Calcul élémentaire des probabilités

Myriam Maumy-Bertrand[1] et Thomas Delzant[1]

[1]IRMA, Université Louis Pasteur
Strasbourg, France

Licence 1ère Année 16-02-2006

Sommaire

Variables aléatoires.

Définition

On a un espace probabilisé Ω.

Une variable aléatoire c'est une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

A chaque événement élémentaire de Ω est associé un nombre, par exemple le résultat d'une expérience.

Exemple 1. (Jeu d'argent)

On veut savoir combien on gagne dans un jeu de pari.

On joue 2 fois à pile ou face.

Si on tombe sur pile, on gagne 1 €, si on tombe sur face, on perd 1€.

Réponse.

Ici Ω est constitué des 4 événements :

$\{\mathrm{PP}, \mathrm{PF}, \mathrm{FP}, \mathrm{FF}\}$.

On s'intéresse au gain X qui vaut donc :

$X(PP) = 2, X(PF) = X(FP) = 0, X(FF) = -2.$

Exemple 2.

On veut étudier la taille, l'âge et la masse des français.

$\Omega = \{\text{les français}\}$.

X est la fonction $X(m) = \text{taille de } m$ (en cm).

Y est la fonction $Y(m) = \text{âge de } m$ (en années).

Z est la fonction $Z(m) = \text{masse de } m$ (en g).

On peut aussi fabriquer des variables aléatoires compliquées comme $T = \frac{X}{\sqrt{Z}}(Y - 32)$. Et essayer d'étudier T.

Remarque :

En fait, il est très fréquent que l'on ne sache pas très bien décrire Ω, mais que l'on connaisse bien certaines probabilités liées à des variables aléatoires.

Exemple

On sait que 99% des français font moins que 187 cm. On écrit :

$$\mathbb{P}\left[X < 187\right] = 99\%$$

Une autre question

On peut aussi s'intéresser à la masse des français qui ont entre 24 et 47 ans et se demander quelle est la proportion de ceux qui font plus de 86 kg.
Cela s'écrit : $\mathbb{P}\left[Z \geqslant 86 | 24 \leqslant X \leqslant 47\right]$.

Remarque

Ce qui est important, c'est moins Ω que les sous ensembles de Ω décrits par X.

Exemple

Si X désigne la masse en kg, alors X prend les valeurs $\{5, 6, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, 250\}$, chacune avec une certaine probabilité.

Loi de probabilité.

Définition

Si on connait la formule $\mathbb{P}[X = k]$ pour tous les nombres k, on dit que l'on connait la LOI de X.

Il se trouve que l'on dispose d'un certain nombre de lois de probabilité qui permettent de décrire beaucoup de phénomènes et de les étudier.

Exemple 3. La roulette.

On joue à la roulette en misant 1 € sur “rouge” ou “noir”.

Il y a 37 numéros, 18 rouges, 18 noirs et le 0 (qui est vert).

Si on gagne, on ramène 2 fois la mise, c'est-à-dire 2 €.

On peut former deux variables aléatoires :

- X qui vaut 1 si on gagne et 0 si on perd.
- Y qui est le gain effectif :

  $Y = 2X - 1.$

On a donc $\mathbb{P}[Y = 1] = \dfrac{18}{37}, \mathbb{P}[Y = -1] = \dfrac{19}{37}.$

Sommaire

Espérance mathématique.

Définition

Si une variable aléatoire X prend les valeurs $x_1, x_2, \ldots .x_n$, l'espérance mathématique est définie par :

$$\mathbb{E}[X] = x_1\mathbb{P}[X = x_1] + x_2\mathbb{P}[X = x_2] + \ldots + x_n\mathbb{P}[X = x_n].$$

Retour sur l'exemple de la roulette.

Rappel des résultats précédents :

On a déterminé les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}[Y=1]=\frac{18}{37},\quad \mathbb{P}[Y=-1]=\frac{19}{37}.$$

On peut maintenant se poser la question suivante : que vaut l'espérance de Y ?

Réponse :

L'espérance mathématique de Y est donc :

$$\mathbb{E}[Y]=1\times\frac{18}{37}-1\times\frac{19}{37}=-\frac{1}{37}.$$

Jouons aux courses.

Un joueur veut miser à une course de chevaux. Il hésite entre deux chevaux.

- le cheval A est meilleur ; il a **1 chance sur 10** de gagner.
- Le cheval B est moins bon ; il a seulement **1 chance sur 20** de gagner.

Mais plus de parieurs ont misé sur A que sur B :

- **1 parieur sur 3** a parié que A allait gagner : si A gagne, alors on remporte donc **3** fois la mise.
- **1 parieur sur 7** a parié que B allait gagner : si B gagne, alors on remporte donc **7** fois la mise.

Questions.

Sur quel cheval dois-je miser ? Et pourquoi ?

Règles de calcul.

Si X et Y sont des variables aléatoires et α un nombre, alors on a les relations suivantes :

- $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
- $\mathbb{E}[\alpha X] = \alpha\,\mathbb{E}[X]$
- $\mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]] = 0$.

Si $\mathbb{E}[X] = 0$, alors on dit que X est centrée.

Sommaire

La grande martingale (PASCAL).

On veut gagner au casino.

On va jouer à la roulette, et pour fixer les idées, on va jouer soit "rouge" soit "noir" à chaque fois.

Rappelons qu'alors :

- l'on **gagne** une fois sa mise avec la probabilité

$$p = \frac{18}{37},$$

- l'on **perd** une fois sa mise avec la probabilité

$$q = 1 - p = \frac{19}{37}.$$

On fixe **au départ** une stratégie, et comme toutes les stratégies, on **s'interdit absolument d'en changer** pendant le jeu.

Première étape :

On fixe la somme qu'on veut gagner. Disons $m = 10$ €.

On mise cette somme m.

Si on **gagne**, alors on **s'arrête**. Le **gain réel** est **m**.

Deuxième étape

Sinon, on mise $2m$.

Si on **gagne**, alors on **s'arrête** car alors le **gain réel** est $2m - m = \mathbf{m}$.

Troisème étape

Sinon, on mise $4m$.

Si on **gagne**, alors on **s'arrête** car alors notre **gain réel** est $4m - 2m - m = \mathbf{m}$.

Étapes suivantes

Et on continue ainsi :

Si on a perdu k fois consécutives, alors on mise $2^{k+1}m$ au $k+1-$ième coup, jusqu'à ce qu on gagne ou qu'on soit ruiné !

Le gain **gain réel** sera alors, à l'étape $k+1$:

$$2^k m - 2^{k-1}m - \ldots 2m - m = 2^k m - (2^k - 1)m = \mathbf{m}.$$

Supposons d'abord qu'on soit **infiniment** riche.

Quelle est la probabilité de gagner ?

Réponse.

$P = 1$.

Autrement dit grâce à cette stratégie, on gagne à **TOUS LES COUPS**.

Pour fixer les idées, on arrive avec une somme d'argent importante, disons 1300 €. On souhaite gagner 10 €.

Combien de fois peut-on perdre au plus successivement ?

Quelle est la probabilité de gagner ?

Quelle est l'espérance mathématique du gain réalisé ?

Temps d'attente du gain

Loi du temps d'attente du gain dans un jeu simple où à chaque partie la probabilité :

- de gagner est p,
- de ne pas gagner $1 - p = q$.

La loi de T est alors : $\mathbb{P}[T = k] = p(1-p)^{k-1}$.

Espérance mathématique :

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = \frac{1}{p}.$$

Exemple.

La probabilité de gagner plus que 500000 € au loto est de $\dfrac{1}{10^6}$.

Combien de fois je dois escompter de jouer pour gagner ?

Réponse.

10^6 fois. Si je joue deux fois par semaine, il me faut donc être prêt à attendre 10 000 ans.

Jeu forcé.

Un homme doit de l'argent à la mafia. Disons 10000 €. Il ne dispose que de 7500€. Par un heureux hasard (quel est ce hasard ? Est-il mesurable ?), il se trouve dans un casino, où il a le droit de jouer à la roulette. Si il ne rembourse pas rapidement, alors il lui arrivera de gros ennuis.

Quelle doit être sa stratégie ?

Quelle est la probabilité pour qu'il s'en sorte ?