Calcul élémentaire des probabilités

Myriam Maumy-Bertrand[1] et Thomas Delzant[1]

[1]IRMA, Université Louis Pasteur
Strasbourg, France

Licence 1ère Année 16-02-2006

Sommaire

Rappel : le langage des probabilités.

Définition

- **Un ensemble probabilisé** *est un ensemble abstrait noté Ω qui décrit pour une expérience donnée tous les événements possibles.*
- **Un événement élémentaire** *est un élément de Ω.*
- **Un événement** *est un sous-ensemble de Ω.*

À chaque événement $A \subset \Omega$ est associé un nombre $\mathbb{P}[A]$ appelé probabilité de A.

Règles de calcul des probabilités.

La fonction $A \to \mathbb{P}[A]$ satisfait des axiomes simples et naturels.

RÈGLES :

- $\mathbb{P}[\Omega] = 1$.
- $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$.
- Si A et B sont disjoints, alors on a : $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$.

Définition

On note souvent $\bar{A}$ **l'événement contraire de** A*, de sorte que* $\bar{A} \cup A = \Omega$.

RÈGLES :

- Comme A et $\bar{A}$ sont disjoints, alors $\mathbb{P}\left[\bar{A}\right] = 1 - \mathbb{P}[A]$.
- Si A et B sont **indépendants**, alors $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \times \mathbb{P}[B]$.

Exemple 1.

On lance au hasard un dé.
Quelle est la probabilité d'obtenir le chiffre 5 ?

On lance deux fois au hasard un dé.
Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois le chiffre 5 ?

Exemple 2.

Un dé est truqué. Après de nombreuses expériences, on remarque que la probabilité de tirer deux fois le chiffre 5 en jouant successivement deux fois avec ce dé est $\frac{1}{16}$.
Quelle est la probabilité de tirer le chiffre 5 en lançant une seule fois le dé ?

Réponse :

Cette probabilité vaut $\frac{1}{4}$.

Exemple 3.

Le gène de la mucovisidose est récessif. On constate qu'en France, sur 60.10^6 habitants, 8000 sont atteints de cette maladie.
Quelle est la probabilité qu'un individu soit porteur d'au moins un gène de la mucovisidose ?

Réponse :

Tout se passe comme si on jouait au dé en tirant au hasard deux chromosomes.
Soit p la probabilité qu'un chromosome soit porteur du gène en question.
On a donc $p^2 = \dfrac{8 \times 10^3}{6 \times 10^7}$.
Donc $p = \sqrt{\dfrac{8}{6}} \times 10^{-2} = 1.15 \times 10^{-2}$.
Comme on a deux chromosomes, la probabilité que l'un au moins soit porteur est donc égale à

$$\begin{aligned} 1-(1-p)^2 &= 2p - p^2 \\ &\simeq 2.30 \times 10^{-2}. \end{aligned}$$

Sommaire

Probabilités conditionnelles. Formule de Bayes.

Définition formelle.

On a un ensemble probabilisé Ω.

On a deux événements notés A et B. On sait (pour une raison ou pour une autre) que B s'est produit.
Quelle est la probabilité que A ait lieu ?

Formule de Bayes : $\mathbb{P}[A|B] = \dfrac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$,

où $\mathbb{P}[A|B]$ se lit probabilité de A sachant B.

Exemple 1.

Deux usines fabriquent des ampoules.

1% des ampoules fabriquées par la première usine et 3% des ampoules fabriquées par la seconde usine sont défectueuses.

Dans un lot de 1000 ampoules, 600 viennent de la première usine et 400 de la seconde usine. On tire au hasard une ampoule et celle-ci est défectueuse.

Quelle est la probabilité pour que l'ampoule défectueuse provienne de la première usine ?

Réponse.

Soit A l'événement « l'ampoule vient de la première usine »et B l'événement « l'ampoule provient de la seconde usine ».

Soit D l'événement « l'ampoule est défectueuse ».

On nous demande de calculer $\mathbb{P}[A|D]$.

D'après la formule de Bayes, on obtient :

$$\mathbb{P}[A|D] = \frac{\mathbb{P}[A \cap D]}{\mathbb{P}[D]} = \frac{\frac{6}{1000}}{\frac{6+12}{1000}} = \frac{1}{3}.$$

Exemple 2. (Test d'une maladie.)

On dispose d'un test de dépistage d'une maladie. En principe, celui-ci est positif si le patient est malade, mais le test n'est pas fiable à 100%.

Plus précisément, si le patient est malade alors le test est positif 99.9 fois sur 100.

Mais 4 fois sur 1000 il est positif sur une personne non malade.

Environ $\frac{2}{1000}$ de la population est atteinte de la maladie.

Quelle est la probabilité qu'une personne soit malade sachant que le test est positif ?

Réponse.

Soit A l'événement « une personne est malade »et T l'événement « le test est positif ».

On nous demande de calculer $\mathbb{P}[A|T]$.

On connait trois probabilités :

- $\mathbb{P}[T|A] = \dfrac{\mathbb{P}[T \cap A]}{\mathbb{P}[A]}$,
- $\mathbb{P}[A]$,
- $\mathbb{P}\left[T|\bar{A}\right] = \dfrac{\mathbb{P}\left[T \cap \bar{A}\right]}{\mathbb{P}\left[\bar{A}\right]}$.

Suite de la réponse.

On représente les quatre cas possibles sous forme d'un tableau qu'on va essayer de compléter au fur et à mesure.

	A	$\bar{A}$
T	$\mathbb{P}[A \cap T]$	$\mathbb{P}[\bar{A} \cap T]$
$\bar{T}$	$\mathbb{P}[A \cap \bar{T}]$	$\mathbb{P}[\bar{A} \cap \bar{T}]$

Suite de la réponse.

On sait que

$$\mathbb{P}[A] = \frac{2}{1000}.$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}[\bar{A}] = \frac{998}{1000}.$$

D'autre part, on sait que

$$\mathbb{P}[T|A] = \frac{99.9}{100} = \frac{999}{1000}.$$

Ainsi on en déduit que

$$\mathbb{P}[A \cap T] = \mathbb{P}[T|A] \times \mathbb{P}[A] = \frac{999 \times 2}{1000 \times 1000} = \frac{1998}{1000000}.$$

Suite de la réponse.

On sait aussi que

$$\mathbb{P}\left[T|\bar{A}\right] = \frac{4}{1000}.$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}\left[\bar{A} \cap T\right] = \mathbb{P}\left[T|\bar{A}\right] \times \mathbb{P}\left[\bar{A}\right] = \frac{4 \times 998}{1000 \times 1000} = \frac{3992}{1000000}.$$

Comme $\mathbb{P}[T] = \mathbb{P}\left[T \cap \bar{A}\right] + \mathbb{P}[T \cap A] = \dfrac{599}{100000}$,
il en résulte que

$$\mathbb{P}[A|T] = \frac{\mathbb{P}[A \cap T]}{\mathbb{P}[T]} = \frac{1998}{5990} \backsimeq 33,36\%.$$

Conclusion :

Il n'y a qu'une chance sur trois pour que le test positif implique la maladie. La raison en est qu'on a choisi un test qui se trompe assez souvent quatre fois sur mille soit, à peu près autant que le hasard !

C'est pourquoi on fait toujours un second test lorsque le premier test est positif. En effet la proportion de la population qui est alors détectée comme malade est grande : un pour trois.

Exemple 3.(Suite de l'Exemple 2.)

On dispose d'un second test de dépistage de la même maladie, moins bon que le premier. Mais on le teste maintenant sur la population qui s'est révelée positive au premier test.
Si la personne est malade le test B est positif 97 fois sur 100.
Mais 8 fois sur 1000 il est positif sur une personne non malade.
Environ $\frac{1}{3}$ de la population testée est atteinte de la maladie.
Quelle est la probabilité qu'une personne testée soit malade sachant que le test B est positif ?

Solution.

Soit B l'événement « une personne est malade »et T' l'événement « le second test est positif ».

On sait déjà que

$$\mathbb{P}[B] = \frac{1}{3}.$$

Donc on en déduit que

$$\mathbb{P}\left[\overline{B}\right] = \frac{2}{3}.$$

Suite de la solution.

D'autre part, on sait que

$$\mathbb{P}\left[T'|B\right] = \frac{97}{100}.$$

Donc on en déduit que

$$\mathbb{P}\left[B \cap T'\right] = \mathbb{P}\left[T'|B\right] \times \mathbb{P}\left[B\right] \simeq \frac{1 \times 97}{3 \times 100} \simeq 32\%.$$

Suite de la solution.

On sait aussi que $\mathbb{P}\left[T'|\bar{B}\right] = \dfrac{8}{1000}$, donc

$$\mathbb{P}\left[T' \cap \bar{B}\right] \simeq \frac{8}{1000} \times \frac{2}{3} \simeq 0.6\%.$$

On obtient donc

$$\mathbb{P}\left[B|T\right] = \frac{\mathbb{P}\left[B \cap T'\right]}{\mathbb{P}\left[T\right]} = \frac{32}{32.6} = 98\%.$$

Indépendance

Définition

Deux événements A, B sont indépendants si

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \times \mathbb{P}[B].$$

Dans ce cas $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]$ *et* $\mathbb{P}[B|A] = \mathbb{P}[B]$.

Exercice

Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B le sont aussi.