = (-ax - by) \times 2x + (bx - ay) 2y + o(x, y) = -a(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)o(1) \leq -\frac{a}{2}(x^2 + y^2)$
Si $\sqrt{x^2 + y^2}$ est plus petit qu'un certain α .

Ainsi, le long d'une orbite dont l'origine est dans $B(0, \alpha)$, on a $\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) \leq -\frac{a}{2}(x^2 + y^2)$ et $\sqrt{x^2 + y^2} \leq r_0 e^{-at}$. La distance du point à l'origine converge exponentiellement vers 0 \square

On admettra le théorème suivant (Cetaev)

THÉORÈME 3.5.3. *On suppose qu'au moins une valeur propre de A a une partie réelle > 0 . Alors l'équilibre n'est pas stable. \square*

3.6. SYSTÈME À UN DEGRÉ DE LIBERTÉ : ESPACE DES PHASES ET APPLICATIONS.

On va appliquer les résultats de cette section à un problème classique de la mécanique : les systèmes conservatifs à un degré de liberté. A priori, un tel système est défini par la position $x(t)$ à l'instant t d'un objet. Ici x peut désigner un peu n'importe quoi : aussi bien l'altitude d'un objet qu'on a lancé en l'air que l'angle que fait un pendule qui oscille, l'angle que fait un satellite qui tourne autour de la terre ou du soleil, la charge mesurée aux bornes d'un système électrique compliqué, l'ordonnée d'une corde de violon.

L'équation de Newton est $\frac{d^2 x}{dt^2} = f(x)$ où f est une fonction (la force), et $x \in I \subset \mathbb{R}$.

On a décidé que la masse est 1 pour se simplifier la vie.

On s'empresse d'introduire l'espace des phases (x, y) et on considère l'équation :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = f(x) \end{cases}$$

On voit bien que cette équation est à variables séparées : $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{y}$, ou bien

$$y dy = f(x) dx$$

On écrit alors $y \cdot \frac{dy}{dt} = f(x) \frac{dx}{dt}$ et on obtient $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} y^2 - \int^x f(u) du \right) = 0$

$T = \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$ s'appelle l'énergie cinétique, $U = - \int_{x_0}^x f(u) du$ l'énergie potentielle. On pose

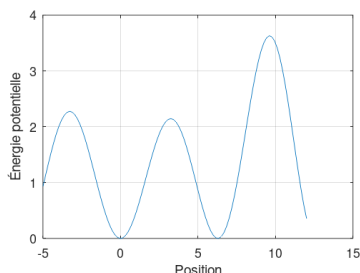
$E = T + U$ qui est « l'énergie totale », ainsi :

THÉORÈME 3.6.1. *L'énergie totale est conservée.*^{3.6.1}

On est donc ramené à tracer les courbes de niveau de l'énergie dans l'espace des phases. Celles-ci ont une équation très simple $\frac{1}{2}y^2 + U(x) = E(x, y) = \text{Cte}$.

Ici, le domaine de définition est $I \times \mathbb{R}$, où I est le domaine de définition de f (donc de U).

Il est intéressant, pour comprendre cette équation, de considérer le système physique suivant (montagne russes). Un petit wagon roule sans frottement dans un champ de pesanteur le long d'une courbe d'équation $z = U(x)$. On suppose que le champ de la pesanteur est constant. Son énergie potentielle est donc exactement $U(x)$. Le mouvement qu'elle décrit est précisément régi par l'équation donnée. On peut donc tout prévoir sans faire aucun calcul avec un peu d'imagination. Le cas du plan incliné $U(x) = -\alpha x$ a été considéré par Galilée, qui a ainsi décrit la loi de la chute des graves, ou loi de gravitation.



Les solutions de notre équation différentielle sont contenues dans les courbes de niveau de $E(x, y)$, où $\frac{1}{2}y^2 + U(x) = E(x, y)$. Il est important de comprendre à quoi elle peuvent ressembler, mais avant tout, regardons les points d'équilibre, ou les zéros de notre champ.

Stabilité et instabilité des points d'équilibre.

Les zéro (points d'équilibre) du champ de vecteurs sont les points de l'espace des phases où la vitesse s'annule et l'énergie potentielle U a un point critique ($U'(x_0) = 0$). On est soit en haut soit en bas de notre courbe avec une vitesse nulle. Evidemment si on est en bas on y reste, mais si on est en haut et qu'on bouge un tout petit peu on va tomber. Voici les mathématiques qui expliquent cela.

On fait un DL à l'ordre 2: $U(x) = U(x_0) + U'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots +$
Ainsi, $E = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^2$

Le comportement selon que $U''(x_0) > 0$ (on est à un minimum local de d'énergie potentielle) ou $U''(x_0) < 0$ est tout à fait différent.

Le champ de vecteur linéarisé est facile à calculer c'est $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = u''(x_0)x \end{cases}$ et la matrice correspondante a deux valeur propres dont la somme est nulle et le produit est $-u''(x_0)$. Si $-U''(x_0) > 0$ on a deux valeur propres réelles de signes opposées et le théorème de Cetaev nous assure que c'est un équilibre instable. Nous verrons plus tard un peu mieux à quoi ressemble la solution. Par contre, si $U''(x_0) > 0$ la théorie générale ne permet pas de conclure, car il y a deux valeurs propres imaginaires pures et opposées.

Cependant, notons que l'énergie est conservée et au voisinage de $(x_0, 0)$ on a $\alpha((x - x_0)^2 + y^2) \leq E(x, y) - E(x_0, 0) \leq \beta((x - x_0)^2 + y^2)$. Si la distance de (x, y) à $(x_0, 0)$ est inférieure à $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \varepsilon$, alors $E(x, y) - E(x_0, 0) \leq \alpha \varepsilon^2$ de sorte que $\sqrt{(x - x_0)^2 + y^2} \leq a$. Ainsi il y a stabilité, mais comme l'énergie est conservée, l'orbite ne peut pas arriver vers l'origine.

^{3.6.1.} Ce qui est important ici, c'est qu'on dispose d'une fonction $E(x, y)$ qui est conservée au court du temps. Le fait qu'elle s'appelle énergie nous rassure, mais soulève d'autres questions : quelque chose est conservé et c'est ce quelque chose qui nous intéresse.

PROPOSITION 3.6.1. *Les points singuliers sont les couples $(x_0, 0)$, où x est un point critique de l'énergie potentielle. Si x_0 est point critique non dégénéré de U , c'est à dire si $U''(x_0) \neq 0$, alors :*

Si x_0 est un maximum local de l'énergie potentielle, le point singulier est un point instable.

Si x_0 est un minimum local de l'énergie potentielle, $(x_0, 0)$ est stable, mais pas uniformément asymptotiquement.

Notons que $E(x + x_0, y) = E(x_0, 0) + y^2 + \frac{1}{2}U''(x_0)x^2 + o(x^2)$, ce qui permet de tracer les courbes $E = \text{cte}$ au voisinage des points d'équilibre $(x_0, 0)$:

Si x_0 est un minimum d'énergie, ce sont ds courbes fermées simples très proches de l'ellipse $y^2 + \frac{1}{2}U''(x_0)x^2 = \text{cte}$, $y = \pm \sqrt{2((E - U''(x_0)))}$

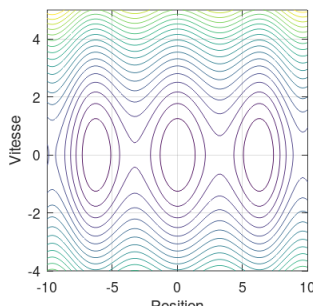
Si x_0 est un maximum d'énergie ($U''(x_0) < 0$), on peut écrire l'ensemble $E = E(x_0, 0)$ comme réunion de deux courbes très proches ce sont des courbes très proches de l'hyperbole $y^2 + \frac{1}{2}U''(x_0)x^2 = E_0$.

Allure de l'espace des phases

Donnée une orbite, on a une expression explicite de y , très utile : $y = \pm \sqrt{2(E - U(x))}$

Rien que sur cette expression, on voit que l'énergie potentielle est toujours inférieure à E , et que quand elle atteint cette valeur, la vitesse s'annule.

On peut alors tracer les orbites dans l'espace des phases (x, y) à partir du graphe de la fonction U . Posons $I =]a, b[$, et concentrons nous sur un niveau d'énergie E_0 . Il s'agit de voir à quoi ressemble la courbe $E(x, y) = E_0$.



Niveau non critiques de l'énergie.

Soit E_0 un niveau d'énergie fixé. Supposons d'abord que E_0 n'est pas critique. Comme ce niveau n'est pas critique, la vitesse ne s'annule pas le long de la courbe $E(x, y) = E_0$, et l'orbite de (x_0, y_0) est toute la composante connexe contenant (x_0, y_0) de cette courbe.

Regardons $\{x \in I / U(x) < E_0\}$, comme U est continue, cet ensemble est une réunion d'intervalles $]a_i, b_i[$ et il faut distinguer deux cas.

1. $a < a_i < b_i < b$. Notons que $U(b_i) = U(a_i) = E_0$.

PROPOSITION 3.6.2. *Dans ce cas, l'orbite de (x_0, v_0) est la réunion C_i de deux graphes de fonction définie sur $[a_i, b_i]$. $y_{\pm}(x) = \pm \sqrt{2(E - U(x))}$, collé le long des deux points $(a_1, 0)$ et $(b_1, 0)$ qui sont les points où la vitesse est nulle (et la valeur de x est extrémale)*

L'orbite de x_0 est alors une courbe fermée réunion de deux graphes de fonction

$$y_{\pm}(x) = \pm \sqrt{2(E - U(x))}.$$

Ce cas est particulièrement intéressant, car alors l'orbite est $(x(t), y(t))$ est une fonction périodique du temps. Soient x_1, x_2 deux abscisses de cette orbite. On peut facilement calculer le temps mis pour aller de (x_1, y_1) à (x_2, y_2) , par exemple pour $y_2 > 0$: en effet $y = \frac{dx}{dt}$ et $y = \sqrt{2(E - U(x))}$, ce qui donne $t_2 - t_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}}$

PROPOSITION 3.6.3. *Dans cette hypothèse, le mouvement est périodique et de période $2 \int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}}$*

En effet le temps mis pour aller de $(a_1, 0)$ à $(b_1, 0)$ est précisément $\int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{2(E-U(x))}}$, et on met le même temps pour aller de $(b_1, 0)$ à $(a_1, 0)$

2. $a = a_i$ et $b < b_i$

PROPOSITION 3.6.4. *Dans ce cas, l'orbite de (x_0, v_0) est la réunion B_i de deux graphes de fonction définie sur $]a, b_i]$. $y_{\pm}(x) = \pm\sqrt{2(E-U(x))}$, joint en un point $(b_1, 0)$*

3. $a = a_i$ et $b = b_i$

PROPOSITION 3.6.5. *Dans ce cas, l'orbite de (x_0, v_0) est le graphe de la fonction définie sur $]a, b[$. $y_{\pm}(x) = \pm\sqrt{2(E-U(x))}$ le choix du signe dépendant de la valeur initiale de la vitesse. Le long d'une telle trajectoire, la vitesse ne s'annule jamais.*

Niveau critiques de l'énergie

Si E_0 est un niveau critique de l'énergie (ce qui veut dire qu'il contient un point d'équilibre), pour étudier l'ensemble $E(x, y) = U(x) + \frac{y^2}{2}$, on note que les points d'équilibre du champs de vecteurs sont isolés de la forme $(x, 0)$. On note $(x_1, 0), (x_2, 0), \dots, (x_k, 0)$ les points d'équilibre contenus dans le niveau E_0 , c'est à dire tels que $E(x_i) = E_0$.

Les points de minimum de U sont isolés dans l'ensemble $E = E_0$ et nous savons déjà que ce sont des points stables, donc le cas qui nous intéresse est celui où les x_i sont des maxima locaux de U .

Après avoir fixé le niveau d'énergie, on écrit encore l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \text{ et } U(x) < E_0\}$ comme réunion d'intervalles $]a_i, b_i[$, mais comme les x_i sont des maxima locaux, il apparaissent au bord de ces intervalles : on peut séparer les niveaux d'énergie par des intervalles de la forme $]a_1, x_1[\cup]x_1, x_2[\dots]x_k, b_1[$.

1. $a_1 > a$. L'intervalle $]a_1, x_1[$ décrit une orbite homocline (même cas avec $]x_1, b_1[$, $b_1 < b$) cette orbite part d'un point instable pour y revenir en un temps infini.

2. $]x_1, x_2[$ orbite hétérocline : elle joint deux points d'équilibres instables et met un temps infini pour les joindre. Elle peut y retourner en un temps infini aussi.

3. $]a, x[$ (cas limite) une orbite arrive à un point d'équilibre instable en un temps infini.

Période du pendule

Si on considère un pendule fixé par une barre à un point fixe, son centre de masse est quelque part disons à la distance l entre ce point et le bout du pendule, et il décrit des cercles. Si on appelle θ l'angle que fait le pendule avec la verticale, son énergie cinétique est $E = \frac{1}{2} ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ et son énergie potentielle est $-mgl \cdot \cos \theta$

$$\text{Ainsi } E = m \times \left(\frac{1}{2} l^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - g.l \cdot \cos \theta\right)$$

Pour se souvenir de ce qu'on a fait avant, appelons $x = l\theta$ l'arc parcouru et $y = \frac{dx}{dt}$ la vitesse. On choisit les unités de sorte que la masse soit 1. L'énergie potentielle est $U(x) = -g.l \cos \frac{x}{l}$, l'énergie totale est

$$E = \frac{y^2}{2} - g.l \cos \frac{x}{l}$$

Les points d'équilibre sont les points où $x = 0(\pi)$ si $x = 0(2\pi)$ il y a un équilibre stable, si $x = \pi$ un équilibre instable.

Si on part avec une vitesse nulle avec un angle $\theta_0 < 0$, $x_0 = l\theta_0$ on revient à la vitesse nulle pour l'angle opposé. L'énergie est $E = -g.l \cos \theta_0$ et le temps mis est $\int_{-l\theta_0}^{l\theta_0} \frac{dx}{\sqrt{2g.l(\cos \theta - \cos \theta_0)}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}}$

La période est le double, évidemment.

On écrit $\cos(a) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{a}{2}\right)$,

$$T(\theta_0) = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)}}$$

dans cette intégrale, on pose $\sin(\varphi) = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)}$, et il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta &= \frac{1}{2} \sin(\theta_0/2) \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \sin(\theta_0/2) \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{1}{2} \sqrt{\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)} d\varphi \\ T(\theta_0) &= 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2}} d\varphi = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_0/2) \sin^2 \varphi}} = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{\sin^2 \theta_0/2}{2} \sin^2 \varphi + o(\theta_0^2)\right) d\varphi = \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2(\theta_0/2) + o(\theta_0^2)\right) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} + o(\theta_0^2)\right). \end{aligned}$$

[Comme la fonction est paire, on peut d'ailleurs se débrouiller pour montrer qu'on a $T(\theta_0) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} + o(\theta_0^2)\right)$.]

Dans cette exemple, on voit aussi une **orbite hétérocline** apparaître. On part de la position d'équilibre haute $\theta = -\pi$ et on arrive à $\theta = \pi$ en un temps infini. Evidemment cette orbite n'existe pas dans la nature, mais la dessiner aide bien à comprendre les choses.

Remarque 3.6.1. On sait que $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$. Si un pendule fait 1 m , $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ vaut $2,005$ et l'angle initial fait $0,2$ radian au $\Delta T(\theta_0)/T(0) = \frac{1}{4} \sin^2(\theta_0/2) = 0,0025$. Un pendule idéal de longue $99,5 \text{ cm}$ « bat la seconde » (a une période de 2 secondes). Si pour le faire fonctionner, on l'écarte de 20 cm de sa position d'équilibre, il est un peu plus lent ($+2,5$ millièmes de seconde).

3.7. EXERCICES DU CHAPITRE 3.

3.7.1. Orbite et flot.

Exercice 3.7.1. On considère une équation différentielle $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$. On considère l'orbite \mathcal{C} passant en un point (x_0, y_0) supposé non singulier. A quelle condition la tangente en (x_0, y_0) est elle verticale ? fait elle un angle α avec l'horizontale ?

A quelle condition ce point est il un point d'inflexion de \mathcal{C} ? Une idée pour résoudre ce problème :

Si $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ est une solution, exprimer que l'accélération $\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} f(x(t), y(t)) \\ g(x(t), y(t)) \end{pmatrix}$ est proportionnelle à la vitesse.

Exercice 3.7.2. Soit $A = \begin{pmatrix} \ln(2) & -\frac{2\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} & \ln(2) \end{pmatrix}$. Quelle est l'image d'un triangle (a, b, c) du plan par la valeur à l'instant 1 du flot de l'équation linéaire $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Quelle est l'image Σ_θ de demi-droite D_θ passant à l'origine et faisant un angle θ avec l'axe des x par le flot de ce champ de vecteurs ?

Exercice 3.7.3. Soit X un champ de vecteurs défini sur \mathbb{R}^2 , et f une fonction strictement positive.

Montrer que X et $f.X$ ont les mêmes orbites. On propose deux méthodes.

1. Paramétrer les orbites comme fonctions $y(x)$, ou bien $x(y)$ et écrire l'équation différentielle satisfaite par cette fonction
2. Chercher une forme différentielle ω dont les courbes intégrales sont les orbites de X

Réciproque ?

3.7.2. Portrait de phase

Exercice 3.7.4. Pour un TP de mat-appli. Ecrire un script permettant d'afficher le portrait de phase d'une équation différentielle du second ordre en dimension 1 ou du premier ordre dans l'espace des phases qui est de dimension 2.

Par exemple l'équation de Liénard $x'' - \mu(1 - x^2)x' + x = 0$, avec μ petit.

3.7.3. Courbes intégrales, séparation des variables.

Exercice 3.7.5. En séparant les variables, intégrer

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(x)\sin^2(y)dx + \cos^2(x)\operatorname{cotg}(y)dy &= 0 \\ xy' - y &= y^2 \\ xy' &= 1 - x^2 \end{aligned}$$

Exercice 3.7.6. Former une équation différentielle dont les solutions sont les courbes

$$\begin{aligned} x^2 &= \lambda(x^2 - y^2) \\ y^2 + \frac{1}{x} &= 2 + \lambda e^{-\frac{y^2}{2}} \end{aligned}$$

Exercice 3.7.7. On cherche les courbes C vérifiant la propriété suivante. Au point M , la normale à C en M coupe les deux axes $[Ox]$ et $[Oy]$ du demi plan $X > 0, y > 0$ en deux points A, B tels que M soit le milieu de $[A, B]$.

Exercice 3.7.8. Trajectoire orthogonales.

On considère une famille de courbe dépendant d'un paramètre. On cherche une famille de courbe qui rencontre la première orthogonalement (à angle droit) en tout point.

Si la première famille est donnée par l'équation $y' = f(x, y)$, montrer qu'on peut définir la seconde par $\frac{-1}{y'} = f(x, y)$

Si elle est donnée par $f(x, y) = \lambda$, montrer que l'autre est obtenue en résolvant $\frac{\partial f}{\partial x} dy - \frac{\partial f}{\partial y} dx = 0$

Trouver les trajectoires orthogonales à la famille d'ellipses $x^2 + 2y^2 = \lambda$

Même question avec les hyperboles $xy = \lambda$.

Si la famille est donnée par $f(x, y, \lambda) = 0$, démontrer que la famille orthogonale s'obtient en résolvant $\frac{\partial f}{\partial x} dy - \frac{\partial f}{\partial y} dx = 0$ avec $f(x, y, \lambda) = 0$

Traiter le cas des cercles $(x - a)^2 + y^2 = a^2$

Exercice 3.7.9. (Théorème de Clairault)

Soit $\omega = adx + bdy$ une forme différentielle définie sur un ouvert Ω supposé convexe. On suppose que $\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x} = 0$.

Montrer que l'intégrale $F(x, y) = \int_C \omega$ ou C est un chemin joignant (x_0, y_0) à (x, y) ne dépend pas du chemin. Indication soient γ_0 et γ_1 deux chemins paramétrés $\gamma_i = [0, 1] \rightarrow$ de classe C^1 joignant (x_0, y_0) à (x, y) . On pose $\gamma_t = t\gamma_1 + (1-t)\gamma_0$; étudier $\frac{d}{dt} \int_{C_t} \omega$, où C_t est le chemin paramétré par γ_t .

Montrer que $dF = \omega$ (on pourra considérer des chemins parallèles aux axes).

Réciproquement si $F \in C^2$ et $dF = adx + bdy$, montrer que $\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x} = 0$.

3.7.4. Changement de variables

Exercice 3.7.10. Passer en coordonnées polaires dans les équations suivantes pour les intégrer.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y} \\ (x^2 + y^2)dx - xydy &= 0 \\ \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + x(1 - (x^2 + y^2)) \\ \frac{dy}{dt} = -x + y(1 - (x^2 + y^2)) \end{cases} \end{aligned}$$

Problème 3.7.1. Repère non galiléen *.

Les équations de la mécanique classique sont de la forme $m\ddot{\gamma} = \vec{F}$. Elle sont supposée être écrite dans un repère « galiléen » (ce qui ne veut rien dire d'autre qu'on suppose qu'il existe un repère de l'espace dans lequel ces équations décrivent le mouvement d'un objet).

On rappelle qu'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace euclidien est la donnée d'un point base et d'un repère orthonormé de l'espace vectoriel sous-jacent. Il arrive que le repère naturel dans lequel on fait l'expérience ne soit pas fixe au cours du temps. Par exemple si on fait dans un train en marche, on peut voir les effet de l'accélération du train sur les valises mal disposées au dessus de notre tête. Par ailleurs, il peut être important de se souvenir que la terre tourne..

Nous fixons une fois pour toute un repère galiléen disons $(O_0, \vec{e}, \vec{f}, \vec{g})$. A chaque instant fixé, nous avons un autre repère orthonormé+ une origine $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, mais ce repère et cette origine dépendent du temps. On veut savoir que devient l'équation $m\ddot{\gamma} = \vec{F}$ dans ce repère « mobile ». Nous allons suivant une tradition bien établie séparer le problème en deux parties. La première partie, seule l'origine bouge, par exemple nous sommes dans dans un train qui se promène en ligne droite, ensuite on fixera l'origine mais en faisant tourner le repère.

Nous noterons $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ les coordonnées galiléennes, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ les coordonnées dans le repère mobile (celle de l'observateur). On rappelle qu'un changement de coordonnée exprime toujours les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles.

1. Première partie.

On suppose que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est constant mais que l'origine $O(t)$ dépend du temps. On note $\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}$ les coordonnées de $O(t)$ dans le repère galiléen.

1. Démontrer que $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$

2. En déduire que l'équation de Newton, devient $m \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = -m \cdot \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix} + \vec{F}$, qu'on écrit souvent

$$\boxed{m \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} = \vec{F} - \vec{\alpha}}$$

Ainsi, même en l'absence de force, le point $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ se met à bouger.

Remarque 3.7.1. Tout se passe comme si l'observateur subissait une force égale à l'opposée de l'accélération de l'origine du repère: quand le train, ou un avion démarre ou décolle on est plaqué au fond de son siège.

2. Deuxième partie.

1. Rappel d'algèbre linéaire. On suppose que $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sont les coordonnées d'un point dans des repères $\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}$ et $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ de l'espace euclidien.

a. Qu'appelle-t-on matrice de passage de $(\vec{e}, \vec{f}, \vec{g})$ à $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

b. Soit P cette matrice démontrer que $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

c. On suppose que les deux repères sont orthonormés. Démontrer que $P \cdot P^t = P^t \cdot P = \text{Id}$, et que P est orthogonale.

2. On suppose maintenant que le repère $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dépend du temps et qu'il est toujours orthonormé. On not $O(t)$ la matrice de passage de $(\vec{e}, \vec{f}, \vec{g})$ à $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de sorte que $P(t) = O(t)$ est une matrice orthogonale (3, 3).

a. On suppose que l'application $t \rightarrow O(t)$ est de classe C^1 . Démontrer qu'il existe une matrice antisymétrique (3, 3) notée $\Omega(t)$ telle que $\frac{dO(t)}{dt} = O(t) \cdot \Omega(t)$

Soit $M(t)$ la trajectoire d'un point dépendant du temps, $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ les coordonnées de ce point dans le deux repères.

b. Démontrer que sa vitesse, calculée dans le repère galiléen, satisfait :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = O(t) \left(\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \Omega(t) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \right)$$

c. En déduire que $\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = O(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + 2\Omega(t) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \Omega^2(t) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \Omega'(t) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \right)$

d. Et que dans le nouveau repère, l'équation $m \vec{\gamma} = \vec{F}$ s'écrit

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + 2\Omega(t) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \Omega^2(t) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \Omega'(t) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

3. a. On suppose que $\Omega'(t) = 0$, de sorte que $\Omega(t) = \Omega$ est constant, démontrer que $O(t) = \exp t\Omega$, et qu'il existe un vecteur $\vec{\omega}$ tel que $\Omega \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{\omega} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{\omega}$ est le vecteur de rotation instantanée.

b. Montrer que $O(t)$ n'est autre que la rotation autour de l'axe dirigé par $\vec{\omega}$ et d'angle $t\|\omega\|$.

4. Notant $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ montrer que l'équation s'écrit alors

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + 2\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \frac{1}{m} \cdot \vec{F}$$

Remarque 3.7.2. Ainsi on remarque qu'en l'absence même d'une force extérieure ($f = 0$) le point se met à bouger. On écrit souvent $\boxed{m \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} - m \cdot 2\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} - m \cdot \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})}$.

Le terme $-m \cdot 2\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$ s'appelle la force de Coriolis, le second, $-m \cdot \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$ n'est autre que la force centrifuge : c'est la force subie à chaque instant par un enfant assis sans bouger ($\frac{d\vec{r}}{dt} = 0$) dans un manège qui tourne. Si $\vec{\omega}$ est constant et si le champ de force ne dépend pas de la position r mais que de t , on a « juste » une équation différentielle linéaire du second ordre à résoudre.

3. Champ de pesanteur.

Le champ de la pesanteur \vec{g} est dirigé vers le centre de la terre, et sa valeur absolue est $\frac{GM}{\|\vec{r}\|^2}$ à peu près constante entre le haut et le bas de la tour Eiffel, donc à la latitude de 45° . La vitesse de rotation de la terre est de 1 tour par 24 h. Un observateur regarde un objet tomber du haut de la tour Eiffel. L'équation de la chute des corps est donc :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{g}' - 2\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}, \text{ ou } \vec{g}' = \vec{g} - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \text{ qui est à peu près constant.}$$

Le vecteur \vec{g}' donne donc la direction de la verticale observée (qui est légèrement différente de la verticale physique), nous considérerons que c'est une constante.

Résoudre l'équation $\frac{d\vec{v}}{dt} = -2\vec{\omega} \wedge \vec{v} + \vec{g}'$. On note Ω la matrice du produit vectoriel par $\vec{\omega}$

Evidemment le vecteur $\vec{\omega}$ est tout petit, le temps de chute t_c n'est pas très long, donc on peut poser $e^{u\Omega} = \text{Id} + u\Omega + 0(\|\vec{\omega}\|^2)$, avec $\|0(\|\vec{\omega}\|^2)\| \leq \|\vec{\omega}\|^2 \times |t_c^2|$

En déduire que si $v_0 = 0$, on a $\vec{r} = \vec{r}_0 - \vec{g}' \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \vec{\omega} \wedge \vec{g}' + \text{termes en } \|\vec{\omega}\|^2 |t_c^4| \times \|\vec{g}'\|$

Le temps de chute est approximativement $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. On donne $g = 10m \cdot s^2$. On fait descendre tout doucement un fil à plomb du haut d'une tour de 100 m pour marquer la verticale. Après on laisse tomber une pierre. Montrer que sa chute est déviée vers l'est et évaluer de combien.

3.7.5. Points d'équilibre.

Exercice 3.7.11. Donner un exemple de système stable, mais pas asymptotiquement stable en dimension 2.

Exercice 3.7.12. Trouver les points d'équilibre et discuter leur stabilité.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x(1-x); \frac{dy}{dt} = 1-x^2 \\ \frac{dx}{dt} = -2x(x-1)(2x-1) \\ \frac{dy}{dt} = -2y \end{cases}$$

Exercice 3.7.13. Etudier les orbites du système $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = -y + x^3 \end{cases}$ et comparer au système linéarisé.

Exercice 3.7.14. Soit $U: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . On étudie l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = -\nabla U$, où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, et ∇U est le gradient de U , c'est à dire le champ de vecteur $\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_1} \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} \end{pmatrix}$.

1. Quels sont les points d'équilibre de ce système ?

2. Démontrer que si $x(t)$ est une solution, la fonction $U(x(t))$ est décroissante, et même strictement si $x(0)$, n'est pas un point d'équilibre.

3. On suppose maintenant que U est propre, c'est à dire que $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} U(x) = +\infty$.

Démontrer que la solution du problème de Cauchy $\frac{dx}{dt} = -\nabla U$, $x(0) = x_0$ est définie sur \mathbb{R}^+ . On pourra considérer l'ensemble $\{x/U(x) \leq U(x_0)\}$ et démontrer qu'il est compact.

4.* On suppose de plus que les points critiques de la fonction U sont isolés, et on les note $\{x_1, \dots, x_{n_0}\}$.

On veut démontrer que pour toute donnée initiale, la trajectoire $x(t)$ converge quand $t \rightarrow +\infty$ et que sa limite est un point d'équilibre.

On introduit 4 notations : $d = \min \|x_i - x_j\|$, $\Omega = \{x/\forall i, \|x - x_i\| \geq \frac{d}{10}\}$ ainsi que $\alpha = \min_{x \in \Omega} \|\nabla U(x)\|$, $\beta = \max_{x \in \Omega} \|\nabla U(x)\|$.

4.a Soit $x: [t_1, t_2] \rightarrow \Omega$ une solution telle que $x(t_1) \in B(x_i, \frac{d}{10})$ et $x(t_2) \in B(x_j, \frac{d}{10})$, mais $x([t_1, t_2])$ ne rencontre aucune des boules $B(x_i, \frac{d}{10})$.

Démontrer que la longueur du chemin p (qui est supérieure à $d - \frac{2d}{10}$) est inférieure à $(t_2 - t_1)\beta$, et en déduire que $t_2 - t_1 \geq \frac{4 \cdot d}{5\beta}$

4.b En remarquant que si $t \in [t_1, t_2]$, $\|\nabla U(x(t))\| \geq \alpha$, montrer que $U(p(t_2)) - U(p(t_1)) \leq -\frac{4\alpha}{5\beta} d$.

4.c En déduire qu'il n'existe pas de suite t_n qui tend vers l'infini telle que $p(t_{2n})$ soit dans la boule centre de rayon p_1 et rayon $d/10$ alors que $p(t_{2n+1})$ soit dans la boule de centre p_2 et de rayon $d/10$.

5. On suppose que pour tous les points critiques de U (les points où $\nabla U = 0$) la Hessienne $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{pmatrix}$ est non dégénérée (son discriminant est non nul). Discuter la stabilité des points critiques.

6. Etudier le cas particulier $U(x, y) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2}$, et esquisser le portrait de phase.

Problème 3.7.2. * Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice dont toutes les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (complexes), ont une partie réelle strictement négative. On rappelle que le produit scalaire est donné par la formule $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

1. En utilisant la forme générale des solutions de l'équation $\frac{dX}{dt} = AX$, démontrer que la fonction $\langle \exp tAx, \exp tAy \rangle$ est une somme de fonctions de la forme $p_{i,j} e^{(\lambda_i + \lambda_j)t}$

2. En déduire que pour l'intégrale $\int_0^\infty \langle \exp tAx, \exp tAy \rangle dt$ est convergente et définit un nouveau produit scalaire $\langle u, v \rangle_n$ sur \mathbb{R}^n défini positif. On note $q(x) = \langle x, x \rangle_n$ le carré scalaire, c'est le carré d'une norme euclidienne sur \mathbb{R}^n .

3. Soit $Y = Ax$ le champ de vecteur linéaire associé à A . Montrer que $Y \cdot q(x) = 2 \langle x, Ax \rangle_n = \int_0^\infty \langle \exp tAx, A \exp tAx \rangle dt = 2 \int_0^\infty \langle x(t), x'(t) \rangle dt = -\langle x, x \rangle_n$

4. En déduire qu'il existe un certain $\alpha > 0$ tel que $Y \cdot q(x) \leq -\alpha q(x)$ et que le long d'une orbite $q(x(t)) \leq e^{-\alpha t} q(x)$

5. Démontrer le cas général du Théorème de Stabilité en vous inspirant du cas particulier traité dans la démonstration du théorème 3.

3.7.6. Système à un degré de liberté.

Exercice 3.7.15. On considère l'équation différentielle $x'' + f(x) = 0$

1. Ecrire l'équation dans l'espace des phases en posant $y = x'$

2. Soit U une primitive de f , Re-démontrer que $E = U + \frac{y^2}{2}$ est une intégrale première de cette équation

3. Dessiner côte à côte le graphe de la fonction U et quelques courbes $E = cte$ pour les exemples suivants.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{2n-1} \\ f(x) &= x - x^3 \\ f(x) &= 1 - x^2 \end{aligned}$$

Dans chacun des cas, on cherchera les positions d'équilibre (points critiques) et on discutera leur stabilité. On décrira les orbites périodiques, homoclines et hétéroclines.

Exercice 3.7.16. On considère l'équation $x'' = -\nabla U(x)$, ou $U(x) = -\frac{U_0}{\text{ch}^2 \alpha x}$

Chercher le minimum d'énergie $E = \frac{1}{2}x'^2 + U(x)$ et montrer que celui-ci est stable.

Pour quelles valeurs de E le mouvement est-il périodique? Calculer alors sa période.

Problème 3.7.3. Champ central et problème de Kepler.^{3.7.1}

On se place dans \mathbb{R}^3 , et on se donne un champ de forces central. Conformément à la tradition nous noterons \vec{r} la position d'un point soumis à la force en question, et $r = \|\vec{r}\|$ sa norme euclidienne, et $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$.

En tout point la force \vec{F} se dirige vers l'origine, autrement dit il existe une fonction $\vec{F}(\vec{r}) = \alpha(\vec{r})\vec{r}$, ou α est peut-être positif (si l'objet est repoussé du centre), peut être négatif (il y est attiré). On étudie l'équation de Newton $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = F(\vec{r})$.

1. Soit $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ la vitesse. Montrer que $m \cdot \vec{v} \wedge \vec{r} = \vec{M}$ reste constant au cours du temps. On le note $M \cdot \vec{k}$, où M est sa longueur et \vec{k} sa direction.

2.

Montrer que au cours du temps le point reste dans le plan Π perpendiculaire au vecteur \vec{M} passant à l'origine.

Ainsi le mouvement reste dans un plan au cours du temps et ce plan ayant un point privilégié, il est tentant de passer en coordonnées polaires, $\vec{r}(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ ce qui veut aussi dire que $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = e^{i\theta(t)}$

On suppose maintenant de plus que la valeur absolue de la force ne dépend que de la distance à l'origine, de sorte que $f(\vec{r}) = g(r)\vec{r}$

3.7.1. Pour plus de renseignements, voir Landau et Lifchitz, mécanique ch.3.

3. Calculer $\frac{d\vec{r}}{dt}$, en coordonnées polaires et montrer que $mr^2 \frac{d\theta}{dt} = M$ reste constant au cours du temps (utiliser 1). C'est la loi des aires.

4. L'énergie cinétique de l'objet est $\frac{1}{2}m \left\langle \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right\rangle$ combien vaut elle en coordonnées polaires ?

5. On suppose que la force dérive d'un potentiel $U(\rho)$, Montre que l'énergie totale est $E = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)$. Ce qui ramène à l'étude d'un système à un degré de liberté dont l'énergie potentielle serait

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)$$

6. On suppose maintenant que le potentiel U est le potentiel de Kepler $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$. Dessiner cote a cote le potentiel efficace $\frac{M^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$ et les trajectoires dans l'espace des phases $r, \frac{dr}{dt}$. En déduire que si $E > 0$ le mouvement s'en va à l'infini, alors que si $E < 0$ l'orbite est périodique.

7. On a $\frac{d\theta}{dt} = \frac{M}{mr^2}$ et $\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E + \frac{\alpha}{r} \right) - \frac{M^2}{mr^2}}$. En déduire que

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{M}{mr^2} \cdot \left(\frac{2}{m} \left(E + \frac{\alpha}{r} \right) - \frac{M^2}{mr^2} \right)^{-1/2}, \text{ et intégrer grâce au changement de variables } x = \frac{1}{r}$$

Montrer que les trajectoires sont de la forme $r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos \theta}$, avec $p = \frac{M^2}{m\alpha}$, $e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$. Ce sont des coniques d'excentricité e , et on retrouve bien les résultats du 6.

CHAPITRE 4

ASPECTS QUALITATIFS

Des aspects très importants de la théorie des équations différentielles n'ont pas encore été abordés. D'abord, comment trouver des solutions approchées (nous avons vu sur de nombreux exemples qu'il est impossible de trouver des solutions exactes) ? Une suite de solutions approchées converge-t-elle vers une vraie solution ? Ensuite est-ce que les solutions sont stables au sens suivant : si on se trompe un peu soit sur l'équation, soit sur la condition initiale, comment cela affecte-t-il le résultat. Les équations différentielles qui ont un sens physique satisfont ce genre de propriété car il est impossible de connaître avec une précision absolue les conditions initiales, les valeurs des paramètres etc. Ce qui ne les empêche pas de décrire de façon très convaincante la réalité.

4.1. LEMME DE GRÖNWALL. SOLUTIONS APPROCHÉES. SCHÉMA D'EULER.

4.1.1. Lemme de Grönwall

Le lemme de Grönwall a déjà été utilisé dans plusieurs cas particuliers.

THÉORÈME 4.1.1. *Lemme de Grönwall.* Soit $\varphi: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe une réelle k et une fonction continue $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\leq f(t) + k \int_0^t \varphi(u) \, du \\ \text{Alors } \varphi(t) &\leq f(t) + k \int_0^t f(u) e^{k(t-u)} \, du \end{aligned}$$

Avant de passer à démonstration, on donne 3 exemples.

COROLLAIRE 4.1.1. 1. Si $0 \leq \varphi(t) \leq k \int_0^t \varphi(u) \, du$ alors $\varphi = 0$. Nous avons déjà utilisé cela dans la démonstration de l'unicité du Théorème de Cauchy Lipschitz.

2. $\varphi(t) \leq a + k \int_0^t \varphi(u) \, du$, alors $\varphi(t) \leq a e^{kt}$
3. $\varphi(t) \leq at + k \int_0^t \varphi(u) \, du$, alors $\varphi(t) \leq \frac{a}{k} (e^{kt} - 1)$

Remarque 4.1.1. Si on dérive $\varphi_1(t) = f(t) + k \int_0^t \varphi_1(u) \, du$, alors on voit que φ_1 satisfait l'équation $\varphi_1' = f' + \varphi_1$, dont la solution telle que $\varphi_1(0) = f(0)$ est $\varphi_1 = f(t) + k \int_0^t f(u) e^{k(t-u)} \, du$. On peut reformuler $\varphi(t) \leq \varphi_1(t)$. Autrement dit le second membre de l'inégalité de Grönwall est la solution de l'équation intégrale $\varphi(t) = f(t) + k \int_0^t \varphi(u) \, du$.

Démonstration. Soit $\Phi(t) = \int_0^t \varphi(u) \, du$. Alors $\Phi'(t) \leq f(t) + k\Phi(t)$. On pose $\Psi(t) = e^{-kt}\Phi$, alors $\Psi'(t) = e^{-kt}(\Phi' - k\Phi) \leq e^{-kt} f(t)$. Donc $\Psi'(t) \leq e^{-kt} f(t)$, $\Psi(t) \leq \int_0^t f(u) e^{-ku} \, du$ et on récupère le résultat, car $\Psi(t) = e^{-kt}\Phi \leq \int_0^t f(u) e^{k(t-u)} \, du$. □

4.1.2. Solutions approchées.

Soit $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction, et $\varepsilon > 0$.

Le lemme de Grönwall va être utile pour comprendre comment fabriquer des solutions approchées à l'équation différentielle $\boxed{\frac{dx}{dt} = f(t, x)}$

A vrai dire, nous n'allons pas rechercher des fonctions dérivables partout, mais C^1 par morceau et avec une dérivée à droite et à gauche en tout point. Ce sont les primitives de fonctions continues par morceau. Très importantes pour nous seront les fonctions linéaires par morceau. En analyse numérique, on utilise aussi les fonctions polynomiales par morceaux (les fonctions splines).

On garde les notations précédentes.

DÉFINITION 4.1.1. Une solution ε approchée de l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ sur un intervalle $[t_0, t_1]$ est une fonction $x(t)$, continue, C^1 par morceaux, dérivable à droite et à gauche en tout point telle que pour tout $t \in [t_0, t_1]$, $(x_1, t) \in \Omega$ et $\left\| \frac{dx}{dt} - f(t, x) \right\| \leq \varepsilon$. En un point où x a seulement une dérivée à droite ou à gauche, on exige que $\|x'_d(t) - f(t, x)\| \leq \varepsilon$ et $\|x'_g(t) - f(t, x)\| \leq \varepsilon$

Cette définition est importante, parce que dans la vraie vie, on ne connaît pas exactement l'équation, et même si on la connaît, il n'y a aucune méthode pour en trouver une solution.

On peut se demander si les solutions approchées approchent bien les solutions, ou pas. Malheureusement sans hypothèse de régularité ça n'est pas le cas. Reprenons l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = \sqrt{x}$ si $x > 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$ sinon. Avec comme condition initiale $x(0) = 0$. Nous avons deux solutions (exactes, donc approchées) à sur $[0, +\infty[$ $x_0(t) = 0$ et $x_1(t) = \frac{1}{4}t^2$.

Fixons nous intervalle de temps, par exemple $[0, 1]$ alors sur cet intervalle on a $\|x_1 - x_0\|_\infty = \frac{1}{4}$, et donc la solution approché x_1 n'approche pas du tout solution x_0 . Grâce au lemme de Grönwall et à la condition de Lipschitz, nous allons démontrer que si $f(t, x)$ est lipschitzienne par rapport à x , cela se passe un peu mieux;

THÉORÈME 4.1.2. On suppose que la fonction f est (globalement sur $\bar{\Omega}$) k -lipschitzienne par rapport à x , c'est à dire que $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|$. Soient x_1 et x_2 deux solutions ε -approchées définies sur un intervalle $[t_0, T]$. Alors pour $t \in [t_0, T]$, on a $\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \|x_1(0) - x_2(0)\|e^{k(t-t_0)} + 2\varepsilon \frac{e^{k(t-t_0)} - 1}{k}$

Démonstration. On pose $\varphi(t) = \|x_1(t) - x_2(t)\| = \left\| x_1(t_0) - x_2(t_0) + \int_{t_0}^t \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) du \right\|$

Ainsi, $\varphi(t) \leq \|x_1(t_0) - x_2(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|f(u, x_1) - f(u, x_2)\| du + \varepsilon(t - t_0)$.

Grace à la condition de Lipschitz, comme $\|x_1(t_0) - x_2(t_0)\| = \varphi(t_0)$ il vient

$\varphi(t) - \varphi(t_0) \leq \varepsilon(t - t_0) + k \int_{t_0}^t \varphi(u) du = (\varepsilon + k)(t - t_0) + k \int_{t_0}^t (\varphi(u) - \varphi(t_0)) du$ et le lemme de Grönwall s'applique. \square

Ainsi, si on fixe un intervalle de temps $[t_0, t_1]$ une solution approchée approche une solution à $2\varepsilon e^{k(t_1-t_0)}$ près. Du point de vue numérique, le terme exponentiel est **catastrophique**. Notons cependant que l'inégalité ne peut pas être améliorée. Si on part de l'équation différentielle linéaire à coefficient constant $\frac{dx}{dt} = ax$, dont la solution est $x(t) = x(0)e^{at}$. Si $x_1(0) = \varepsilon$ la solution $x_1(t) = \varepsilon e^{at}$ est une solution approchée de la solution 0. La solution approchée va diverger de la solution exponentiellement vite : en général, on ne peut pas prédire l'avenir.

Ce problème est connu sous le nom « effet aile de papillon »: une petite erreur (ε) sur les conditions initiales va avoir un effet très important assez rapidement. Par exemple si x mesure une distance en m , alors f est exprimée en $m.s^{-1}$ et sa constante de Lipschitz en s^{-1} soit en Herz. Supposons qu'elle soit de l'ordre de 10^{-2} Hz (f est presque constante $f(x) = f(y) \pm \frac{x-y}{100}$ c'est-à-dire que l'erreur relative sur la vitesse soit de l'ordre de $1/100$ par rapport à la position). Alors au bout d'un temps de 1 heure l'erreur relative $\frac{\Delta x}{x}$ commise sur la position est de e^{36} soit 10^{15} .

Notons néanmoins que ce problème n'apparaîtrait pas, dans l'équation linéaire, pour $a < 0$. Il y a donc des cas où les solutions approchées approchent bien (en temps positif) les solutions. Nous dirons que ce sont des solutions stables .

En faisant, $\varepsilon = 0$, nous « re »-démontrons l'unicité des solutions. Il n'y a rien d'étonnant, nous avons utilisé la même démonstration dans le cas particulier $\varepsilon = 0$.

COROLLAIRE 4.1.2. Sous ces hypothèses, il y a unicité de la solution sur l'intervalle $[0, T]$ \square

4.1.3. Schéma d'Euler

La méthode d'Euler consiste à chercher une solution approchée au problème de Cauchy. On se donne une condition initiale (t_0, x_0) et on cherche une solution linéaire par morceaux sur un intervalle disons $[t_0, T]$.

On divise cet intervalle en n morceaux, disons de longueur $\frac{T-t_0}{n}$. On pose pour simplifier $t_k = t_0 + k\frac{T-t_0}{n}$.

Pour construire une fonction linéaire par morceaux, on procède par récurrence. La valeur de la fonction à l'instant t_0 est x_0 et sa dérivée à droite est $y_0 = f(t_0, x_0)$.

On veut qu'elle soit linéaire par morceaux, alors sa valeur en t_1 est $x_1 = x_0 + \frac{T-t_0}{n}f(t_0, x_0)$. Et on recommence. La valeur au point t_k est donc $x_{k+1} = x_k + \frac{T-t_0}{n}f(t_k, x_k)$.

Malheureusement si on n'a pas fait attention il n'y a aucune raison pour que le couple (t_k, x_k) ne sorte pas de Ω auquel cas le processus s'arrête. Pour cela il va falloir réduire le temps de définition de notre solution.

Soit $x_0 \in \Omega$, $r > 0$. On suppose que $K = \bar{B}(x_0, r) \times [t_0, T'] \subset \Omega$ et on note $A = \max_{(x,t) \in C} \|f\|$

LEMME 4.1.1. Soit $T \leq \max(t_0 + \frac{r}{A}, T')$. La suite x_0, \dots, x_n définie par $x_{k+1} = x_k + \frac{T-t_0}{n}f(t_k, x_k)$ est bien définie.

DÉFINITION 4.1.2. L'ensemble $\bar{B}(x_0, r) \times [t_0, T]$ s'appelle un cylindre de sécurité.

Dans le cylindre de sécurité, on peut alors définir une fonction φ , continue et linéaire par morceaux en disant que sa restriction à chaque intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ est linéaire, et que $\varphi(t_k) = x_k$. La pente de φ en restriction à l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ est $f(t_k, x_k)$.

DÉFINITION 4.1.3. La suite de points $x_{k+1} = x_k + \frac{T-t_0}{n}f(t_k, x_k)$ qui définit la fonction φ s'appelle le schéma d'Euler.

Pour montrer que la fonction ainsi définie est bien, pour n suffisamment grand, une solution ε -approchée, il faut rappeler le théorème de Heine-Borel.

THÉORÈME 4.1.3. Soit f une fonction continue sur un compact. Alors f est uniformément continue : pour $\varepsilon > 0$, il existe α tel que si $\|u - v\| \leq \alpha$ alors $\|f(u) - f(v)\| \leq \varepsilon$.

Exemple 4.1.1. Si f est k -lipschitzienne, la démonstration se simplifie considérablement : on prend $\alpha = \frac{\varepsilon}{k}$

THÉORÈME 4.1.4. Si la fonction f est continue, il existe un nombre T et un entier n_ε tel que pour $n \geq n_\varepsilon$ la fonction linéaire par morceaux $\varphi : [t_0, T]$ telle que $\varphi(t_0 + k\frac{T-t_0}{n}) = x_k$ est une solution ε -approchée de l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} - f(t, x) = 0$ telle que $\varphi(t_0) = x_0$.

Exemple 4.1.2. Si on veut résoudre l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = x$ sur l'intervalle $[0, t]$ avec comme condition initiale $x(0) = 1$, on trouve $\varphi_n(t) = (1 + \frac{t}{n})^n$ comme solution approchée.

Toute le monde sait bien que $\varphi_n(t)$ converge vers e^t , mais pas très vite. Si t est fixé, on a .

$$(1 + \frac{t}{n})^n = e^{n \ln(1 + \frac{t}{n})} = e^{n(\frac{t}{n} - \frac{t^2}{2n^2} + \frac{1}{n^2}o(1))} = e^t \times (1 - \frac{t}{n} + \frac{1}{n^2}o(1))$$

L'erreur relative commise $\frac{|\varphi_n - e^t|}{e^t}$ est donc de l'ordre de $\frac{1}{n}t$. **Le schéma d'Euler converge lentement.**

4.2. CONVERGENCE UNIFORME, THÉORÈME DE CAUCHY-LIPSCHITZ.

Dans ce paragraphe, on considère une suite de solutions approchées et on se demande si elle converge vers une solution. Avant tout il faut rappeler la notion de convergence uniforme, et de norme uniforme.

4.2.1. Convergence uniforme. On fixe un espace vectoriel normé de dimension finie $(E, \|\cdot\|)$. On sait que E est complet, c'est à dire que toute suite de Cauchy d'élément de E converge dans E . Si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, nous considérons l'espace vectoriel $C_b(I, \mathbb{E})$ des fonctions continues et bornées sur E , muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup_{t \in I} \|x(t)\|$

Une suite de fonctions x_n converge vers la fonction x^* au sens de cette norme si et seulement si elle converge uniformément vers x^* , c'est-à-dire qu'on a la proposition suivante.

PROPOSITION 4.2.1. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $C_b(I, \mathbb{E})$ et soit $x^* \in C_b(I, \mathbb{E})$. On a l'équivalence entre

- i. La suite de fonctions x_n converge uniformément vers x^* .
- ii. $\|x_n - x^*\|_\infty$ tend vers 0.
- iii. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0/n \geq n_0, \forall x \in I, \|x_n(t) - x^*(t)\| < \varepsilon$.

Un théorème très important du cours de Topologie est :

THÉORÈME 4.2.1. Muni de sa norme $\|\cdot\|_\infty$, l'espace vectoriel $C_b(I, \mathbb{E})$ est un complet. ■

L'étudiant voulant réviser ce sujet est invité à faire le problème proposé en fin de chapitre.

Ce qui est important pour nous est qu'une suite uniformément de Cauchy (c'est à dire de Cauchy pour la norme uniforme) converge uniformément vers une fonction continue.

4.2.2. Théorème de Cauchy-Lipschitz. Première méthode.

Soit $\Omega \subset I \times E$ un ouvert, $f: \Omega \rightarrow E$ une fonction continue. On veut résoudre le problème de Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)), x(t_0) = x_0. \text{ Supposons donnée une suite } x_n \text{ de solutions } \varepsilon_n\text{-approchées.}$$

LEMME 4.2.1. Soit $T \geq 0$, et ε_n une suite qui tend vers 0. On suppose donnée une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de solution ε_n approchée telles que $x_n(t_0) = x_0$ et définie sur l'intervalle $[0, T]$. Si, dans $C([t_0, T], E)$, la suite x_n et de Cauchy elle converge uniformément vers une fonction de classe C^1 qui est solution de l'équation différentielle.

Remarque 4.2.1. Ce qui est important ici c'est qu'a priori, la limite x^* est simplement une fonction continue. On doit démontrer qu'elle est C^1 .

Démonstration. On écrit $x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, x_n(u)) du$. Pour pouvoir passer à la limite il faut s'assurer que sur $[0, T]$ la suite $f_n(u) = f(u, x_n(u))$ converge uniformément vers $f(t, x^*(u))$. Admettons cela un instant. En passant à la limite, on a $x^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, x^*(u)) du$. Il en résulte que x^* est bien C^1 et que c'est une solution de l'équation différentielle.

Nous démontrons la convergence uniforme de deux façons.

1. Si on suppose de plus que f est k -lipschitzienne par rapport à x , $\|f(u, x_n(u)) - f(u, x^*(u))\| \leq k \|x_n - x^*\|$, d'où le résultat.

2. Le cas général est un peu plus compliqué. Soit $K \subset \Omega$ un petit voisinage compact du graphe de x^* . Si sorte si $n \geq n_0$ le graphe de x_n reste dans K . Comme la fonction f y est continue, elle y est uniformément continue. Donc si $\varepsilon > 0$ est fixé, il existe un α tel que si $\|x_n - x^*\| < \alpha$ alors $\|f(u, x_n(u)) - f(u, x^*(u))\| \leq \varepsilon$. Comme la suite x_n converge uniformément vers x^* , alors α étant donné, il existe un entier n_0 à partir duquel $\|x_n - x^*\| < \alpha$ cqfd.

3. Comme f est continue sur le compact K elle y est bornée, et on peut passer à la limite en utilisant le théorème de convergence dominée. □

On peut alors déduire le théorème de Cauchy Lipschitz.

THÉORÈME 4.2.2. (Cauchy Lipschitz) Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(t, x)$ une fonction continue. On suppose que f est localement lipschitzienne par rapport à la variable x , par exemple que f est C^1 sur Ω . Pour toute donnée initiale (t_0, x_0) il existe un couple ε, r tel que $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \bar{B}(x_0, r) \subset \Omega$ et une fonction $x: [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \rightarrow B(x_0, r)$ telle que $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$.

Si $x_1: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une autre solution, alors sur l'intervalle $I \cap [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, $x = x_1$.

Démonstration. On récolte les fruits de notre étude.

1. Comme f est « localement lipschitzienne par rapport à x , il existe un réel $k \geq 0$, un voisinage de (t_0, x_0) dans Ω $V_1 = \{\|x - x_0\| \leq r_1, \|t - t_0\| \leq \alpha_1\}$ tel que pour la restriction de f à V_1 soit k lipschitzienne par rapport à x . Comme V_1 est compact, f y est bornée par un nombre disons A . Soit $t_1 \leq \max(t_0 + \frac{r}{A}, t_0 + \alpha_1)$. Le schéma d'Euler x_n est bien défini sur l'intervalle $[t_0, t_1]$. Il existe une suite ε_n qui tend vers 0 telle que x_n soit une solution ε_n approchée de l'équation différentielle. D'après le lemme de Grönwall $\|x_n(t) - x_m(t)\| \leq (\varepsilon_n + \varepsilon_m) \frac{e^{k(t-t_0)} - 1}{k}$, et donc $\|x_n - x_m\|_\infty \leq \varepsilon_n + \varepsilon_m$, ce qui démontre que dans $C_b[t_0, t_1]$ la suite est de Cauchy. D'après le résultat précédent, elle converge uniformément vers une solution. On a donc une solution sur $[t_0, t_1]$ et de même on aurait un $t_2 < t_1$ et une solution sur l'intervalle $[t_2, t_0]$. L'unicité a déjà été établie. \square

Question 1. On a utilisé l'hypothèse « lipschitzienne » plusieurs fois dans la démonstration. Sauriez vous dire ou exactement ?

4.2.3. Méthode de Picard

La méthode des approximations successive de Picard permet de démontrer l'existence d'une solution de façon très rapide. Elle est basée sur le théorème du point fixe

THÉORÈME 4.2.3. Soit X un espace métrique complet $0 \leq \lambda < 1$ une constante et $\Phi: X \rightarrow X$ une application λ contractante, c'est à dire une application λ -lipschitzienne, $d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq \lambda d(x, y)$. Alors f admet un unique point fixe x^* . Pour tout point x_0 de X , ce point fixe est la limite de la suite $x_n = \Phi(x_{n-1})$. La convergence de cette suite est exponentielle $\|x_n - x^*\| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \|x_1 - x_0\|$.

Démonstration. Soit $m \geq n$ On vérifie, par récurrence que $d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda^n d(x_1, x_0)$. Il en résulte que $d(x_m, x_n) \leq d(x_1, x_0) \times \frac{\lambda^n}{1-\lambda}$, et que la suite est de Cauchy. Comme l'espace est complet, elle converge. Comme Φ est continue, sa limite est un point fixe. \square

On considère alors toujours notre problème de Cauchy. Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(t, x)$ une fonction continue. On considère une donnée initiale (t_0, x_0) et on cherche à résoudre l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = f(t, x), x(t_0) = x_0}$$

On s'empresse d'écrire cette équation $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, x(u)) du$.

Soit Φ est l'opérateur $C([t_0, t_1], E) \rightarrow C([t_0, t_1], E)$ « défini » par cette formule. Ainsi, une solution du problème de Cauchy est un point fixe de Φ .

Le premier problème c'est que Φ n'est pas tout a fait défini. En effet pour que la formule ait un sens, il faut que pour tout $u \in [t_0, t]$, $f(u, x(u)) \in \Omega$. Si c'est le cas, par exemple si f est bien définie sur $\mathbb{R} \times E$ on peut étudier Φ et ses itérées.

Le second problème est qu'on ne peut pas appliquer directement le théorème des points fixes, car Φ est définie entre deux espaces métriques différents (et le premier n'est même pas complet en général). L'idée va être de restreindre Φ à un cylindre de sécurité, exactement comme on l'a fait quand on a démontré qu'il existe des solution ε approchée.

Comme f est continue il existe un voisinage de t_0, x_0 de la forme $[t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1] \times \bar{B}(x_0, r)$ contenu dans Ω tel que sur ce voisinage $\|f(t, x)\| \leq \|f(t_0, x_0)\| + 1 = A$.

On considère alors $\varepsilon = \min(\frac{r}{A}, \varepsilon_1)$ de sorte que $A \cdot \varepsilon < r$

LEMME 4.2.2. Si $x \in C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \bar{B}(x_0, r))$, $\Phi(f)$ aussi.

Démonstration. $\Phi(x)(t) - x_0 = \int_{t_0}^t f(u, x(u)) du$ donc $\|\Phi(x)(t) - x_0\| \leq A \cdot \varepsilon \leq r$. \square

On va maintenant utiliser le fait que f est k lipschitzienne par rapport à x . On suppose évidemment ε_1 et r choisis de sorte que si x et y sont dans $\bar{B}(x_0, r)$, $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k \|x - y\|$.

On a alors $(\Phi(x) - \Phi(y))(t) = \int_{t_0}^t f(u, x(u)) - f(u, y(u)) du$, donc $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq k \cdot \varepsilon \cdot \|x - y\|$

Ainsi, si ε est choisi de sorte que $k\varepsilon = \lambda < 1$, par exemple $\varepsilon < \text{Min}\left(\frac{k}{2}, \frac{r}{A}, \varepsilon_1\right)$ Φ devient λ contractante.

LEMME 4.2.3. *Soit $\lambda < 1$. Si ε est suffisamment petit, la restriction de Φ à $C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \bar{B}(x_0, r))$ est une λ contraction. \square*

On peut alors appliquer le théorème du point fixe.

THÉORÈME 4.2.4. *Il existe un $\varepsilon > 0$ et une solution x au problème de Cauchy sur l'intervalle $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$.*

Cette solution est unique au sens suivant si x_1 est une autre solution définie sur $[t_0 - \eta, t_0 + \eta]$ alors x_1 et x coïncident sur $[t_0 - \min(\varepsilon, \eta), t_0 + \min(\varepsilon, \eta)]$.

Remarque 4.2.2. On a encore fait une petite escroquerie. Il faut vérifier que $C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \bar{B}(x_0, r))$ est complet. Mais c'est un fermé dans un espace complet.

Remarque 4.2.3. On pourrait penser que la méthode des approximations successives de Picard, qui converge exponentiellement vite, est bien plus efficace que la méthode des solutions approchées d'Euler (qui converge en $\frac{1}{n}$). Ce n'est qu'une impression. La méthode de Picard nous demande de calculer une intégrale $\int_{t_0}^t f(u, x(u)) du$ ce qui est très couteux. On peut aussi faire un mix Euler-Picard en subdivisant l'intervalle en n morceaux et en étudiant un opérateur de la forme $x_N(t_n) = x_{N-1}(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(x_{N-1}, u) du$, ce qui donne des fonctions polynomiales par morceaux de degré N . La méthode la plus célèbre pour trouver des solutions approchées est celle de Runge et Kutta, mais il y a des centaines de méthodes adaptées à des situations différentes.

4.3. RÉGULARITÉ DES SOLUTIONS. LINÉARISATION.

4.3.1. Dépendance des conditions initiales.

Soit $\Omega \subset I \times E \times U$ un ouvert, $f: \Omega \rightarrow E$, $f(t, x)$ une fonction C^1 . On veut étudier le problème de Cauchy $\frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x$ quand la condition initiale varie au voisinage d'un point x_0

On a déjà vu la dépendance continue (grâce au Lemme de Grönwall) quand la fonction est lipschitzienne par rapport à la seconde variable.

Notons $\varphi(t, x)$ la solution de l'équation avec $\varphi(t_0, x) = x$.

On a $\frac{d\varphi(t, x)}{dt} = f(t, \varphi(t, x))$.

Si tous les vents sont favorables, on peut dériver cette équation par rapport à chaque coordonnée x_1 de la position initiale, et un calcul simple montre que :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t, x)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

Ici, pour chaque t fixé, $\frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t, x))$ est une application linéaire de \mathbb{R}^n dans lui-même, alors que $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ est un vecteur colonne.

Détaillons. Si f est la fonction $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ alors $\frac{\partial f}{\partial x}$ est la matrice $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$.

Si donc nous fixons une solution $x(t)$ telle que $x(t_0) = x_0$, cette équation devient une équation différentielle **linéaire** définie sur l'intervalle $[t_0, t_1]$

$$\boxed{\frac{d}{dt} X = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t)) \cdot X}$$

DÉFINITION 4.3.1. *On suppose que f est de classe C^1 et on se donne une solution $x(t)$ de l'équation différentielle définie sur l'intervalle $[t_0, t_1]$. L'équation linéaire $\frac{d}{dt} X = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t)) \cdot X$ s'appelle l'équation de variation.*

Exemple 4.3.1. On suppose que l'équation est autonome $f(t, x) = f(x)$ est donc un champ de vecteurs. Si x_0 annule f , c'est donc un point d'équilibre, et $x(t) = x_0$ est la solution. L'équation linéarisée est juste $\frac{d}{dt} X = A \cdot X$, où $A = f'(x_0)$ est la matrice jacobienne de f . Nous avons déjà vu cette équation quand on a étudié les positions d'équilibre.

THÉORÈME 4.3.1. *Admis. Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^m , $m \geq 1$. Soit $t_0, x_0 \in \Omega$, et $[t_0, t_1]$ un intervalle de temps sur lequel est défini une solution au problème de Cauchy $\frac{dx}{dt} = f(t, x_0(t)), x_0(t_0) = x_0$.*

1. *Il existe un voisinage V de x_0 et une fonction $\varphi(t, x)$ définie sur $[t_0, t_1]$ qui soit solution au problème de Cauchy $\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)), x(t_0) = x_0$.*

2. *De plus φ est de classe C^m , et $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x_0)$ est la valeur à l'instant t de la solution de l'équation au variations $\frac{d}{dt} X = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0(t)) \cdot X$*

A vrai dire, ce théorème qui semble très difficile ne l'est pas vraiment en pratique. Si on sait que $\varphi(t, x)$ est dérivable par rapport à x , pour calculer sa dérivée, on dérive juste l'équation $\frac{d\varphi(t, x)}{dt} = f(t, \varphi(t, x))$

Par exemple dans le cas d'un champ de vecteurs autonome, si $x_0(t)$ est déjà une solution

$$\frac{d\varphi(t, x)}{dt} = f(\varphi(t, x)), \text{ et donc } \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi(t, x_0)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0(t)) \cdot \frac{\partial \varphi(t, x_0)}{\partial x}.$$

4.3.2. Variation par rapport à un paramètre

Il arrive très souvent qu'au lieu de faire varier la condition initiale, on ait une équation différentielle qui dépende d'un paramètre, et qu'on « connaisse » une solution pour une valeur spéciale du paramètre. On veut alors étudier ce qui se passe quand on bouge un peu le paramètre. Ceci est en fait un cas particulier du cas précédent, quitte à rajouter une dimension. Il suffit de dire que le paramètre est (plus exactement fait partie de) la condition initiale et qu'il reste constant.

Soit donc $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ un ouvert et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction supposée de classe C^1

On étudie l'équation différentielle à paramètre :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), \lambda), x(t_0) = x_0 \text{ au voisinage d'une solution } x(t, \lambda_0)$$

En posant $y = (x, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on peut voir ceci comme un cas particulier de l'équation $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$, $y(0) = (x_0, \lambda)$ dont la condition initiale dépend d'un paramètre. Le théorème de différentiabilité par rapport aux paramètres s'applique, et on a juste besoin de calculer la dérivée partielle par rapport à la dernière coordonnée du vecteur y qui se trouve être λ .

THÉORÈME 4.3.2. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ un ouvert et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^m , $m \geq 1$. Soit $t_0, x_0, \lambda_0 \in \Omega$, et $[t_0, t_1]$ un intervalle de temps sur lequel est défini une solution x_{λ_0} au problème de Cauchy $\frac{dx}{dt} = f(t, x_0(t), \lambda_0), x_0(t_0) = x_0$.*

1. *Il existe un voisinage V de x_0 , un $\eta > 0$ et une fonction $x_\lambda(t)$ définie sur $[t_0, t_1] \times V \times]\lambda_0 - \eta, \lambda_0 + \eta[$ qui soit solution au problème de Cauchy $\frac{dx}{dt} = f(t, x_\lambda(t), \lambda), x_\lambda(t_0) = x_0$.*

2. *De plus φ est de classe C^m , et $\frac{\partial x_\lambda}{\partial \lambda}(t, x_0)$ est la valeur à l'instant t de la solution de l'équation au variations $\frac{d}{dt} \frac{\partial x_\lambda}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_{\lambda_0}(t), \lambda_0) \cdot \frac{\partial x_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, x_{\lambda_0}(t), \lambda_0)$ telle que $\frac{\partial x_\lambda}{\partial \lambda}(t_0) = 0$*

Remarque 4.3.1. Ici l'équation au variation est une équation différentielle linéaire avec second membre.

Comme dans le cas du théorème précédent, ce qui est compliqué c'est de démontrer que x_λ est dérivable par rapport à λ . Si on le sait, il n'y a pas de raison de se gêner : l'équation aux variations s'obtient juste en dérivant. Mieux, si on sait que c'est C^∞ , rien n'interdit de chercher un développement limité.

Détaillons un exemple. On considère l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = x + \lambda(t + x^2)$, avec la condition initiale $x(0) = 1$. On demande de trouver $\frac{\partial x_\lambda}{\partial \lambda}$ pour $\lambda = 0$.

$$\text{On reporte } \frac{dx_\lambda}{dt} = x_\lambda + \lambda(t + x_\lambda^2)$$

On dérive et on fait $\lambda = 0$

$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_\lambda}{\partial \lambda} = \frac{\partial x_\lambda}{\partial \lambda} + t + x_0^2 = \frac{\partial x_\lambda}{\partial \lambda} + t + e^t$, soit $\frac{dy}{dt} = y + t + e^t$, qui se résout par la méthode de la variation des constantes. $y(t) = e^t \int_0^t (u e^{-u} + 1) du$. Ainsi

$$x_\lambda(t) = x_0(t) + \lambda y(t) + o(\lambda).$$

Une autre méthode est de chercher formellement un développement limité $x_\lambda = x_0 + \lambda y + o(\lambda)$ et de reporter dans l'équation. On trouve évidemment la même chose.

4.4. EXERCICES DU CHAPITRE 4.

4.4.1. Lemme de Grönwall.

On rappelle que le cas particulier du lemme de Grönwall permet de comparer une solution exacte et une solution ε -approchée avec le même condition initiale. Si x est une solution de l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ définie sur un intervalle $[t_0, T]$, si x_ε est une solution ε approchée de la même équation telle que $x_\varepsilon(t_0) = x(t_0) = x_0$, si f est k lipschitzienne par rapport à x , alors $\|x_\varepsilon(t) - x(t)\| \leq \varepsilon \frac{e^{k(t-t_0)} - 1}{k}$

Exercice 4.4.1. Donner un exemple où il y a égalité dans l'inégalité de Grönwall.

Exercice 4.4.2. On considère l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = t + \sin(x)$. Soit x_0 la solution telle que $x(0) = 0$, et x_1 celle pour laquelle $x(0) = 0, 1$ estimer le maximum de $|x_1(t) - x_0(t)|$ sur l'intervalle $[0, T]$. Pour quelle t l'erreur relative obtenue en remplaçant x_1 par x_0 est elle inférieure à 1%.

On considère l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = x - y, \frac{dy}{dt} = t \cdot x$ avec comme condition initiale, $x(0) = 1, y(0) = 0$.

Soit $x_\varepsilon(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2}, y_\varepsilon(t) = \frac{1}{2}t^2$. Trouver un majorant de l'erreur commise sur l'intervalle $[0, 0.1]$ si on remplace la solution par la solution approchée.

Exercice 4.4.3. Soient ψ et y deux fonctions continues définies sur $[t_0, t_1]$ et à valeurs dans \mathbb{R}^+ et c une constante telles que :

$$y(t) \leq c + \int_{t_0}^t \psi(u)y(u) du$$

En posant $F(t) = \int_{t_0}^t \psi(u)y(u) du$ et en étudiant la fonction de classe C^1 $G(t) = F(t) \exp - \int_{t_0}^t \psi(u) du$, montrer que $y(t) \leq c \exp(\int_{t_0}^t \psi(u) du)$

Soit x une solution de $x'' + q(t)x = 0$, où $q: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction croissante strictement positive (et donc minorée par $q(0)$).

Montrer que $x'^2 + q(t)x^2 = K + \int_0^t q'(s)x^2(s) dt$
En déduire que x est bornée

4.4.2. Euler et Picard.

Exercice 4.4.4. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Ecrire le schéma d'Euler pour l'équation $\frac{dx}{dt} = f(t)$, $x(t_0) = x_0$. Que constate-t-on? Et si on fait la méthode de Picard?

Mêmes questions avec l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = x, x(0) = x_0$.

Exercice 4.4.5. (Numérique) Ecrire la méthode d'Euler pour trouver une solution approchée au problème de Cauchy, dans les exemples suivants. On subdivise l'intervalle en 10 parties égales. On pourra faire le calcul à la main ou avec son logiciel préféré.

$x' = x + t, x(0) = 1$ pas $h = 0, 1$, on subdivise en 10 intervalles. Combien vaut $x(1)$? et la vraie solution?
 $x' = -\frac{x}{1+t}, x(0) = 2$. Combien vaut $x(1)$? Et la vraie solution?

Exercice 4.4.6. (Numérique) S'inspirer de l'annexe A pour écrire le schéma d'Euler d'une équation différentielle, par exemple l'équation des lynx et des lapins.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(1-y) \\ y(1-x) \end{pmatrix} \text{ définie sur l'ouvert } 2 > x > 0, 2 > y > 0$$

Perturber un peu cette équation avec un petit terme comme $\begin{pmatrix} (\frac{x-1}{2})^2 \sin y \\ (\frac{y-1}{2})^2 \cos y \end{pmatrix}$ pour voir le résultat.

Exercice 4.4.7. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $A: I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ une application continue, soit $[t_0, t_1] \subset I$ un intervalle compact. Soit $k = \max_{t \in [t_0, t_1]} \|A\|$. On considère l'équation différentielle linéaire $\frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x, x(t_0) = x_0$

On considère l'opérateur Φ de Picard qui définit une application affine continue $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ par la formule $\Phi_{x_0}(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(u)x(u) du$

1. Montrer que $\|\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)\| \leq k(t - t_0)$
2. Puis que $\|\Phi^n(x)(t) - \Phi^n(y)(t)\| \leq k^n \frac{(t - t_0)^n}{n!}$

3. En déduire qu'il existe une puissance Φ^{n_0} de Φ qui soit $1/2$ contractante, et que la solution au problème de Cauchy est bien définie et unique sur tout l'intervalle I . On vérifiera qu'une fonction est un point fixe de Φ si et seulement si c'est un point fixe de Φ^{n_0} .

4. Même question si on ne suppose plus l'équation différentielle linéaire, mais seulement globalement k lipschitzienne; c'est à dire $f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k |x - y|$.

Exercice 4.4.8. Sortie de tout compact.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Soit $K \subset \Omega$ un compact, et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un T (dépendant de ε et K) tel que pour toute donnée initiale x_0 dans K , il existe une solution ε approchée de l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = f(x)$ telle que $x(0) = x_0$ définie sur l'intervalle $[0, T]$. On suppose de plus que f est localement lipschitzienne. Démontrer que si $x_0 \in K$, et $x: [0, T[\rightarrow \Omega$ est la solution maximale du problème de Cauchy, soit $t = +\infty$, soit T est fini et il existe un instant t_1 tel que si $t > t_1$ $x(t) \notin K$. Autrement dit $x(t)$ sort de K et n'y revient jamais.

4.4.3. Convergence uniforme.

Il s'agit ici d'un exercice sur la convergence uniforme, à destination des étudiants souhaitant approfondir leur connaissances.

Exercice 4.4.9. Soit X un ensemble et $E, \|\cdot\|$ un espace vectoriel normé complet (par exemple de dimension finie). L'ensemble des fonctions bornées $\mathcal{F}_b(X, E)$ est un espace vectoriel. Si $f \in \mathcal{F}_b(X, E)$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$

1. Montrer, que muni de cette norme, $\mathcal{F}_b(X, E)$ est un espace complet.
2. On suppose de plus que X est un espace topologique (par exemple un espace métrique) et on fixe un point $x_0 \in X$. Montrer que l'ensemble des fonctions discontinues en x_0 est un ouvert, et que l'ensemble des fonctions continues en x_0 est un fermé.
3. Montrer que l'ensemble des fonctions continues bornées, muni de la norme $\|f\|_\infty$ est un espace complet.
4. Soient f_n une suite de fonctions continues et bornées sur X qui converge uniformément vers une fonction. Montrer que cette fonctions est continue et bornée.

4.4.4. Dépendance par rapport à la condition initiale.

Exercice 4.4.10. On veut étudier le comportement d'un système conservatif a un degré de liberté au voisinage de sa position d'équilibre. Il satisfait l'équation différentielle

$$x'' = -f'(x).$$

On suppose que f est de classe C^n , atteint un minimum non dégénéré en 0, et qu'on a un développement limité.

$$f'(x) = \omega^2 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + o(x_n)$$

On sait que, si $x(t, h)$ est la valeur à l'instant t de la solution de l'équation telle que $x(0, h) = h, x'(0, h) = 0$, alors x est de classe C^{n+1} par rapport à h et, comme $x_0(t) = 0$ on a

$$x(t, h) = x_1(t)h + \dots + x_n(t)\frac{h^n}{n!} + h^n \eta(t, h),$$

où les fonctions x_i sont de classe C^n ainsi que η . Pour h fixé, et pour $k = 1$ ou 2.

$$x^{[k]}(t, h) = x_1^{[k]}(t)h + \dots + x_n^{[k]}(t)\frac{h^n}{n!} + h^n \eta^{[k]}(t, h)$$

Quelle équation différentielle satisfont x_1, x_2 ? (on précisera les conditions initiales).

Résoudre ces équations.

Montrer qu'en général x_k satisfait une équation différentielle linéaire dont le second membre est un polynôme en x_1, \dots, x_{k-1} , et en déduire que x_k est un quasi-polynôme.

ANNEXE A

Schéma d'Euler pour le modèle SIR

Le schéma d'Euler a le bon gout d'être facile à mettre en oeuvre numériquement (même si en général, il ne converge pas très vite). Voici un exemple dans le cas du modèle SIR.

```
% Paramètres de l'équation
beta = 0.3; % Taux de transmission de la maladie
gamma = 0.07; % Taux de guérison de la maladie
N = 10000; % Taille de la population totale
I0 = 5; % Nombre initial d'individus infectés
R0 = 0; % Nombre initial d'individus guéris ou morts.
S0 = N - I0 - R0; % Nombre initial d'individus susceptibles de tomber malades

% Intervalle de temps
t_start = 0;
t_end = 200;
delta_t = 1;

% Initialisation
t_values = t_start:delta_t:t_end;
S_values = zeros(1, length(t_values));
I_values = zeros(1, length(t_values));
R_values = zeros(1, length(t_values));
S_values(1) = S0;
I_values(1) = I0;
R_values(1) = R0;

% Méthode d'Euler pour résoudre l'équation SIR
for i = 2:length(t_values)
    dS_dt = -beta * S_values(i-1) * I_values(i-1) / N;
    dI_dt = beta * S_values(i-1) * I_values(i-1) / N - gamma * I_values(i-1);
    dR_dt = gamma * I_values(i-1);

    S_values(i) = S_values(i-1) + delta_t * dS_dt;
    I_values(i) = I_values(i-1) + delta_t * dI_dt;
    R_values(i) = R_values(i-1) + delta_t * dR_dt;
end

% Représentation graphique des solutions
plot(t_values, S_values, '-b', 'LineWidth', 2, t_values, I_values, '-r', 'LineWidth', 2, t_values, R_values, '-g', 'LineWidth', 2);
xlabel('Temps');
ylabel('Nombre d''individus');
title('Modèle SIR en épidémiologie');
legend('Susceptibles (S)', 'Infectés (I)', 'Remis (R)');
grid on;

text(x=90, y=5000, sprintf('\beta = %.2f', beta), '+', 12, 'FontWeight', 'bold')
text(x=90, y=3000, sprintf('\gamma = %.2f', gamma), 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold')
```

Portrait de phase d'un champ de vecteurs.

Le script suivant permet de dessiner un champ de vecteur dans le plan à partir d'un exemple.

Ici, nous prenons le champ $X = (y - 0.3 \sin y) \frac{\partial}{\partial x} + (0.2y + \sin(x)) \frac{\partial}{\partial y}$, ou si l'on veut l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 0.3 \sin y \\ \frac{dy}{dt} = 0.2y + \sin(x) \end{cases}$$

Sur le domaine $[-4, 5] \times [-2, 2]$

On peut l'adapter pour dessiner n'importe quel champs pas trop compliqué donné analytiquement.

% Paramètres

```
x = [-4; 5];  
y = [-2; 2];  
num_points = 20;
```

```
function plot_phase_portrait( x, y, num_points)  
    [X, Y] = meshgrid(linspace(x(1), x(2), num_points), linspace(y(1), y(2), num_points));  
    U = Y - 0.3 * sin(Y);  
    V = 0.2 * Y + sin(X);  
  
    figure;  
    quiver(X, Y, U, V, 'b');  
    xlabel('x');  
    ylabel('y');  
  
    grid on;  
    axis tight;
```

```
end
```

% Afficher le portrait de phase.

```
plot_phase_portrait( x, y, num_points);
```