Université de Strasbourg

Mémoire de première année de Magistère

Classification des algèbres de Lie semisimples

Antoine Feltz

supervisé par
B.Enriquez

01/09/2017

Table des matières

Mon but dans ce mémoire est de classifier les algèbres de Lie semisimples sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Pour cela je définis d'abord les algèbres de Lie simples (partie 1).
Dans la partie 2, j'introduis les sous-algèbres torales des algèbres de Lie simples et je montre comment associer au couple (L, H) d'une algèbre de Lie simple et d'une sous-algèbre torale maximale, un système de formes linéaires sur H, appelé système de racines de (L, H).
Dans la partie 3, j'introduis la notion générale de système de racines d'un espace euclidien et je classifie ces systèmes en utilisant les racines simples et les diagrammes de Dynkin associés ; cette classification repose sur la notion de système de racines irréductible.
Dans la partie 4, je montre que le système de racines associé à un couple (L, H) forme un système de racines irréductible d'un espace euclidien, et j'en déduis une classification des couples (L, H). Il existe alors un théorème (que j'admets) qui implique que toutes les sous-algèbres torales maximales d'une même algèbre de Lie sont isomorphes. Cette classification ne dépend alors pas du choix de H, et on a bien une classification des algèbres de Lie simples.
Dans la partie 5, je définis les algèbres de Lie semisimples et je montre qu'elles se décomposent en idéaux simples. Ceci donne une classification des algèbres de Lie semisimples.

Pour faire ce travail je me suis essentiellement appuyé sur le livre "Introduction to Lie Algebras and Representation Theory" de J. Humphreys, Springer. Mon principal axe de recherche était d'essayer de trouver la manière la plus simple et la plus rapide de réaliser cette classification. Je me suis donc efforcé de ne garder que les outils qui m'étaient réellement nécessaires. J'ai décidé de me concentrer uniquement sur les algèbres de Lie simples au départ, dont la compréhension et la manipulation sont plus faciles. Je peux ainsi m'occuper des algèbres de Lie semisimples plus aisément à la fin.

1 Algèbres de Lie

1.1 Algèbres de Lie et morphismes

Dans tout le texte $\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n < \infty$.

Définition : *(algèbre de Lie) Une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ est un couple $(L, [,])$, où L est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $[,]$ est une application $L \times L \to L$ notée $(x, y) \mapsto [x, y]$ vérifiant les axiomes suivants :*
(1) cette opération est bilinéaire
(2) $\forall x \in L$ on a $[x, x] = 0$
(3) $\forall (x, y, z) \in L$, $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

Remarques :
- l'opération $[,]$ est appelée commutateur ou crochet de Lie ; $[x, y]$ est le commutateur de x et y ou crochet de x, y.
- l'identité (3) est appelée identité de Jacobi
- les identités (1) et (2) appliquées à $[x + y, x + y]$ donnent l'identité (2') $[x, y] = -[y, x]$, à savoir l'antisymétrie du commutateur. Inversement, la conjonction de (1) et (2') implique la conjonction de (1) et (2) si car$(\mathbb{K}) \neq 2$.

Définitions : *(morphismes, sous-algèbres de Lie, abélianité)*

a) *Soient L et L' deux algèbres de Lie, un homomorphisme (respectivement isomorphisme) de L dans L' est un homomorphisme (respectivement isomorphisme) Φ de l'espace vectoriel sous-jacent à L dans celui sous-jacent à L' tel que $\Phi([x,y]) = [\Phi(x), \Phi(y)]$, $\forall x, y \in L$.*

b) *Une sous-algèbre de Lie de L est un sous-espace vectoriel M de L tel que $\forall x, y \in M$, $[x,y] \in M$.*

c) *On dit qu'une algèbre de Lie L est abélienne si $[x,y] = 0$ pour tous $x, y \in L$.*

Remarque : Si x est un élément non nul d'une algèbre de Lie L, alors $\mathbb{K}x$ est une sous-algèbre de Lie abélienne de L de dimension 1.

1.2 Idéaux

Définition : *(idéaux) Soit L une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie. Un idéal I de L est un sous-espace vectoriel de L tel que $\forall x \in L$, $\forall y \in I$, $[x,y] \in I$.*

Remarque : Une algèbre Lie L contient toujours deux idéaux, 0 et L (les idéaux triviaux).

Lemme : *Soient L une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie et I est un idéal de L. Si a, b sont deux éléments de L/I, alors l'ensemble $\{[x,y] | x \in a, y \in b\}$ est une partie de L contenue dans une unique classe modulo I. On note $\{a, b\} \in L/I$ cette classe. L'application $(L/I) \times (L/I) \to L/I$, $(a,b) \mapsto \{a,b\}$, définit sur L/I une structure d'algèbre de Lie. L'application de projection $L \to L/I$ est alors un morphisme d'algèbres de Lie.*

Preuve : Si x, y sont des éléments de a, b, alors on a $a = x + I$, $b = y + I$, et alors $\{[u,v] | u \in a, v \in b\} = [x + I, y + I] \subset [x,y] + [x,I] + [y,I] + [I,I] \subset [x,y] + I$. On a donc $\{a,b\} = [x,y] + I$.

Définition : *(quotient) L'espace L/I muni de cette structure d'algèbre de Lie est appelé algèbre de Lie quotient de L par l'idéal I.*

1.3 Représentations d'algèbres de Lie

On note $\mathrm{End}(V)$ l'ensemble des endomorphismes de V. C'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n^2.

Lemme : *Si on munit $\mathrm{End}(V)$ de l'application $\mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$, $(x,y) \mapsto [x,y] := xy - yx$ (où xy est la composition des endomorphismes x et y) alors $\mathrm{End}(V)$ est une algèbre de Lie.*

On notera cette algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(V)$.

Preuve : Les axiomes (1) et (2) sont évidents. Montrons l'identité de Jacobi.
Soient $x, y, z \in \mathrm{End}(V)$, on a :

$$\begin{aligned}
&[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = [x, yz - zy] + [y, zx - xz] + [z, xy - yx] \\
&= x(yz - zy) - (yz - zy)x + y(zx - xz) - (zx - xz)y + z(xy - yx) - (xy - yx)z \\
&= xyz - xzy - yzx + zyx + yzx - yxz - zxy + xzy + zxy - zyx - xyz + yxz \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Cqfd

Par le choix d'une base de V, on a un isomorphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{gl}(V) \simeq M_n(\mathbb{K})$, le commutateur sur $M_n(\mathbb{K})$ étant donné par $[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj}$ pour $i, j, k, l \in [1, n]$.

Définition : (représentation) Si L est une algèbre de Lie, une représentation de L est un couple (V, ψ), où V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et où ψ est un homomorphisme d'algèbres de Lie de L dans $\mathfrak{gl}(V)$.

Lemme : Si ψ est une représentation d'une algèbre de Lie L, alors le noyau de ψ est un idéal de L.

Preuve : Soient $a \in \mathrm{Ker}(\psi)$ et $b \in L$, alors $\psi([a, b]) = [\psi(a), \psi(b)] = [0, \psi(b)] = 0$ donc $[a, b] \in \mathrm{Ker}(\psi)$.

1.4 Représentation adjointe

Soit L une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie. Pour $x \in L$, on note $\mathrm{ad}x$ l'endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel L donné par $\forall y \in L$, $\mathrm{ad}x(y) := [x, y]$.

Lemme : *L'application $L \to \mathrm{End}(L)$, $x \mapsto \mathrm{ad}x$, est un morphisme d'algèbres de Lie. Le couple formé de l'espace vectoriel L et du morphisme $\mathrm{ad} : L \to \mathrm{End}(L)$ est appelé la représentation adjointe de L.*

Preuve : Montrons l'égalité $[\mathrm{ad}x, \mathrm{ad}y] = \mathrm{ad}[x, y]$ pour tout $x, y \in L$. Pour tout $z \in L$, on a $[\mathrm{ad}x, \mathrm{ad}y](z) = \mathrm{ad}x\mathrm{ad}y(z) - \mathrm{ad}y\mathrm{ad}x(z) = \mathrm{ad}x([y, z]) - \mathrm{ad}y([x, z])=[x, [y, z]] - [y, [x, z]] = [x, [y, z]] + [[x, z], y] = [[x, y], z] = \mathrm{ad}[x, y](z)$. Donc $[\mathrm{ad}x, \mathrm{ad}y] = \mathrm{ad}[x, y]$. Cqfd

Le noyau de $L \to \mathrm{End}(L)$, $x \mapsto \mathrm{ad}x$ est donc un idéal de L. On calcule $\mathrm{Ker}\ \mathrm{ad} = \{x \in L | \forall y \in L, [x, y] = 0\}$. Cet espace est appelé le centre de L et noté $Z(L)$.

1.5 Forme de Killing

Soit L une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie de dimension finie. Pour $x, y \in L$, la composition des endomorphismes $\mathrm{ad}x$ et $\mathrm{ad}y$ de L est un nouvel endomorphisme de L, noté $\mathrm{ad}x\mathrm{ad}y$. Puisque L est de dimension finie, on peut lui associer sa trace $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}x\mathrm{ad}y)$.

Définition : *On appelle forme de Killing l'application*

$$L \times L \to \mathbb{K}, \quad (x, y) \mapsto K(x, y) := \mathrm{tr}(\mathrm{ad}x\mathrm{ad}y).$$

Lemme : *La forme de Killing est une forme bilinéaire symétrique sur L, satisfaisant l'identité $K([x, y], z) = K(x, [y, z])$ pour tous $x, y, z \in L$ (invariance).*

Preuve : On a $\mathrm{ad}[x, y]\ \mathrm{ad}z = \mathrm{ad}x\ \mathrm{ad}y\ \mathrm{ad}z - \mathrm{ad}y\ \mathrm{ad}x\ \mathrm{ad}z$ et $\mathrm{ad}x\ \mathrm{ad}[y, z] = \mathrm{ad}x\ \mathrm{ad}y\ \mathrm{ad}z - \mathrm{ad}x\ \mathrm{ad}z\ \mathrm{ad}y$ et on conclut avec $\mathrm{tr}(y(xz)) = \mathrm{tr}((xz)y)$. Cqfd

1.6 Algèbre de Lie dérivée, algèbres de Lie résolubles et nilpotentes

Soit L une algèbre de Lie.

Lemme-définition : *(algèbre de Lie dérivée) Posons $[L,L] = \{$combinaisons linéaires de $[x,y]$ avec $x,y \in L\}$. C'est un idéal de L, et donc a fortiori une sous-algèbre de Lie de L. Le quotient $L/[L,L]$ est une algèbre de Lie abélienne. On appelle $[L,L]$ l'algèbre de Lie dérivée de L.*

Preuve : Immédiate. Cqfd

Notons que L est abélienne si et seulement si $[L,L] = 0$

Définitions : *(suites centrale descendante et série dérivée)*

- *La série dérivée de L est définie par récurrence : $L^{(0)} = L$, $L^{(1)} = [L,L]$ et en général $L^{(i)} = [L^{(i-1)}, L^{(i-1)}]$ pour $i \in \mathbb{N}^*$.*
- *La série centrale descendante de L est définie par récurrence : $L^0 = L$, $L^1 = [L,L]$ et en général $L^i = [L, L^{i-1}]$ pour $i \in \mathbb{N}^*$.*

Alors que dans la suite $L = L^{(0)} \supset L^{(1)} \supset \cdots$ chaque terme est un idéal dans son prédécesseur, dans la suite $L = L^0 \supset L^1 \supset \cdots$ chaque terme est un idéal dans L seulement.

Définitions : *(algèbre de Lie résolubles et nilpotentes)*

- *L'algèbre de Lie L est dite résoluble si $\exists\ i \in \mathbb{N}$ tel que $L^{(i)} = 0$.*
- *L'algèbre de Lie L est dite nilpotente si $\exists\ i \in \mathbb{N}$ tel que $L^i = 0$.*

Lemme : *Si L est une algèbre de Lie contenant une sous-algèbre de Lie centrale Z, telle que L/Z est nilpotente, alors L est nilpotente.*

Preuve : Si on a $(L/Z)^n = 0$, alors $[L/Z, \dots, L/Z] = 0$ (n facteurs, égalité dans L/Z). Donc $[L, \dots, L] \subset Z$ (n facteurs, égalité dans L). Comme Z est central, on a $[L, \dots, L] = 0$ ($n+1$ facteurs), donc $L^{n+1} = 0$, donc L est nilpotente. Cqfd

Propriétés : Si L est nilpotente alors L est résoluble.
Une algèbre de Lie abélienne est nilpotente, donc résoluble. Par contre, une algèbre de Lie simple est non résoluble, et donc non nilpotente.
Par ailleurs, si L est nilpotente, $Z(L) \neq 0$ car le centre est le dernier terme non nul de la série centrale descendante. Par contre, si L est résoluble, on peut avoir $Z(L) = 0$ (exemple des matrices 2×2 dont la deuxième ligne est nulle).

Exemples : Si $n \geq 1$ est un entier, alors l'ensemble des matrices $n \times n$ triangulaires strictement supérieures est une sous-algèbre de Lie nilpotente de $M_n(\mathbb{K})$. De même, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures au sens large est une sous-algèbre de Lie résoluble de $M_n(\mathbb{K})$.

2 Algèbres de Lie simples et systèmes de racines

2.1 Algèbres de Lie simples

Définition : *Soit L une algèbre de Lie de dimension finie. Alors L est dite simple si elle ne contient aucun idéal autre que 0 et L, et si* $\dim(L) \neq 0, 1$.

Lemme : *Si L est simple, alors $[L, L] = L$.*

Preuve : Puisque $[L, L]$ est un idéal de L il est nécessairement 0 ou L. Si on avait $[L, L] = 0$, alors L serait une algèbre de Lie abélienne de dimension ≥ 2. N'importe quel sous-espace vectoriel de dimension 1 de L constituerait alors un idéal non-trivial de L, ce qui est impossible. Donc $[L, L] = L$.

On rappelle :

Proposition : *(décomposition de Jordan) Soit x un endomorphisme de V. Il existe un unique couple x_s, x_n d'endomorphismes de V qui commutent tels que x_n soit nilpotent, et x_s soit semi-simple et $x = x_n + x_s$. Ils sont appelés partie nilpotente (respectivement semisimple) de l'endomorphisme x.*

Éléments semisimples et nilpotents : Un élément $x \in L$ est appelé ad-semisimple si son endomorphisme adjoint ad$x$ est un endomorphisme diagonalisable de L (ce qui est équivalent, $\mathbb{K}$ étant algébriquement clos, à ce que les racines de son polynôme minimal soient simples). De même, x est appelé ad-nilpotent si ad$x$ est un endomorphisme nilpotent de L. Par abus de langage on dira que x est semisimple (respectivement nilpotent).

Remarque. Dans le cas $L = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$, un élément peut être ad-nilpotent sans que la matrice correspondante soit nilpotente, et inversement. On peut penser, par exemple, à l'identité.

2.2 Théorème d'Engel

Lemme : *Soit L une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$. Si L ne contient que des endomorphismes nilpotents et si V est non nul, alors il existe un vecteur $v \in V$ non nul, tel que $L \cdot v = 0$.*

Preuve : On raisonne par récurrence sur dim$L$.
Si dim$L = 0$ alors $L = 0$ et n'importe quel vecteur non nul de V convient.
Si dim$L = 1$, L est engendrée par un élément nilpotent de $\mathfrak{gl}(V)$. Soit z cet élément, il existe alors un vecteur non nul $u \in V$ tel que $z \cdot u = 0$, d'où $\lambda z \cdot u = 0$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$. Donc $L \cdot u = 0$.

Montrons l'hérédité : On suppose que le lemme est vrai pour toute sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(V)$ de dimension strictement inférieure à celle de L.

Soit $M \subsetneq L$ une sous-algèbre de Lie de L strictement incluse dans L (il existe de tels objets, par exemple $M = \{0\}$). Soit $x \in M$, c'est un endomorphisme nilpotent sur V donc il agit comme un endomorphisme nilpotent sur l'espace vectoriel L. En effet, si $x \in \mathfrak{gl}(V)$ on peut lui associer les endomorphismes qui à $y \in \mathfrak{gl}(V)$ associent xy et yx. Il sont alors nilpotents et commutent, donc leur différence $[x, -]$ est un endomorphisme nilpotent de $\mathfrak{gl}(V)$. Comme il se restreint un endomorphisme ad(x) du sous-espace $L \subset \mathfrak{gl}(V)$, cet endomorphisme est nilpotent.

Comme $\mathrm{ad}(x)$ se restreint encore à M, l'endomorphisme $\overline{\mathrm{ad}x}$ induit sur L/M est nilpotent (on a utilisé le résultat suivant : si un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel préserve un sous-espace, alors à la fois le morphisme restreint et le morphisme induit sur le quotient sont nilpotents).

Soit $P := \{\overline{\mathrm{ad}x} \in \mathfrak{gl}(L/M) | x \in M\}$. Puisque $M \neq L$, P est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(L/M)$ de dimension strictement inférieure à celle de L et L/M est non nul. De plus, P ne contient que des endomorphismes nilpotents donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. Il existe alors un élément $\bar{y} \neq \bar{0}$ de L/M, tel que $P \cdot \bar{y} = 0$ donc que pour tout x dans M, $\overline{\mathrm{ad}x}(\bar{y}) = 0$ (égalité dans L/M). En relevant $\bar{y}$ en un élément de L, on voit qu'il existe $y \in L - M$, tel que pour tout $x \in M$, $[x, y] \in M$. Donc $[M, y] \subset M$.
On a l'inclusion $M \subset N_L(M)$, où $N_L(M)$ est le normalisateur de M donné par $N_L(M) = \{u \in L | [u, M] \subset M\}$. L'élément y construit plus haut appartient à $N_L(M)$ mais pas à M. Ceci prouve que l'inclusion $M \subset N_L(M)$ est stricte.

On suppose maintenant que M est maximale pour l'inclusion. Alors, $M \subsetneq N_L(M)$ implique que $N_L(M) = L$ donc que M est un idéal de L. Si $z \in L/M$ est élément non nul, alors la pré-image de $\mathbb{K}z$ dans L est une sous-algèbre de Lie de L, contenant strictement M, donc égale à L. Ceci montre que z engendre linéairement L/M, donc que L/M est de dimension 1.

Soit $W := \{v \in V | M \cdot v = 0\}$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à $M \subset \mathfrak{gl}(V)$, on obtient que W est non nul. De plus, si $x \in L$, $y \in M$ et $w \in W$ on a $y(x \cdot w) = x(y \cdot w) - [x, y]w = 0$ car $[x, y] \in M$. Donc W est stable par L.
Comme $\dim(L/M) = 1$, il existe $z \in L \backslash M$ tel que $L = M + \mathbb{K}z$. L'endomorphisme z est nilpotent sur V et préserve W, il induit donc un endomorphisme nilpotent de W. Etant nilpotent, cet endomorphisme induit est de noyau non nul. Soit $v \in W$ un élément de ce noyau. Alors $z \cdot v = 0$ et $M \cdot v = 0$ par l'appartenance de v à W. On a donc $L \cdot v = 0$. Ceci montre l'hérédité. Cqfd

Théorème d'Engel : *Si L est une algèbre de Lie, on a l'équivalence*

$$\text{(tous les éléments de } L \text{ sont ad-nilpotents)} \Leftrightarrow (L \text{ est nilpotente})$$

Démonstration : Supposons que L est nilpotente. Soit $n \geq 1$ tel que $L^n = 0$. Alors pour x, y dans L, on a $\mathrm{ad}(x)^{n-1}(y) = 0$. Ceci étant valable pour tout y, on en déduit que $\mathrm{ad}(x)^{n-1} = 0$. Donc pour tout x, $\mathrm{ad}(x)$ est nilpotent. Ceci montre $\Leftarrow$.

Supposons que tout élément de L est ad-nilpotent. Comme L est une algèbre de Lie non nulle, dont tous les éléments sont ad-nilpotents, $\mathrm{ad}L \subset \mathfrak{gl}(L)$ vérifie les conditions du lemme ci-dessus. On en conclut qu'il existe un élément $x \in L$ non nul, tel que $\mathrm{ad}_L(x) = [L, x] = 0$. Donc $Z(L) \neq 0$.
Posons $L_1 := L/Z(L)$. Alors tout élément de L_1 est ad-nilpotent. On en déduit que $Z(L_2) \neq 0$. En itérant le processus, et en utilisant que L est de dimension finie, on montre que L est le terme initial d'une suite de morphismes surjectifs $L = L_0 \twoheadrightarrow L_1 \twoheadrightarrow L_2 \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow L_k = 0$, avec pour chaque i l'égalité $\mathrm{Ker}(L_i \to L_{i+1}) = Z(L_i)$. En appliquant le lemme du **??** à L_{k-1}, on montre que L_{k-1} est nilpotente. En utilisant ce résultat et en appliquant ce lemme à L_{k-2}, on montre que L_{k-2} est nilpotente. En itérant le processus, on arrive au fait que L est nilpotente. Ceci montre $\Rightarrow$, d'où l'équivalence. Cqfd

Corollaire : *Si L est nilpotente et J est un idéal non nul de L, alors $J \cap Z(L) \neq 0$.*

Démonstration : Comme L est nilpotente, pour x dans L quelconque, $\mathrm{ad}(x) \in \mathrm{End}(L)$ est nilpotent. La restriction d'un endomorphisme nilpotent à un sous-espace invariant étant également nilpotente (on le montre en utilisant le critère qu'une puissance est nulle), l'endomorphisme de $\mathrm{End}(J)$ obtenu par restriction et corestriction de $\mathrm{ad}(x)$ à J est nilpotent. L'image de L dans $\mathrm{End}(J)$ est donc une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{End}(J)$ dont tous les éléments sont nilpotents. Le lemme précédent implique alors qu'il existe un élément non nul x de J envoyé sur 0 par L. Donc $[L, x] = 0$, soit $x \in Z(L)$, avec $x \in J$ et $x \neq 0$. Cqfd

2.3 Critère de Cartan

Lemme : *Soient $A \subset B$ deux sous-espaces de $\mathfrak{gl}(V)$, on pose $M = \{x \in \mathfrak{gl}(V) | [x, B] \subset A\}$. Si $x \in M$ tel que $\forall y \in M$, $\mathrm{Tr}(xy) = 0$, alors x est nilpotent.*

Preuve : Soit $x \in M$. Alors x est un endomorphisme de V : soit $x = s + n$ sa décomposition de Jordan. On fixe une base $\mathcal{B}$ de V pour laquelle s est diagonale de valeurs propres $a_1, ..., a_m$. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}$ engendré par les $\mathbb{Q}$-combinaisons linéaires de ces valeurs propres. On veut montrer que $s = 0$ donc $E = 0$, il suffit alors de montrer que E^* est nul, donc que toute application linéaire de E vers $\mathbb{Q}$ est nulle.

Soit f une telle application linéaire. On note y l'élément de $\mathfrak{gl}(V)$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est la matrice diagonale $\mathrm{diag}(f(a_1), ..., f(a_m))$. Soit $\{e_{ij}\}$ l'élément de $\mathfrak{gl}(V)$ correspondant à la matrice élémentaire (i, j) dans la base $\mathcal{B}$. Alors, la formule du 1.3 implique que $\mathrm{ad}s(e_{ij}) = (a_i - a_j)e_{ij}$ et $\mathrm{ad}y(e_{ij}) = (f(a_i) - f(a_j))e_{ij}$.
Soit Σ la partie de $\mathbb{K}$ donnée par $\Sigma := \{a_i - a_j | i, j \in [1, n]\}$. Alors f se restreint en une application $\Sigma \to \mathbb{K}$, telle que $0 \mapsto 0$. Par interpolation de Lagrange, il existe donc un polynôme sans terme constant $r \in \mathbb{K}[t]$, tel que $r(\alpha) = f(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \Sigma$, ce qui donne $r(a_i - a_j) = f(a_i) - f(a_j)$ pour tous les $i, j \in [1, n]$.

Alors $\mathrm{ad}y(e_{ij}) = (f(a_i) - f(a_j))e_{ij} = r(a_i - a_j)(e_{ij}) = r(\mathrm{ad}s)(e_{ij})$, et puisque les $(e_{ij})_{i,j \in [1,n]}$ forment une base de $\mathfrak{gl}(V)$, on a $\mathrm{ad}y = r(\mathrm{ad}s)$. Par ailleurs, $\mathrm{ad}s$ est la partie semisimple de la décomposition de Jordan de $\mathrm{ad}x$ car la représentation adjointe est un morphisme d'algèbre de Lie. Donc, d'après un résultat d'algèbre linéaire, elle peut s'écrire comme polynôme en $\mathrm{ad}x$ sans terme constant. Il en est alors de même pour $\mathrm{ad}y$, et puisque $\mathrm{ad}x$ envoie B dans A, et que $A \subset B$, on a $\mathrm{ad}y(B) \subset A$.
Donc $y \in M$, et on a $\mathrm{Tr}(xy) = 0 = \sum a_i f(a_i) \in E$. On peut alors ré-appliquer f et on obtient $\sum f(a_i)^2 = 0$. Puisque $f(a_i) \in \mathbb{Q}$ on a forcément $f(a_i) = 0$ pour tous les i, donc f est nulle car les a_i engendrent E.

Théorème : *(Critère de Cartan) Soit L une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$. Si pour tous $x \in [L, L]$, $y \in L$ on a $\mathrm{Tr}(xy) = 0$, alors L est résoluble.*

Démonstration : Rappelons que $[L, L]$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$. On va montrer que tout élément de $[L, L] \subset \mathfrak{gl}(V)$ est nilpotent (comme endomorphisme de V). Ceci implique que pour x un élément de $[L, L]$, l'endomorphisme $[x, -] : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ est nilpotent. Cet endomorphisme se restreint et corestreint en un endomorphisme de $[L, L] \subset \mathrm{End}(V)$, qui coincide avec l'endomorphisme $\mathrm{ad}(x) : [L, L] \to [L, L]$. La restriction à un sous-espace invariant d'un endomorphisme nilpotent restant nilpotente, on obtient que $\mathrm{ad}(x)$ est nilpotent. Ceci étant vrai pour tout $x \in [L, L]$, le théorème d'Engel implique alors que $[L, L]$ est nilpotente, donc que L est résoluble.

Montrons donc que tout élément de $[L, L] \subset \mathfrak{gl}(V)$ est nilpotent (comme endomorphisme de V). Soit $u \in [L, L]$ et posons $M := \{x \in \mathfrak{gl}(L) | [x, L] \subset [L, L]\}$. Décomposons u sous la forme $u = \sum_i [x_i, y_i]$, où $(x_i)_i$, $(y_i)_i$ sont deux familles finies de L. Si $z \in M$, on a

$$\mathrm{tr}(uz) = \sum_i \mathrm{tr}([x_i, y_i]z) = \sum_i tr([y_i, z]x_i) \in \mathrm{tr}([L, L]L) = \{0\}$$

où on a utilisé $[L, M] \subset [L, L]$. On a donc $\mathrm{tr}(uM) = 0$. Par ailleurs, $[L, L] \subset M$, donc $u \in M$. En appliquant alors le lemme précédent en posant $A := [L, L]$, $B := L$ et en remplaçant x par u, on obtient que u est nilpotent. Donc tous les éléments de $[L, L]$ sont nilpotents. Cqfd

Lemme :

a) Si I est un idéal résoluble de L tel que L/I est résoluble, alors L est résoluble.

b) Si I et J sont des idéaux résolubles de L, alors $I + J$ en est aussi un.

Preuve :

a) Si $\phi : L \to M$ est un homomorphisme surjectif d'algèbres de Lie alors on montre facilement par récurrence que $\phi(L^{(i)}) = M^{(i)}$. Donc toute image par un homomorphisme d'une algèbre de Lie résoluble est résoluble.
Soit $\pi : L \to L/I$ la projection par rapport à l'idéal I. Supposons que $(L/I)^{(n)} = 0$ alors $\pi(L^{(n)}) = 0$ car $[L/I, L/I] = [L, L]/I \cap [L, L]$ par définition du crochet de Lie d'un quotient. Donc $L^{(n)} \subset \mathrm{Ker}\, \pi = I$.
On a aussi $I^{(m)} = 0$, et comme par définition $L^{(n+m)} = (L^{(n)})^{(m)} \subset I^{(m)}$ on a bien $L^{(n+m)} = 0$, donc L est résoluble.

b) D'après les théorèmes standards sur les homomorphismes, on a un isomorphisme naturel entre $(I + J)/J$ et $I/(I \cap J)$. Le deuxième est résoluble comme image de I par un homomorphisme, donc $(I + J)/J$ est résoluble. La partie a) implique alors que $I + J$ est résoluble.

Corollaire : *Soit L une algèbre de Lie telle que $K_{|[L,L]\times L} = 0$, alors L est résoluble.*

Preuve : Il suffit d'appliquer le critère de Cartan à la représentation adjointe de L pour obtenir que $\mathrm{ad}L$ est résoluble. Mais $Z(L)$ étant résoluble, d'après le lemme précédent L l'est aussi.

2.4 Décomposition des éléments d'une algèbre de Lie

Proposition : Si L est une algèbre de Lie simple, sa forme de Killing K est non dégénérée.

Preuve : Soit $S := \{x \in L | \forall y \in L, K(x, y) = 0\}$ alors K est non dégénérée si et seulement si $S = 0$. Puisque K est invariante, S est un idéal de L. Si on avait $S = L$, alors on aurait $K = 0$. En particulier, $K_{|[L,L]\times L} = 0$, ce qui d'après le corollaire précédent, implique que L est résoluble, on a une contradiction. On n'a donc pas $S = L$. L'algèbre de Lie L étant simple, on a donc $S = 0$, donc K est non dégénérée.

Lemme : *Si L est une algèbre de Lie simple* ad $L \subset$ *End L contient la partie semisimple et nilpotente de tous ses éléments.*

Démonstration : Rappelons que ad : $L \to \mathrm{End}(L)$ est un morphisme d'algèbres de Lie. On note son image $\mathrm{ad}(L)$. Soit $\mathrm{Der}(L) \subset \mathrm{End}(L)$ l'ensemble des endomorphismes linéaires $\delta : L \to L$, tels que pour tous $x, y \in L$, on a $\delta([x,y]) = [\delta(x), y] + [x, \delta(y)]$. Alors on a une suite d'inclusions d'algèbres de Lie

$$\mathrm{ad}(L) \subset \mathrm{Der}(L) \subset \mathrm{End}(L).$$

Si L est simple on a $\mathrm{ad}L = \mathrm{Der}\ L$:

En effet, $Z(L) = \mathrm{Ker\ ad}$ est un idéal donc $Z(L) = 0$ ou L. Mais pour une algèbre de Lie simple $[L, L] = L$, or $Z(L) = L$ est équivalent à $[L, L] = 0$. Donc $Z(L) = 0$. La corestriction ad : $L \to \mathrm{ad}(L)$ est alors injective, et comme elle est aussi surjective, on a $L \simeq \mathrm{ad}(L)$.
On pose $M = \mathrm{ad}L$, puisqu'elle est isomorphe à une algèbre de Lie simple, sa forme de Killing est non dégénérée d'après la propriété précédente. De plus, l'égalité (1) $[\delta, \mathrm{ad}x] = \mathrm{ad}(\delta x) \forall x \in L$, $\delta \in \mathrm{Der}\ L$ permet de montrer que M est un idéal de $\mathrm{Der}L$ (on notera $D = \mathrm{Der}L$ pour simplifier). Donc K_M est la restriction au sous-espace $M \times M$ de $K_D : D \times D \to \mathbb{K}$, la forme de Killing de D .
Soit $I = M^{\perp}$, le sous-espace orthogonal de M dans D par rapport à K_D, alors $I \cap M = 0$ car K_M est non dégénérée. Comme I et M sont des idéaux de D d'intersection nulle, on a $[I, M] = 0$. Si $\delta \in I$, (1) implique que $\mathrm{ad}(\delta L) = 0$ donc comme la représentation adjointe est un isomorphisme, $\delta L = 0$, soit $\delta = 0$.
Au final on obtient $I = 0$ donc $M = D$ soit $\mathrm{Der}\ L = \mathrm{ad}\ L$.

On montre finalement que $\mathrm{Der}L \subset \mathrm{End}(L)$ contient la partie nilpotente et semisimple de chacun de ses éléments. Compte tenu de l'égalité $\mathrm{Der}\ L = \mathrm{ad}\ L$, ceci impliquera le lemme.
Soit $\delta \in \mathrm{Der}\ L$, on note σ et $\nu \in End\ L$ sa partie semisimple, respectivement nilpotente. Il suffit de montrer que $\sigma \in \mathrm{Der}\ L$.
Soit $a \in \mathbb{K}$ on pose $L_a := \{x \in L | \exists k \text{ tel que } (\delta - a \cdot 1)^k = 0\}$. Alors L est la somme directe des L_a où a est une valeur propre de δ (où de manière équivalente σ), et σ agit sur L_a par multiplication par le scalaire a.
Par ailleurs on montre facilement par récurrence que, pour $a, b \in \mathbb{K}$, $x, y \in L$

$$(\delta - (a+b) \cdot 1)^n([x,y]) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [(\delta - a \cdot 1)^{n-i}x, (\delta - b \cdot 1)^i y]$$

Ceci implique que $[L_a, L_b] \subset L_{a+b}$ (qui peut être nul). Donc si $x \in L_a$ et $y \in L_b$ alors $[x, y] \in L_{a+b}$ donc $\sigma([x,y]) = (a+b)[x,y] = [\sigma(x), y] + [x, \sigma(y)]$.
Comme L est la somme directe des L_a on a bien que σ est une dérivation. Cqfd

Décomposition d'un élément d'une algèbre de Lie : On a vu au-dessus que la représentation adjointe est un isomorphisme d'algèbres de Lie de L dans $\mathrm{ad}L$ pour toute algèbre de Lie simple. Si $x \in L$, l'endomorphisme $\mathrm{ad}x \in \mathrm{ad}\ L$ se décompose en $\mathrm{ad}s + \mathrm{ad}n$ qui appartiennent alors à $\mathrm{ad}L$ d'après le lemme précédent.
Alors $\forall x \in L$ il existe un unique couple $s, n \in L$ tel que $\mathrm{ad}x = \mathrm{ad}s + \mathrm{ad}n$, s semisimple, n nilpotent et $[\mathrm{ad}s, \mathrm{ad}n] = 0$. On a alors $\mathrm{ad}[s, n] = 0$, d'où $[s, n] = 0$ car la représentation adjointe est une bijection, L étant simple. Donc s et n commutent, s est semisimple et n nilpotent.
On les appelle partie semisimple et nilpotente de l'élément x.

2.5 Sous-algèbres de Lie torales

Définition : *Une sous-algèbre d'une algèbre de Lie est dite torale si elle est ne contient que des éléments semisimples.*

L'ensemble des sous-algèbres de Lie torales est non-vide car il existe toujours un élément semisimple dans une algèbre de Lie simple. En effet, d'après le théorème d'Engel, si L ne contient que des éléments nilpotents, L est une algèbre de Lie nilpotente. Or on a vu que si L est simple, $[L, L] = L$ donc L ne peut pas être nilpotente.

Théorème : *Toute sous-algèbre torale T de L est abélienne.*

Démonstration : Soir $x \in T$. Comme T est une sous-algèbre de Lie de L, l'endomorphisme $\mathrm{ad}(x)$ de L préserve le sous-espace T. L'endomorphisme de T induit est alors égal à $\mathrm{ad}_T x : T \to T$, l'endomorphisme associé à l'action adjointe de x sur T.
On va montrer que $\forall x \in T$, $\mathrm{ad}_T x = 0$ ce qui est équivalent à T est abélienne. On a $\forall x \in T$, x est semisimple, donc $\mathrm{ad}x$ est diagonalisable, ce qui implique que $\mathrm{ad}_T x$ est également diagonalisable. Il suffit donc de montrer que $\mathrm{ad}_T x$ n'a pas de valeur propre non nulle.

Supposons par l'absurde que $\exists y \in T$ non nul tel que $\mathrm{ad}_T x(y) = [x, y] = ay$ avec $a \neq 0$. Comme $y \in T$, $ad_T y$ est un endomorphisme diagonalisable de T. On a donc $T = \oplus_{\lambda \in Sp(ad_T(y))} T_\lambda$, où $T_\lambda = Ker(ad_T(y) - \lambda id_T)$.
Alors $\mathrm{Im}(ad_T(y)) = \oplus_{\lambda \in Sp(ad_T(y)), \lambda \neq 0} T_\lambda$. En particulier,

$$\mathrm{ad}_T(y)(x) \in \oplus_{\lambda \in Sp(ad_T(y)), \lambda \neq 0} T_\lambda.$$

Par ailleurs on a $\mathrm{ad}_T y(x) = -ay$ d'où $\mathrm{ad}_T y(\mathrm{ad}_T y(x)) = [y, -ay] = 0$. Donc $\mathrm{ad}_T y(x)$ est un vecteur propre de $\mathrm{ad}_T y$ de valeur propre 0, on a alors

$$\mathrm{ad}_T y(x) \in T_0.$$

En combinant ces deux résultats, on trouve que $\mathrm{ad}_T y(x) = 0$, contradiction. Cqfd

2.6 Décomposition d'une algèbre de Lie en systèmes de racines

Dans la suite on fixe une sous-algèbre torale maximale H de L, c'est-à-dire non incluse strictement dans une autre (elle n'est pas forcément unique).

Une telle sous-algèbre existe car on a vu que L étant simple, il existe au moins une sous-algèbre torale triviale de dimension 1. Ensuite, si celle-ci est incluse dans une autre on prend cette dernière et ainsi de suite. Puisque L est de dimension finie, cette chaine est finie et son dernier élément convient pour H.

Théorème : *Soit $\alpha \in H^*$, on définit $L_\alpha := \{x \in L | [x, h] = \alpha(h)x, \forall h \in H\}$. Alors il existe un sous-ensemble ϕ de H^*, de cardinal fini, tel que $0 \notin \phi$ et $\forall \alpha \in \phi$, $L_\alpha \neq 0$ et que l'on ait la décomposition :*

$$L = C_L(H) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \phi} L_\alpha$$

Définition : *(racines et systèmes de racines de L) On appelle les éléments de ϕ les racines associées au couple (L,H). Cette décomposition est appelée décomposition en systèmes de racines de L (ou décomposition de Cartan).*

Démonstration du théorème : Puisque H est abélienne $\mathrm{ad}_L H$ est une famille d'endomorphismes de L qui commutent. En effet, si $f_1,\ f_2 \in \mathrm{ad}_L H$ on peut supposer que $f_1 = \mathrm{ad}_L x$ et $f_2 = \mathrm{ad}_L y$ avec $x, y \in H$ et on a alors $\forall z \in L,\ f_1 f_2 - f_2 f_1(z) = [x,[y,z]] - [y,[x,z]] = [x,[y,z]] + [y,-[x,z]] = [x,[y,z]] + [y,[z,x]] = -[z,[x,y]] = -[z,0] = 0$. Donc $f_1 f_2 = f_2 f_1$.
D'après un théorème classique d'algèbre linéaire, la famille $\mathrm{ad}_L H$ est simultanément diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une base de V dans laquelle la matrice de ces endomorphisme est diagonale. Autrement dit, L est la somme directe des sous-espaces L_α avec $\alpha \in H^*$.
On pose alors $\phi := \{\alpha \in H^* | \alpha \neq 0 \text{ et } L_\alpha \neq 0\}$. On remarque que $L_0 = C_L(H)$. On a alors les propriétés du théorème et ϕ possède au plus dim V éléments, un nombre fini.

2.7 Centralisateur d'une sous-algèbre torale

Théorème : *(Centralisateur d'une sous-algèbre torale) Si H est une sous-algèbre de Lie torale maximale, on a $C_L(H) = \{x \in L | [x,h] = 0,\ \forall h \in H\} = H$.*

Démonstration : 1) Dire que x est dans $C_L(H)$ est équivalent à dire que $\mathrm{ad}x$ envoie $H \subset L$ sur 0. Or si $x \in C_L(H)$ alors $\mathrm{ad}x$ est un endomorphisme sur un corps algébriquement clos donc trigonalisable. Dans ce cas H est inclus dans le sous-espace propre généralisé correspondant à la valeur propre 0. La partie semisimple de $\mathrm{ad}x$ est donc nulle sur un sous-espace de L contenant H. Elle envoie alors H sur 0. Donc $\mathrm{ad}x$ et sa partie semisimple envoient H sur 0, il en est alors de même pour sa partie nilpotente.
Finalement les parties semisimple et nilpotente de $\mathrm{ad}x$ envoient H sur 0. C'est-à-dire que $C_L(H)$ *contient la partie semisimple et nilpotente de tous ses éléments.*

2) Soit $x \in C_L(H)$ semisimple, alors $H + \mathbb{K}x$ est une sous-algèbre de L abélienne car H est torale donc abélienne et $[x,H] = 0$. De plus, puisque la somme de deux endomorphismes semisimples qui commutent est semisimple et puisque $\mathrm{ad}x + \mathrm{ad}y = \mathrm{ad}(x+y)$, cette sous-algèbre est même torale. On a donc $H + \mathbb{K}x = H$ par maximalité de H, d'où $x \in H$.
Donc H *contient les éléments semisimples de* $C_L(H)$.

3) Supposons qu'il existe $h \in H$ tel que $K(h,H) = 0$, on va montrer que $h = 0$, donc que K *restreinte à* H *est non dégénérée.*
Si $x \in C_L(H)$ alors $[x,H] = 0$, d'où $\forall y \in H,\ [x,y] = 0$ donc $[\mathrm{ad}x, \mathrm{ad}y] = 0$. Si x est nilpotent, alors $\mathrm{ad}x$ est nilpotent et $\mathrm{ad}x\mathrm{ad}y$ l'est aussi donc $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}x\mathrm{ad}y) = 0$, d'où $K(x,H) = 0$.
Soit $y \in C_L(H)$, $y = s + n$ sa décomposition de Jordan avec n nilpotent et s semisimple, alors $n \in C_L(H)$ d'après 1) et $s \in H$ d'après 2). Donc $K(h,y) = K(h,s) + K(h,n) = 0$, car $K(h,H) = 0$ par hypothèse et $K(n,H) = 0$ d'après le paragraphe précédent. On obtient donc $K(h, C_L(H)) = 0$.
Soit α racine non nulle et $y \in L_\alpha$. Alors $\forall h \in H,\ [y,h] = \alpha(h)y$. Donc si $x \in H$, on a $0 = K([x,h],y) = K(x,[h,y]) = -\alpha(x)K(h,y)$. Donc $K(h,y) = 0$ car α est non nulle, d'où $K(h, L_\alpha) = 0$.
Au final on obtient $K(h,L) = 0$ ce qui oblige $h = 0$ car K est non dégénérée puisque L est simple.

4) Par définition $[H, C_L(H)] = 0$ donc $K(H, [C_L(H), C_L(H)]) = K([H, C_L(H)], C_L(H)) = K(0, C_L(H)) = 0$. D'où $H \cap [C_L(H), C_L(H)] = 0$ d'après 3).

5) Soit $x \in C_L(H)$. S'il est semisimple, alors $x \in H$ d'après 2). Alors $\mathrm{ad}_{C_L(H)}x = 0$ et donc x est nilpotent.
S'il est quelconque, ses parties semisimple et nilpotente sont dans $C_L(H)$ d'après 1) et sont donc nilpotentes. Donc x est la somme de deux éléments nilpotents qui commutent, il est donc lui-même nilpotent.
D'après le théorème d'Engel, $C_L(H)$ *est alors nilpotent.*

6) Supposons $[C_L(H), C_L(H)] \neq 0$. En utilisant la nilpotence de $C_L(H)$ et appliquant la deuxième partie du théorème d'Engel à $J := [C_L(H), C_L(H)]$, on obtient $Z(C_L(H)) \cap [C_L(H), C_L(H)] \neq 0$. Soit $z \neq 0$ dans cette intersection, 2) et 4) impliquent que z n'est pas semisimple comme élément de $C_L(H)$.
Sa partie nilpotente n est donc non nulle et appartient à $C_L(H)$ d'après 1). Comme $\mathrm{ad}(n)$ est un polynôme sans terme constant en $\mathrm{ad}(z)$, et que $\mathrm{ad}(z)$ s'annule sur $C_L(H)$, on voit que $\mathrm{ad}(n)$ s'annule sur $C_L(H)$, donc que $[n, C_L(H)] = 0$. Comme de plus $n \in C_L(H)$, on obtient $n \in C_L(C_L(H))$. Alors n est nilpotent et commute avec $C_L(H)$, ce qui donne

$$K(n, C_L(H)) = 0$$

(argument des lignes 3 et 4 du 3) appliqué avec les changements suivants $(H, x, C_L(H)) \to (C_L(H), n, C_L(C_L(H))))$.
La décomposition $L = C_L(H) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \phi} L_\alpha$, les égalités $K(C_L(H), L_\alpha) = 0$ pour $\alpha \neq 0$ et la non-dégénérescence de K impliquent que $K_{|C_L(H)}$ est non dégénérée. Comme $n \in C_L(H)$, cette égalité implique donc $n = 0$. Mais comme z est non semisimple, $n \neq 0$, ce qui donne une contradiction.
On obtient donc que $[C_L(H), C_L(H)] = 0$, *c'est-à-dire que* $C_L(H)$ *est abélien.*

7) Supposons que $C_L(H) \neq H$, alors il contient un élément nilpotent non nul x d'après 1) et 2). Puisque $C_L(H)$ est abélien, $[x, C_L(H)] = 0$. Mais x est nilpotent et commute avec $C_L(H)$ donc $K(x, C_L(H)) = 0$ (nouvelle utilisation de l'argument des lignes 3 et 4 du 3). Comme on l'a vu dans le 6), $K_{|C_L(H)}$ est non dégénérée. Ceci implique $x = 0$, contradiction.
On obtient bien que $C_L(H) = H$.

2.8 Propriétés d'un système de racines

La forme de Killing de L restreinte à H est non dégénérée car L est simple et H est orthogonal à tous les L_α. On peut donc identifier H et H^* : à $\gamma \in H^*$ on associe l'unique élément $t_\gamma \in H$ qui vérifie $\forall h \in H$, $\gamma(h) = K(t_\gamma, h)$. Puisque la forme de Killing restreinte à H est non dégénérée, on peut munir H^* de la forme bilinéaire qui à $\gamma, \delta \in H^*$ associe $(\gamma, \delta) = K(t_\gamma, t_\delta)$.

Définitions : *(module d'algèbre de Lie, module irréductible) Si L est une algèbre de Lie, un L-module est un espace vectoriel V muni d'une opération $L \times V \to V$ (notée $\cdot$) linéaire par rapport aux deux variables et qui vérifie : $[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v)$ pour $x, y \in L$ et $v \in V$. On dit qu'un L-module est irréductible s'il ne contient que deux sous-modules : 0 et lui-même.*

On note $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{K})$ engendrée par :

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que ce sont les matrices de taille 2 à trace nulle. On a alors $[x, y] = h$ et c'est une algèbre de Lie de dimension 3.

Si V est un $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$-module, il est clair que h agit diagonalement sur V et on peut alors décomposer V en somme directe d'espaces $V_\lambda := \{v \in V | h \cdot v = \lambda v\}$. On appelle alors λ le poids de h dans V et V_λ l'espace de poids associé au poids λ.

Lemme : *Pour tous les $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$-sous-modules de L, les poids de h dans V sont entiers, et apparaissent en même nombre que leur opposé.*

Preuve : Puisque L est simple, les $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$-sous-modules de L sont irréductibles. Un simple calcul montre que si $v \in V_\mu$ alors $x \cdot v \in V_{\mu+2}$. Puisque V est de dimension finie, et que la décomposition en V_μ est une somme directe, les espaces de poids non nuls sont en nombres finis et il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $V_\lambda \neq 0$ et $V_{\lambda+2} = 0$ (donc $V_{\lambda+2j} = 0$ pour tout $j \geq 1$).
On prend alors $v_0 \in V_\lambda$ et on pose $v_{-1} = 0$ et pour $i \geq 0$, $v_i = (1/i!)y^i \cdot v_0$. Alors $v_i \in V_{\lambda-2i}$ et comme les espaces de poids sont en nombre fini il existe un entier k tel que $V_{\lambda-2(k-1)} \neq 0$ et $V_{\lambda-2k} = 0$. On peut alors montrer par récurrence la formule : $x \cdot v_i = (\lambda - i + 1)v_{i-1}$.
Soit m le plus petit entier tel que $v_m \neq 0$ et $v_{m+1} = 0$ (donc $v_{m+1} \in V_{\lambda-2k}$ et pour tout $i \geq m+1$ on a $v_i = 0$). On remarque alors que la formule donne pour $i = m + 1 : 0 = (\lambda - m)v_m$. Donc $\lambda = m \in \mathbb{N}$.
Puisque x augmente le poids de 2, y le baisse de 2 et h le laisse invariant, les poids forment une suite arithmétique de raison 2. De plus on a $m + 1$ vecteurs non nuls (les v_i avec $0 \leq i \leq m$) qui appartiennent à des espaces de poids différents, et dont le dernier (v_m) appartient à V_m. Si m est impair, les $m + 1$ poids sont impairs et vont de m à $-m$ inclus ($(m + 1)/2$ poids positifs et $(m+1)/2$ poids négatifs). Si m est pair, les $m+1$ poids sont pairs et vont aussi de m à $-m$ inclus ($m/2$ poids positifs, $m/2$ poids négatifs et 0). Au final tous les poids sont entiers et apparaissent bien avec leur opposé, en même nombre.

Notation : Pour simplifier $\dfrac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ sera noté $< \beta, \alpha >$ dans la suite.

Théorème : *(propriétés de ϕ)*
a) Les éléments de ϕ engendrent H^* et $0 \notin \phi$.
b) Si $\alpha \in \phi$ alors $-\alpha$ et α sont les seuls multiples de α qui appartiennent à ϕ.
c) Si $\alpha, \beta \in \phi$ alors $< \beta, \alpha > \in \mathbb{Z}$.
d) Si $\alpha, \beta \in \phi$ alors $\beta - < \beta, \alpha > \alpha \in \phi$.

Démonstration : a) Si ϕ n'engendrait pas H^* il existerait un $h \in H$ non nul, tel que $\alpha(h) = 0$ pour tous les $\alpha \in \phi$. Donc $[h, L_\alpha] = 0$, mais puisque $[h, H] = 0$ on aurait $[h, L] = 0$, soit $h \in Z(L)$. Ceci est impossible car $Z(L) = 0$. De plus, par définition $0 \notin \phi$.

b) Soient $\alpha, \beta \in \phi$ avec $\alpha + \beta \neq 0$ alors $\exists h \in H$ tel que $(\alpha + \beta)(h) \neq 0$. Soient $x \in L_\alpha$, $y \in L_\beta$ alors on a par invariance de K : $\alpha(h)K(x, y) = K([h, x], y) = -K(x, [h, y]) = -\beta(h)K(x, y)$. Donc $(\alpha + \beta)(h)K(x, y) = 0$ ce qui force $K(x, y) = 0$. Donc si $\alpha, \beta \in H^*$ et $\beta \neq -\alpha$ alors L_α et

L_β sont orthogonaux.
Mais si $-\alpha \notin \phi$ alors $\forall \beta \in H^*$, $K(L_\alpha, L_\beta) = 0$ donc $K(L_\alpha, L) = 0$. Or L étant simple, K est non dégénérée, on a une contradiction donc $-\alpha \in \phi$.

Soient $\alpha \in \phi$, et $x_\alpha \in L_\alpha$ non nul alors il existe un $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ tel que x_α, y_α et $h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$ engendrent une sous-algèbre simple de L de dimension 3 isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ que l'on notera S_α :
Pour commencer si $h \in H$ l'invariance de K permet d'écrire :

$$K(h, [x_\alpha, y_\alpha]) = K([h, x_\alpha], y_\alpha]) = \alpha(h)K(x_\alpha, y_\alpha) = K(t_\alpha, h)K(x_\alpha, y_\alpha)$$

$$= K(K(x_\alpha, y_\alpha)h, t_\alpha) = K(h, K(x_\alpha, y_\alpha)t_\alpha)$$

Donc H est orthogonal à $[x_\alpha, y_\alpha] - K(x_\alpha, y_\alpha)t_\alpha$. Cependant, K restreinte à $H = L_0$ est non dégénérée. Donc $K(x_\alpha, y_\alpha)t_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$. Ceci montre que t_α engendre $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$.
Or si on avait $K(x_\alpha, L_{-\alpha}) = 0$ alors $K(x_\alpha, L) = 0$ ce qui est impossible, donc il existe $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ tel que $K(x_\alpha, y_\alpha) \neq 0$. Puisque α est non nul, t_α l'est aussi et on a $[x_\alpha, y_\alpha] \neq 0$, d'où $[L_\alpha, L_{-\alpha}] \neq 0$. Donc t_α est une base de $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$ qui est de dimension 1.
L'identité de Jacobi implique que $[L_\alpha, L_{-\alpha}] \subset H$ et puisque les racines engendrent H^*, leur cardinal est supérieur à la dimension de H. On a donc $\sum\limits_{\alpha\in\phi} [L_\alpha, L_{-\alpha}] \subset H$ et $\dim(\sum\limits_{\alpha\in\phi} [L_\alpha, L_{-\alpha}]) \geq \dim(H)$. D'où $H = \sum\limits_{\alpha\in\phi} [L_\alpha, L_{-\alpha}]$. Alors L est donc entièrement engendrée par les $L_{-\alpha}$ et L_α avec α des racines.

Par ailleurs, supposons que $\alpha(t_\alpha) = K(t_\alpha, t_\alpha) = 0$. Alors $\forall x \in L_\alpha$, $[x, t_\alpha] = \alpha(t_\alpha)x = 0$ car $t_\alpha \in H$, et de même $\forall y \in L_{-\alpha}$, $[y, t_\alpha] = 0$. Comme avant, il existe un couple $(x_\alpha, y_\alpha) \in L_\alpha \times L_{-\alpha}$ tel que $K(x_\alpha, y_\alpha) \neq 0$. On peut alors supposer en multipliant un des deux, que $K(x_\alpha, y_\alpha) = 1$.
D'après le paragraphe précédent, $[x_\alpha, y_\alpha] = t_\alpha$ et x_α, y_α et t_α engendrent une sous-algèbre de dimension 3, notée S. On a alors facilement que $[t_\alpha, S] = 0$, mais puisque $t_\alpha \in H = C_L(H)$, on a aussi $[t_\alpha, H] = 0$. De plus, puisque les espaces de racines sont orthogonaux, on a $[t_\alpha, L_\beta] = 0$ pour β une autre racine. Donc finalement $[t_\alpha, L] = 0$, c'est-à-dire $t_\alpha \in Z(L)$ qui est un idéal nul car L est simple. D'où $t_\alpha = 0$ ce qui est en contradiction avec sa définition et le fait que α est non nulle. Donc pour tout $\alpha \in \phi$, $K(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$.

On définit $h_\alpha := 2t_\alpha / K(t_\alpha, t_\alpha) \in [L_\alpha, L_{-\alpha}]$ et on prend l'unique $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ tel que $h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$. On a alors $\alpha(h_\alpha) = 2\alpha(t_\alpha)/K(t_\alpha, t_\alpha) = 2$. On peut vérifier par des calculs simples que ces éléments définissent une sous-algèbre simple de L de dimension 3 isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. On la note S_α.

On considère maintenant le sous-espace M de L engendré par H et les $L_{c\alpha}$ avec $c \in \mathbb{K}^*$. Puisque L_α et L_β sont orthogonaux pour $\alpha + \beta \neq 0$, c'est un S_α-module.
Si $x \in H$ on a $[h_\alpha, x] = 0$ et si $x \in L_{c\alpha}$ on a $[h_\alpha, x] = c\alpha(h_\alpha)x = 2cx$. Donc les poids possibles de h_α dans M sont 0 et $2c$. D'après le lemme précédent ce sont des entiers et donc c est un multiple de $1/2$.
Par ailleurs, α étant une application linéaire sur H de dimension 1, son noyau est de codimension 1 et on a $H = h_\alpha\mathbb{K} + \mathrm{Ker}(\alpha)$. On remarque que S_α envoie $\mathrm{Ker}(\alpha)$ sur 0, mais S_α est un S_α-sous-module de M irréductible. On a alors bien une occurrence du poids 0 de h_α. Avec les dimensions on voit qu'il n'y a que 3 poids, et puisqu'on a une occurrence de 0, les seuls poids possibles sont $0, \pm 2$. Ceci implique que $c = \pm 1$.
Les seuls multiples de α qui sont racines sont $\pm\alpha$.

c) On en déduit alors que M est engendré par H, L_α et $L_{-\alpha}$. Donc $M = H + S_\alpha$ et les L_α sont de dimension 1.
Soit $\beta \in \phi$, $\beta \neq \pm\alpha$, on pose $N = \sum_{i \in Z} L_{\beta+i\alpha}$.
Puisque chaque espace de racine est de dimension 1 et que $\beta + i\alpha \neq 0$, N est un S_α-sous-module de L avec des espaces de poids de dimension 1, correspondants aux poids $\beta(h_\alpha) + 2i$. En effet, si $z \in L_{\beta+i\alpha}$, on a $[h_\alpha, z] = (\beta + i\alpha)(h_\alpha)z = (\beta(h_\alpha) + 2i)z$.
D'après le lemme précédent ces poids sont des entiers. On a donc $\beta(h_\alpha) + 2i \in Z$. Or $\beta(h_\alpha) = 2\beta(t_\alpha)/K(t_\alpha, t_\alpha) = 2K(t_\beta, t_\alpha)/K(t_\alpha, t_\alpha) = 2(\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha)$. Donc $< \beta, \alpha > \in \mathbb{Z}$ si $\beta \neq \pm\alpha$, et l'égalité est claire si $\beta = \pm\alpha$.

d) Les poids étant de la forme $\beta(h_\alpha) + 2i$, $i \in Z$, on a $\beta(h_\alpha)$ qui est un poids, et donc son opposé aussi (d'après le lemme précédent). Il existe alors un i tel que $-\beta(h_\alpha) = \beta(h_\alpha) + 2i$, ce qui donne $i = -\beta(h_\alpha)$. On a bien $\beta + (-\beta(h_\alpha))\alpha$ est une racine associée au poids $-\beta(h_\alpha)$ donc $\beta - < \beta, \alpha > \alpha$ est une racine si $\beta \neq \pm\alpha$.
Si $\beta = \alpha$, on a $< \alpha, \alpha >= 2$ et donc $\beta - < \beta, \alpha > \alpha = -\alpha$ est une racine. Et si $\beta = -\alpha$, on a $< -\alpha, \alpha >= -2$ et donc $\beta - < \beta, \alpha > \alpha = -\alpha + 2\alpha = \alpha$ est une racine.

Propriété : *On peut créer un espace euclidien E qui étend H^* et qui est engendré par le système de racines ϕ.*

Construction : Puisque ϕ engendre H^*, on peut choisir une base $\alpha_1, ..., \alpha_l$ de racines. Alors toute racine $\beta \in \phi$ se décompose de manière unique sur cette base. Soit $\beta = \sum c_i\alpha_i$, avec les c_i des coefficients de $\mathbb{K}$. On va montrer qu'en réalité, ces coefficients sont rationnels :
On a la décomposition

$$(\beta, \alpha_j) = \sum_{i=1}^{l} c_i(\alpha_i, \alpha_j)$$

Donc pour tous les $j \in [1, l]$:

$$2(\beta, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j) = \sum_{i=1}^{l} c_i \cdot 2(\alpha_i, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j)$$

Ces équations forment un système de l équations avec l inconnues c_i et des coefficients entiers. Puisque les α_i forment une base de H^*, la matrice des (α_i, α_j) est inversible (par Gram-Schmidt). Donc celle du système l'est aussi et il existe une unique solution à ce système dans $\mathbb{K}$, mais aussi dans $\mathbb{Q}$. Ces deux solutions coïncident donc et les coefficients sont bien rationnels.

On note $E_\mathbb{Q}$ le sous-espace de H^* engendré par les $\mathbb{Q}$-combinaisons linéaires des racines. Cet espace est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension $l = \dim_\mathbb{K}(H^*)$.

De plus, si $\lambda, \mu \in H^*$ alors t_λ et t_μ appartiennent à H et sont semisimples. Alors $\mathrm{ad}t_\lambda$ et $\mathrm{ad}t_\mu$ sont des endomorphismes de L diagonalisables. Mais puisque $H = C_L(H)$, t_λ et t_μ commutent. On a vu alors que $\mathrm{ad}t_\lambda$ et $\mathrm{ad}t_\mu$ commutent aussi et donc ils sont même simultanément diagonalisable (dans une base notée B).
Comme $L_\alpha := \{x \in L | [x, h] = \alpha(h)x, \forall h \in H\}$ et que $t_\lambda \in H$, les valeurs propres de $\mathrm{ad}t_\lambda = [t_\lambda, -]$ sont les $-\alpha(t_\lambda)$ avec $\alpha \in \phi$. Mais comme les seuls multiples de α dans ϕ sont $\pm\alpha$, les valeurs propres de $\mathrm{ad}t_\lambda$ sont les $\alpha(t_\lambda)$, $\alpha \in \phi$.

Finalement, comme la trace est invariante par changement de base, on calcul dans la base B : $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}t_\lambda \mathrm{ad}t_\mu) = \sum\limits_{\alpha\in\phi} \alpha(t_\lambda)\alpha(t_\mu)$. On obtient alors

$$K(t_\lambda, t_\mu) = \sum_{\alpha\in\phi} \alpha(t_\lambda)\alpha(t_\mu)$$

Donc si $\lambda, \mu \in H^*$ on a

$$(\lambda, \mu) = K(t_\lambda, t_\mu) = \sum_{\alpha\in\phi} \alpha(t_\lambda)\alpha(t_\mu) = \sum_{\alpha\in\phi} K(t_\alpha, t_\lambda)K(t_\alpha, t_\mu) = \sum_{\alpha\in\phi} (\alpha, \lambda)(\alpha, \mu)$$

De plus, si $\beta \in \phi$ alors

$$(\beta, \beta) = \sum_{\alpha\in\phi} (\alpha, \beta)^2$$

Mais on a vu dans la partie b) de la démonstration du théorème précédent que pour tout $\alpha \in \phi$, $K(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$. Donc $(\beta, \beta) = K(t_\beta, t_\beta) \neq 0$. On déduit alors de cette égalité $\dfrac{1}{\sum \dfrac{(\alpha,\beta)^2}{(\beta,\beta)^2}} = (\beta, \beta)$,

et comme $\dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} \in \mathbb{Z}$, on a

$$(\beta, \beta) = \frac{1}{\sum \dfrac{(\alpha,\beta)^2}{(\beta,\beta)^2}} \in \mathbb{Q}$$

En utilisant encore $\dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} \in \mathbb{Z}$, on obtient que pour toutes racines $\alpha, \beta \in \phi$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}$. Puisque les racines engendrent $E_\mathbb{Q}$ par définition, la forme bilinéaire se corestreint en une forme bilinéaire $E_\mathbb{Q} \times E_\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$. L'égalité $(\lambda, \mu) = \sum\limits_{\alpha\in\phi} (\alpha, \lambda)(\alpha, \mu)$ valable pour $\lambda, \mu \in H^*$ implique alors que cette forme bilinéaire sur $\mathbb{Q}$ est définie positive.

On construit alors E en étendant le corps de base de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ et on obtient bien un espace euclidien de dimension l et engendré par ϕ.

3 Classification des systèmes de racines

3.1 Systèmes de racines d'un espace euclidien, systèmes de racines irréductibles et isomorphismes

Dans cette partie E désigne un espace euclidien. Une réflexion dans E est une application linéaire qui fixe un hyperplan et envoie tout vecteur orthogonal à cet hyperplan en son opposé. On notera σ_α la réflexion dans E selon l'axe dirigé par α si $\alpha \in E$, et P_α l'hyperplan fixé par cette réflexion. Il est orthogonal à α par définition. Pour tout $\beta \in E$ on note b est la longueur du projeté de β sur α ($b = \dfrac{(\alpha,\beta)}{\| \alpha \|}$). On a alors une écriture de σ_α : $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - 2b\dfrac{\alpha}{\| \alpha \|} = \beta - \dfrac{2(\alpha,\beta)}{\| \alpha \|^2}\alpha = \beta - <\beta,\alpha> \alpha$. Donc $\forall \beta \in E$, $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - <\beta,\alpha> \alpha$.

Définition : *(système de racines dans un espace euclidien) Un ensemble Φ d'éléments de E est appelé système de racines dans E s'il vérifie les axiomes suivants :*

- *Il est de cardinal fini, ne contient pas 0 et ses éléments engendrent E.*
- *Si $\alpha \in \Phi$ les seuls multiples de α dans Φ sont $\pm\alpha$.*
- *Si $\alpha, \beta \in \Phi$ alors $<\alpha,\beta> \in \mathbb{Z}$.*
- *Soit $\alpha \in \Phi$, alors Φ est invariant par σ_α (ce qui est équivalent à $\beta - <\beta,\alpha> \alpha \in \Phi$ $\forall \beta \in \Phi$).*

Définitions : *(isomorphismes, système de racines irréductible, groupe de Weyl)*

- *Un isomorphisme entre les systèmes de racines (E,Φ) et (E',Φ') est un isomorphisme ψ de l'espace vectoriel E dans E', qui envoie Φ sur Φ' et tel que $<\psi(\beta),\psi(\alpha)> = <\beta,\alpha>$.*
- *On dit qu'un système de racines Φ est de rang l si* $\dim E = l$.
- *Un système de racines est irréductible s'il ne peut pas se décomposer en union de deux sous-ensembles, tels que chaque racine d'un ensemble soit orthogonale à toutes les racines de l'autre ensemble.*
- *On note W et on appelle groupe de Weyl de Φ, le sous-groupe fini de $GL(E)$ engendré par les réflexions σ_α avec $\alpha \in \Phi$.*

Lemme : *Si $\sigma \in GL(E)$ laisse Φ invariant (en particulier si $\sigma \in W$) alors $\forall \alpha, \beta \in \Phi$ $<\sigma(\beta),\sigma(\alpha)> = <\beta,\alpha>$*

Preuve : Si $\alpha \in E$ on a une écriture de $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - <\beta,\alpha> \alpha$. On a aussi l'égalité $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}(\sigma(\beta)) = \sigma\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi$ car σ et σ_α laissent Φ invariant. Donc $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$ laisse Φ invariant, et $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}(\sigma(\alpha)) = \sigma\sigma_\alpha(\alpha) = -\sigma(\alpha)$. De plus, si $\gamma \in P_{\sigma(\alpha)}$ alors $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}(\sigma(\gamma)) = \sigma\sigma_\alpha(\gamma) = \sigma(\gamma)$. Donc $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$ fixe $P_{\sigma(\alpha)}$.
On remarque donc que $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$ vérifie toute les propriétés de la réflexion selon $\sigma(\alpha)$ *d'où l'égalité* $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(\alpha)}$.
On calcule alors $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}(\sigma(\beta)) = \sigma_{\sigma(\alpha)}(\sigma(\beta)) = \sigma(\beta) - <\sigma(\beta),\sigma(\alpha)> \sigma(\alpha) = \sigma(\beta - <\sigma(\beta),\sigma(\alpha)> \alpha)$. Mais par ailleurs $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}(\sigma(\beta)) = \sigma\sigma_\alpha(\beta)$.
On a donc l'égalité $\beta - <\sigma(\beta),\sigma(\alpha)> \alpha = \sigma_\alpha(\beta)$. Or par définition $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - <\beta,\alpha> \alpha$. En comparant ces deux égalités on obtient bien $<\beta,\alpha> = <\sigma(\beta),\sigma(\alpha)>$.

3.2 Paires de racines et longueurs de racines d'un espace euclidien

Soient α et β deux racines de Φ. Si θ est l'angle entre β et α, on a :

$$< \beta, \alpha >= \frac{2\|\beta\| \cos\theta}{\|\alpha\|}$$

Et donc

$$< \beta, \alpha >< \alpha, \beta >= 4\cos^2\theta \in \mathbb{N}$$

De plus, puisque cosinus est paire, on a que $< \beta, \alpha >$ et $< \alpha, \beta >$ sont de même signe. On peut alors facilement vérifier que, si on suppose $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$, les seules possibilités sont :

θ	$< \alpha, \beta >$	$< \beta, \alpha >$	$(\|\beta\|/\|\alpha\|)^2$
0	2	2	1
$\pi/2$	0	0	indéfini
$\pi/3$	1	1	1
$2\pi/3$	-1	-1	1
$\pi/4$	1	2	2
$3\pi/4$	-1	-2	2
$\pi/6$	1	3	3
$5\pi/6$	-1	-3	3
π	-2	-2	1

Remarque importante : Si $\alpha \neq \pm\beta$ alors $< \alpha, \beta > \cdot < \beta, \alpha >\in \{0, 1, 2, 3\}$.

Lemme : *Dans un système de racines irréductible, il y a au plus deux longueurs de racines (c'est-à-dire norme d'un élément de ce système de racines, $\|\alpha\|$) différentes.*

Preuve : Soit E' un sous-espace non nul de E invariant par W. L'espace orthogonal E'' de E' est aussi invariant par W et on a $E = E' \oplus E''$. Puisque pour tout $\sigma \in W$ on a $\sigma(E') = E'$, on vérifie facilement que si $\alpha \in \Phi$ alors soit $\alpha \in E'$, soit E' est inclus dans l'orthogonal de α, ce qui revient à dire que $\alpha \in E''$. En effet, σ_α appartient à W et les seuls sous-espaces de E invariant par une réflexion sont l'axe de la réflexion et le sous-espace orthogonal. Donc E' est contenu dans un de ses deux sous-espaces, mais l'axe de réflexion étant de dimension 1 dirigé par α, dire que E' est inclus dans cet axe est équivalent à dire que α appartient à E'.
Donc les racines sont dans E' ou E'', mais Φ étant irréductible on a que $\Phi \subset E'$ ou $\Phi \subset E''$. Supposons le premier cas, puisque Φ engendre E on obtient $E' = E$. On a montré que si E' est un sous-espace de E invariant par W, alors $E' = E$. De plus, E'' est alors forcément nul. Le même raisonnement montre que si Φ est inclus dans E'' alors E' est non nul, ce qui est impossible par hypothèse. On a bien $\Phi \subset E'$ et donc $E = E'$.
Or l'espace engendré par l'orbite d'une racine est un sous-espace de E invariant par W, donc il est égal à E. On a montré que les $\sigma(\alpha)$ engendrent E lorsque σ parcours W.
Si $\alpha, \beta \in \Phi$ sont des racines, tous les $(\sigma(\alpha), \beta)$, $\sigma \in W$ ne peuvent pas être nuls d'après le paragraphe précédent. D'après le tableau ci-dessus si $(\sigma(\alpha), \beta) \neq 0$ alors le rapport entre les longueurs de $\sigma(\alpha)$ et β ne peut être que 1, 2 ou 3. Mais, si on suppose que ce rapport ne vaut pas 1, et qu'une autre racine γ a une troisième longueur de racine différente, le même raisonnement avec γ et β implique qu'un 2/3 apparait dans le rapport de deux longueurs de racines, ce qui est impossible.

3.3 Racines simples d'un système de racines

Définition : *(Système de racines simples d'un système de racines) Un sous-ensemble Δ de Φ est un système de racines simples de Φ si : Δ est une base de E au sens d'espace-vectoriel et tout $\beta \in \Phi$ s'écrit $\beta = \sum\limits_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \alpha$ avec les $k_\alpha \in \mathbb{Z}$ tous positifs ou tous négatifs.*
On appelle les éléments de Δ des racines simples.

Lemme : *Soient α, β deux racines, si $\alpha \neq \pm\beta$ et si $(\alpha, \beta) > 0$ alors $\alpha - \beta$ est une racine. De plus, si Δ est un système de racines simples de Φ alors $\forall \alpha, \beta \in \Delta$, $\alpha \neq \beta$ alors $(\alpha, \beta) \leq 0$ et $\alpha - \beta$ n'est pas une racine.*

Preuve : Puisque (α, β) et $< \alpha, \beta >$ sont de même signe, le tableau au-dessus montre que $< \alpha, \beta >$ ou $< \beta, \alpha >$ vaut 1. Si c'est le premier, alors $\alpha - \beta = \sigma_\beta(\alpha) \in \Phi$ par définition d'un système de racines. Dans l'autre cas $\beta - \alpha \in \Phi$ et alors $-(\beta - \alpha) = \alpha - \beta \in \Phi$.
Pour la deuxième partie raisonnons par l'absurde. Supposons que pour un couple de racines simples $\alpha, \beta \in \Delta$, $\alpha \neq \beta$, on ait $(\alpha, \beta) > 0$. Si α est une racine simple, $-\alpha$ ne peut pas l'être puisque Δ est une base de E. Donc $\alpha - \beta$ est une racine d'après la première partie. On a alors une racine dont la décomposition sur les racines simples comprend un coefficient positif et un négatif. Ceci est en contradiction avec la définition d'un système de racines simples.

Théorème : *Tout système de racines Φ possède un système de racines simples Δ.*

Démonstration : Pour le montrer, on va en construire un concrètement. On rappelle que P_α est l'hyperplan fixé par la réflexion σ_α. Soit $\gamma \in E \setminus \bigcup\limits_{\alpha\in\Phi} P_\alpha$ (qui est non vide car une union finie d'hyperplans ne recouvre pas tout l'espace), on définit $\Phi^+(\gamma) = \{\alpha \in \Phi | (\gamma, \alpha) > 0\}$. On dit que $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ est indécomposable s'il ne peut pas s'écrire $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ avec $\beta_i \in \Phi^+(\gamma)$. On a clairement $\Phi = \Phi^+(\gamma) \cup -\Phi^+(\gamma)$ et si $\Delta(\gamma)$ est l'ensemble de toutes les racines indécomposables de $\Phi^+(\gamma)$, alors c'est un système de racines simples de Φ. On va le montrer en deux étapes.

1) Les racines de $\Phi^+(\gamma)$ sont des $\mathbb{Z}$-combinaisons linéaires d'éléments de $\Delta(\gamma)$ avec des coefficients positifs. Montrons que ceci implique la deuxième condition que doivent satisfaire les racines simples car $\Phi = \Phi^+(\gamma) \cup -\Phi^+(\gamma)$:
Soit $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ la racine telle que (γ, α) soit minimal et qui ne se décompose pas de cette manière (une $\mathbb{N}$-combinaison linéaire d'éléments de $\Delta(\gamma)$). Clairement $\alpha \notin \Delta(\gamma)$, donc $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ avec $\beta_i \in \Phi^+(\gamma)$ ce qui implique $(\beta_i, \gamma) > 0$. Puisque $(\beta_i, \gamma) < (\alpha, \gamma)$ et que (γ, α) est minimal, il faut donc que β_i soit une combinaison linéaire d'éléments de $\Delta(\gamma)$ avec des coefficients positifs. Donc c'est aussi le cas de α, ce qui est une contradiction.

2) *Il reste juste à prouver que $\Delta(\gamma)$ est une base de E.* Mais le point précédent implique que toute racine de Φ est une $\mathbb{Z}$-combinaison linéaire d'éléments de $\Delta(\gamma)$, et puisque Φ engendre E, c'est aussi le cas de $\Delta(\gamma)$. Nous allons donc montrer que $\Delta(\gamma)$ est linéairement indépendant :
Si $\alpha, \beta \in \Delta(\gamma)$, $\alpha \neq \beta$, alors $(\alpha, \beta) \leq 0$.
En effet, sinon $\alpha - \beta$ est une racine d'après le lemme ci-dessus. Et puisque $\beta \neq -\alpha$ on a soit $\alpha - \beta$, soit $\beta - \alpha$ qui appartient à $\Phi^+(\gamma)$. Dans le premier cas on a $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$ qui est une décomposition de α, ce qui contredit le fait que $\alpha \in \Delta(\gamma)$. Dans l'autre cas on fait de même avec β.
Supposons maintenant que $\sum_{\alpha\in\Delta(\gamma)} r_\alpha \alpha = 0$ avec $r_\alpha \in \mathbb{R}$. On peut réécrire ceci sous la forme $\sum s_\alpha \alpha = \sum t_\beta \beta$ en séparant les r_α positifs et négatifs (donc $s_\alpha \geq 0$ et $t_\beta \geq 0$ et les α et β sont

disjoints). On pose $\varepsilon = \sum s_\alpha \alpha$ alors $(\varepsilon, \varepsilon) = \sum\limits_{\alpha,\beta} s_\alpha t_\beta (\alpha, \beta) \leq 0$ d'après l'étape 2. Donc $(\varepsilon, \varepsilon) = 0$ ce qui implique $\varepsilon = 0$. On a alors, $0 = (\gamma, \varepsilon) = \sum s_\alpha (\gamma, \alpha)$ et puisque $\forall \alpha \in \Delta(\gamma)$, $(\gamma, \alpha) > 0$ on a tous les s_α qui sont nuls. On peut ensuite faire de même pour tous les t_β et obtient finalement que tous les r_α sont nuls.

3.4 Groupe de Weyl d'un système de racines d'un espace euclidien

Théorème : *Soit Δ un système de racines simples du système de racines Φ.*

a) Soit $\gamma \in E \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$, alors il existe une réflexion $\sigma \in W$ telle que pour tous les $\alpha \in \Delta$, on ait $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$.
b) Le groupe W agit transitivement sur les systèmes de racines simples. (Si Δ' est un autre système de racines simples de Φ, alors il existe $\sigma \in W$ telle que $\sigma(\Delta') = \Delta$).
c) Si $\alpha \in \Phi$ alors il existe $\sigma \in W$ telle que $\sigma(\alpha) \in \Delta$.
d) Le groupe W est engendré par les σ_α avec $\alpha \in \Delta$.

Démonstration : Soit W' le sous-groupe de W engendré par les σ_α avec $\alpha \in \Delta$. On va montrer a), b) et c) avec W' puis utiliser ces résultats pour montrer que $W = W'$ dans la partie d).

a) Les P_α ne recouvrent pas tout E car ils sont en nombre fini. Ils décomposent donc E en différentes composantes connexes que l'on appelle chambres de Weyl. L'énoncé revient alors à dire que W' agit transitivement sur les chambres de Weyl.
Soit $\delta = 1/2 \sum \alpha$, avec une sommation sur les $\alpha \in \Phi$ tels que leur décomposition en racines simples n'ait que des coefficients positifs (c'est-à-dire que $\alpha \in \Phi^+$). On choisit $\sigma \in W'$ de sorte que $(\sigma(\gamma), \delta)$ soit maximal. Si α est une racine simple, alors $\sigma_\alpha \sigma \in W'$ et on a alors $(\sigma(\gamma), \delta) \geq (\sigma_\alpha \sigma(\gamma), \delta) = (\sigma(\gamma), \sigma_\alpha(\delta))$.
De plus, si ε est une racine simple, σ_ε permute les racines autres que ε, dont la décomposition ne comporte que des coefficients positifs. En effet, si on a une telle racine, elle n'est pas proportionnelle à ε, donc la formule pour σ_ε implique que l'un des coefficients ne varie pas et reste positif. Mais les coefficients de la décompositions sont tous du même signe, donc les autres seront aussi positifs. Alors l'image ne peut pas être proportionnelle à ε. On calcule $\sigma_\varepsilon(\delta) = \delta - \varepsilon$ pour toute racine simple ε car le coefficient $1/2$ devient $-1/2$ et les autres racines sont justes échangées.
Puisque α est une racine simple, on a alors $(\sigma(\gamma), \delta) \geq (\sigma(\gamma), \delta) - (\sigma(\gamma), \alpha)$, d'où $(\sigma(\gamma), \alpha) \geq 0$ pour toute α racine simple. Supposons que $(\sigma(\gamma), \alpha) = 0$ pour un α alors γ serait orthogonal à $\sigma^{-1}(\alpha)$ qui est une racine or c'est impossible d'après la définition de γ. On a donc bien $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$ pour $\alpha \in \Delta$.

b) On a une bijection naturelle entre les chambres de Weyl et les systèmes de racines simples :
Deux éléments $\gamma, \gamma' \in E$ appartiennent à la même chambre de Weyl si et seulement si ils sont situés du même coté de chaque P_α, $\alpha \in \Phi$. Ceci est équivalent à $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$ qui est équivalent à $\Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$. Donc W' permute aussi les systèmes de racines simples de Φ transitivement.

c) D'après le b) il suffit de montrer que chaque racine appartient à au moins un système de racines simples. Si $\beta \neq \pm\alpha$ les P_β sont différents de P_α. On peut donc prendre un $\gamma \in E$ qui appartienne à P_α mais à aucun P_β. On peut alors choisir $\gamma' \in E$ (près de γ) tel que

$(\gamma', \alpha) = \varepsilon > 0$ et $|(\gamma', \beta)| > \varepsilon$ pour tous les $\beta \neq \pm\alpha$. Dans ce cas, $\alpha \in \Delta(\gamma')$, on a trouvé un système de racines simples qui contient α.

d) On veut montrer que $W = W'$ donc par définition, il suffit de montrer que $\sigma_\alpha \in W'$ pour tous les $\alpha \in \Phi$. Soit α une racine quelconque, d'après c) il existe $\sigma \in W'$ telle que $\sigma(\alpha) = \beta \in \Delta$. Alors on a $\sigma_\beta = \sigma_{\sigma(\alpha)} = \sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$ (vu dans la démonstration du lemme du 3.1). On obtient donc $\sigma_\alpha = \sigma^{-1}\sigma_\beta\sigma \in W'$ car β est une racine simple. On a bien montré que $\sigma(\alpha) \in W'$.

3.5 Lien entre systèmes de racines irréductibles et systèmes de racines simples d'un espace euclidien

Théorème : *Soit Δ un système de racines simples de Φ, alors Φ est irréductible si et seulement si Δ est irréductible (selon la même définition).*

Démonstration : Montrons que si Φ est réductible alors Δ l'est aussi. Soit $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ avec Φ_1 et Φ_2 disjoints, orthogonaux et non vides. Si $\Delta \subset \Phi_1$ on a $(\Phi_2, \Delta) = 0$ donc, puisque Δ engendre E, $(\Phi_2, E) = 0$ ce qui est impossible car $\Phi_2 \subset E$. On peut faire le même raisonnement avec Φ_2 et donc Δ n'est inclus strictement ni dans Φ_1 ni dans Φ_2. On a alors la décomposition $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, avec Δ_1 l'ensemble de racines simples appartenant à Φ_1 et Δ_2 l'ensemble de racines simples appartenant à Φ_2. Dans ce cas, $\Delta_1 \subset \Phi_1$ et $\Delta_2 \subset \Phi_2$ donc Δ_1 et Δ_2 sont disjoints et orthogonaux. De plus, puisque Δ n'est inclus strictement ni dans Φ_1 ni dans Φ_2, Δ_1 et Δ_2 sont non vides. Donc Δ est réductible.

Réciproquement, supposons que Δ est réductible, c'est-à-dire que $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, avec Δ_1 et Δ_2 disjoints, orthogonaux et non vides. Chaque racine est conjuguée à une racine simple (partie c) du théorème) donc on peut écrire $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ avec Φ_i les racines conjuguées à une racine simple de Δ_i. De plus, le théorème implique que W est engendré par les σ_α, $\alpha \in \Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$. Si $\beta \in \Delta_1$ alors Δ_2 est inclus dans l'orthogonal de β, et donc σ_β laisse Δ_2 invariant, et l'image de Δ_1 ne peut pas appartenir à Δ_2. Donc une racine de Δ_1 ne peut pas être conjuguée à une racine de Δ_2 ; les ensembles Φ_1 et Φ_2 sont disjoints.

Si α et β sont deux racines, un simple calcul montre que si $(\alpha, \beta) = 0$, alors σ_α et σ_β commutent. Soient $\alpha \in \Phi_1$ et $\sigma \in W$ tels que $\sigma(\alpha) \in \Delta_1$. Alors dans la décomposition de σ en réflexion selon des racines simples, on peut commuter celles selon Δ_1 et selon Δ_2. Puisque celles selon Δ_2 laissent Δ_1 invariant, on peut supposer que σ n'est engendré que par des réflexions selon Δ_1.
Soit $\beta \in \Delta_1$, la racine simple telle que la décomposition de σ soit $\sigma = \sigma_\beta\sigma'$. Alors $\sigma(\alpha) = \sigma_\beta(\sigma'(\alpha)) = \sigma'(\alpha) - < \sigma'(\alpha), \beta > \beta$. Or $\beta \in \Delta_1$ et par hypothèse $\sigma(\alpha) \in \Delta_1$, donc $\sigma'(\alpha)$ est une combinaison linéaire d'éléments de Δ_1. On réitérant le procédé on montre alors que α est obtenue par combinaison linéaire d'éléments de Δ_1.
On peut faire le même raisonnement avec Φ_2 et alors chaque racine de Φ_i est obtenue par une combinaison linéaire d'éléments de Δ_i. Donc Φ_i est inclus dans E_i le sous-espace de E engendré par Δ_i. On a donc bien que Φ_1 et Φ_2 sont orthogonaux et non vides, Φ est alors réductible.

Propriété : *Soit Φ un système de racines irréductible, et Δ un système de racines simples associé. Alors il existe une unique racine "maximale" β dans Φ, c'est-à-dire telle que $\beta = \sum k_\alpha \alpha$ avec $\alpha \in \Delta$ et que $\sum k_\alpha$ soit maximal. Ceci implique que pour tous les $\alpha \in \Delta$, $k_\alpha > 0$.*

Preuve : Soit β une racine maximale comme ci-dessus, elle existe car Φ est de cardinal fini, il suffit alors de prendre celle pour laquelle $\sum k_\alpha$ est maximal. On a trivialement $k_\alpha \geq 0$. Si $\Delta_1 := \{\alpha \in \Delta | k_\alpha > 0\}$ et $\Delta_2 := \{\alpha \in \Delta | k_\alpha = 0\}$ alors $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ et Δ_1 est clairement non vide.
On suppose que Δ_2 est non vide et on choisit $\alpha \in \Delta_2$ non orthogonale à Δ_1 (puisque Δ est irréductible). On sait que si $\alpha_1, \alpha_2 \in \Delta$ alors $(\alpha_1, \alpha_2) \leq 0$ donc, par linéarité, $(\alpha, \beta) \leq 0$.
De plus, il existe $\alpha' \in \Delta_1$ telle que $(\alpha, \alpha') < 0$ alors $(\alpha, \beta) < 0$. D'où $(\alpha, -\beta) > 0$ donc d'après le lemme du 3.3 $\alpha - (-\beta) = \alpha + \beta$ est une racine ce qui est impossible par maximalité de β. Donc Δ_2 est vide et pour tous les $\alpha \in \Delta$, $k_\alpha > 0$.
Puisque Δ engendre E, on a $(\alpha, \beta) > 0$ pour au moins un $\alpha \in \Delta$. S'il existe une autre racine maximale β' alors le même argument implique que $(\alpha', \beta') > 0$ pour au moins un $\alpha' \in \Delta$. Alors par linéarité $(\beta, \beta') > 0$, et si $\beta \neq \beta'$, alors $\beta - \beta'$ est une racine (encore le lemme du 3.3)et donc β et β' ne peuvent plus être simultanément maximales. Donc $\beta = \beta'$, on a bien l'unicité.

3.6 Matrices de Cartan et diagrammes de Dynkin

Dans cette partie, Φ est un système de racine de rang l, W son groupe de Weyl associé, et Δ un système de racines simples de Φ.

Définition : *(Matrice de Cartan) Soit $(\alpha_1, ..., \alpha_l)$ un ordre des racines simples. La matrice $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq l}$ avec $a_{i,j} =< \alpha_i, \alpha_j >$ est appelée matrice de Cartan, et ses coefficients sont appelés entiers de Cartan.*

Proposition : *Un système de racines détermine une unique matrice de Cartan, et la matrice de Cartan d'un système de racines détermine une classe de systèmes de racines isomorphes.*

Démonstration : On a montré précédemment que si $\sigma \in W$ alors $< \alpha, \beta >=< \sigma(\alpha), \sigma(\beta) >$ $\forall \alpha, \beta \in \Delta$. Donc le fait que W agit transitivement sur les systèmes de racines simples de Φ implique que *la matrice de Cartan ne dépend pas du système de racines simple choisi.* On a donc la première partie de la proposition (à une renumérotation des racines simples près).

Par ailleurs, si $\Phi' \subset E'$ est un autre système de racines avec le système de racines simples associé $\Delta' = \{\alpha'_1, ..., \alpha'_l\}$, et si $< \alpha_i, \alpha_j >=< \alpha'_i, \alpha'_j >$ pour tous les i, j, alors la bijection qui envoie α_i sur α'_i s'étend de manière unique en une bijection de (E, Φ) vers (E', Φ') :
En effet, puisque Δ engendre E, cette bijection s'étend en un unique isomorphisme ψ de E dans E'. On a alors pour tout $\alpha, \beta \in \Delta$:

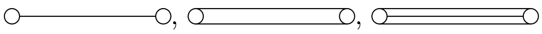
$$\sigma_{\psi(\alpha)}(\psi(\beta)) = \sigma_{\alpha'}(\beta') = \beta' - < \beta', \alpha' > \alpha' = \psi(\beta) - < \beta, \alpha > \psi(\alpha) = \psi(\sigma_\alpha(\beta))$$

Et comme Δ engendre E et que les applications sont linéaires on a pour toute racine simple α, et pour tout $\beta \in E$, $\sigma_{\psi(\alpha)}(\psi(\beta)) = \psi(\sigma_\alpha(\beta))$.
Puisque W est engendré par les σ_α avec $\alpha \in \Delta$, et que toute racine est conjuguée à une racine simple, on obtient que ψ envoie Φ sur Φ'. Et finalement, on a pour toutes racines simples $\alpha, \beta \in \Delta$, $\sigma_{\psi(\alpha)}(\psi(\beta)) = \psi(\beta) - < \psi(\beta), \psi(\alpha) > \psi(\alpha)$ et $\psi(\sigma_\alpha(\beta)) = \psi(\beta - < \beta, \alpha > \alpha) = \psi(\beta) - \psi(< \beta, \alpha >)\psi(\alpha)$. Donc comme

$\sigma_{\psi(\alpha)}(\psi(\beta)) = \psi(\sigma_\alpha(\beta))$, on a $\psi(< \beta, \alpha >) =< \psi(\beta), \psi(\alpha) >$, ψ préserve bien les entiers de Cartans. On a bien montré que Φ et Φ' sont bien isomorphes.
Donc la matrice de Cartan de Φ détermine bien Φ à isomorphisme près.

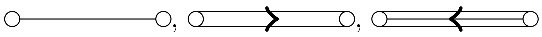
Pour classer les systèmes de racines, il suffit donc de trouver toutes les matrices de Cartan possibles.

Définition : *(Graphe de Coxeter) Si α, β sont deux racines non multiples l'une de l'autre, on sait que $\langle \alpha, \beta \rangle \cdot \langle \beta, \alpha \rangle \in \{0, 1, 2, 3\}$. On définit alors le graphe de Coxeter de Φ par un graphe à l sommets (l étant le nombre de racines simples), dans lequel les sommets i et j sont reliés par $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \cdot \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$ arrêtes.*

Exemples : 

On a vu dans la partie précédente qu'il existe au plus deux longueurs de racines dans Φ. Cependant, on peut retrouver la matrice de Cartan à partir du graphe de Coxeter associé seulement si les racines ont toutes la même longueur. En effet, si le graphe comprend une arrête double ou triple on ne peut pas savoir lequel des deux sommets correspond à la racine la plus courte.

Définition : *(Diagrammes de Dynkin) On définit alors le diagramme de Dynkin de Φ qui est son graphe de Coxeter auquel on ajoute une flèche vers la racine la plus courte lorsque l'on a une arrête double ou triple.*

Exemples : 

3.7 Théorème de classification des diagrammes de Dynkin connectés

Il y a une bijection évidente entre matrice de Cartan et diagramme de Dynkin de Φ. Il nous suffit alors de trouver tous les diagrammes de Dynkin possibles pour classer les systèmes de racines.

Propriété : *Un système de racines Φ se décompose de manière unique en une union de systèmes de racines irréductibles Φ_i (de sous-espaces E_i de E) tels que $E = E_1 \oplus ... \oplus E_t$.*

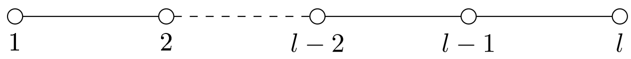
Preuve : On a vu que Φ est irréductible si et seulement si un système de racines simples Δ associé l'est. Or, il est clair que Δ est irréductible si et seulement si son graphe de Coxeter est connecté. Supposons que le graphe de Coxeter associé à Δ ait t composantes connectées. Par définition, on a alors la décomposition correspondante $\Delta = \Delta_1 \cup ... \cup \Delta_t$ avec les Δ_i orthogonaux les uns avec les autres.
On note E_i l'espace engendré par Δ_i, et puisque Δ engendre E on a clairement $E = E_1 \oplus ... \oplus E_t$.
On note ensuite Φ_i l'ensemble des $\mathbb{Z}$-combinaisons linéaires des éléments des Δ_i qui sont racines de Φ. On peut dire de manière équivalente que Φ_i est l'ensemble de racines de Φ qui appartiennent à E_i. Cet ensemble forme clairement un système de racines sur E_i.
De plus, si une racine simple $\alpha \in \Delta$ est dans Δ_i, alors σ_α appartient au sous-groupe de Weyl associé à Φ_i, et sinon α est orthogonal à Φ_i et donc σ_α fixe Φ_i. Donc σ_α laisse les E_i invariants pour toute racine simple α de Δ. Mais puisque les racines simples engendrent Φ, σ_α laisse les E_i

invariants pour toute racine $\alpha \in \Phi$.
Soit $\alpha \in \Phi$, si β est un élément quelconque de E_i, alors $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - <\beta, \alpha> \alpha \in E_i$ d'où $<\beta, \alpha> \alpha \in E_i$. Donc soit $\alpha \in E_i$, soit $<\beta, \alpha> = 0$ c'est-à-dire β appartient à l'orthogonal de α. Donc soit $\alpha \in E_i$, soit E_i est inclus dans l'orthogonal de α. Puisque la décomposition de E est une somme directe, ceci implique que toute racine appartient à un des E_i.
Donc quel que soit $\alpha \in \Phi$, on a montré qu'il appartient à un E_i donc à un Φ_i d'après la définition de Φ_i comme l'ensemble de racines de Φ qui appartiennent à E_i. On a donc bien une décomposition disjointe $\Phi = \Phi_1 \cup ... \cup \Phi_t$, et ses espaces sont irréductibles et orthogonaux entre eux.

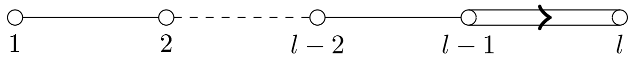
D'après la propriété, il suffit de classer les systèmes de racines irréductibles, ou de manière équivalente les diagrammes de Dynkin connectés.

Théorème : *Si Φ est un système de racines irréductible de rang l, son diagramme de Dynkin est clairement connecté et est l'un des diagrammes à l sommets suivants. La matrice de Cartan associée à Φ est alors celle correspondant à ce diagramme de Dynkin (si l'ordre des racines est celui indiqué).*

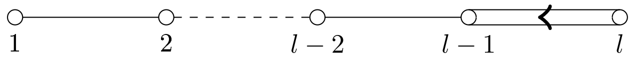
A_l $(l \geq 1)$:



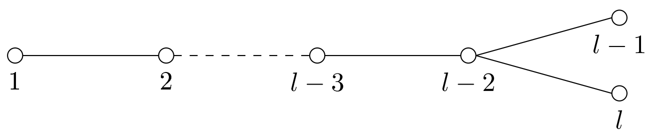
B_l $(l \geq 2)$:



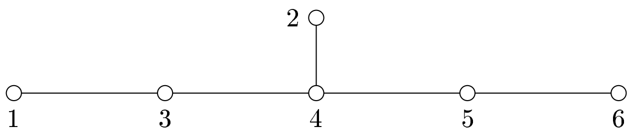
C_l $(l \geq 3)$:



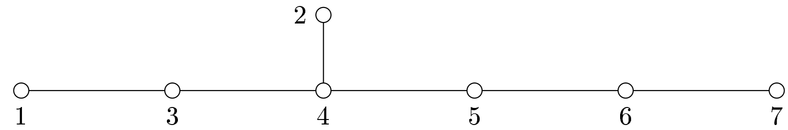
D_l $(l \geq 4)$:



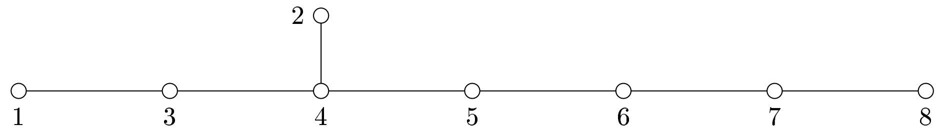
E_6 :



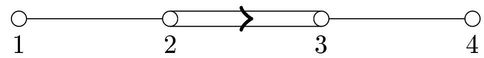
E_7 :



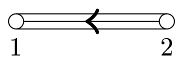
E_8 :



F_4 :



G_2 :



$$A_l : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_l : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C_l : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D_l : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & 2 & -1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & & & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_6 : \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & & & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & & \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & \\ & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_7 : \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & & & & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & & & \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & & \\ & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & \\ & & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ & & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_8 : \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & & & & & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & & & & \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & & & \\ & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & & \\ & & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \\ & & & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ & & & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F_4 : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3.8 Démonstration du théorème de classification

On remarque que tous ces diagrammes de Dynkin sont déductibles directement des graphes de Coxeter associés, sauf B_l et C_l (F_4 et G_2 étant symétriques) qui sont les deux diagrammes possibles associés au même graphe. On va donc chercher tous les graphes de Coxeter possibles, et ensuite les diagrammes de Dynkin en découleront naturellement.
On ne s'intéresse donc pas pour l'instant aux longueurs de racines, et on peut alors supposer que les vecteurs sont unitaires.

Hypothèses : *Soit E un espace euclidien de dimension arbitraire, on choisit $\mathfrak{A} = \{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\}$ un ensemble de n vecteurs unitaires linéairement indépendants vérifiant, pour $i \neq j$: $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \leq 0$ et $4(\varepsilon_i, \varepsilon_j)^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$.*

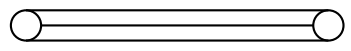
Un tel ensemble de vecteurs est appelé admissible. On associe à cet ensemble de vecteurs le graphe Γ défini de la même manière que le graphe de Coxeter d'une matrice de Cartan. On remarque tout de suite qu'un système de racines irréductible est un ensemble de vecteurs admissible. Donc il nous suffit de classifier les graphes connectés associés aux ensembles de vecteurs admissibles. On va faire ceci en plusieurs étapes :

1) Si on enlève un vecteur ε de $\mathfrak{A}$, les autres forment évidemment toujours un ensemble admissible. De plus le graphe associé est obtenu à partir de Γ en enlevant le sommet correspondant, et les arrêtes qui le joignent.

2) Si i et j sont deux sommets liés, on a $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \neq 0$, donc $4(\varepsilon_i, \varepsilon_j)^2 \geq 1$. Mais par hypothèse $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \leq 0$ donc $2(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \leq -1$. Soit $\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$. Puisque les ε_i sont indépendants on a $\varepsilon \neq 0$. D'où $0 < (\varepsilon, \varepsilon) = n + 2\sum_{i<j}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$. Donc $\sum_{i<j} -2(\varepsilon_i, \varepsilon_j) < n$. Il ne peut y avoir au maximum que $n-1$ paires de sommets pour lesquelles $-2(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \neq 0$ car ces nombres sont tous négatifs. *On ne peut alors avoir que $n-1$ arrêtes au maximum.*

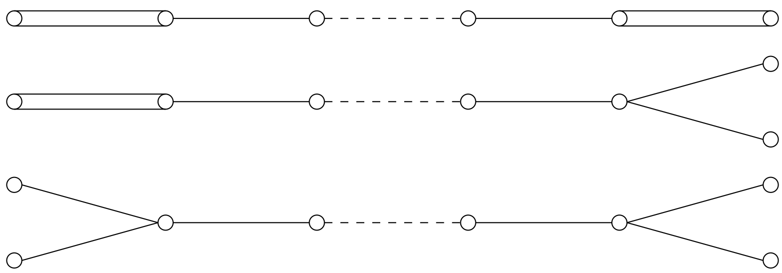
3) Supposons que Γ contienne un cycle. Ce cycle serait alors le graphe d'un sous-ensemble admissible de $\mathfrak{A}$ et qui aurait m arrêtes si m est le cardinal de ce sous-ensemble. Ceci est impossible d'après 2). *Donc Γ ne contient aucun cycle.*

4) Soient $\varepsilon \in \mathfrak{A}$ et $\eta_1, ..., \eta_k \in \mathfrak{A}$ les vecteurs qui lui sont liés (peut importe si l'arrête est simple, double ou triple). Ils sont donc tous distincts, on a $(\varepsilon, \eta_i) < 0$, et si deux η sont reliés cela forme un cycle, ce qui est impossible. On a donc $(\eta_i, \eta_j) = 0$ pour $i \neq j$. Puisque ces vecteurs sont indépendants, il existe $\eta_0 \in Vect(\varepsilon, \eta_1, ..., \eta_k)$ unitaire et orthogonal aux η_i ; et dans ce cas on a $(\varepsilon, \eta_0) \neq 0$.
On peut alors écrire $\varepsilon = \sum_{i=0}^{k}(\varepsilon, \eta_i)\eta_i$, ce qui donne $1 = (\varepsilon, \varepsilon) = (\sum_{i=0}^{k}(\varepsilon, \eta_i)\eta_i, \sum_{j=0}^{k}(\varepsilon, \eta_j)\eta_j) = \sum_{i=0}^{k}(\varepsilon, \eta_i)(\sum_{j=0}^{k}(\varepsilon, \eta_j)(\eta_i, \eta_j)) = \sum_{i=0}^{k}(\varepsilon, \eta_i)^2$ car $(\eta_i, \eta_j) = \delta_{ij}$.
Puisque $(\varepsilon, \eta_0) \neq 0$, on obtient $\sum_{i=1}^{k}(\varepsilon, \eta_i)^2 < 1$ et finalement $\sum_{i=1}^{k} 4(\varepsilon, \eta_i)^2 < 4$. Mais $4(\varepsilon, \eta_i)^2$ étant le nombre d'arêtes reliant les sommets ε et η_i, *il y a au maximum 3 arrêtes qui rejoignent un même sommet.*

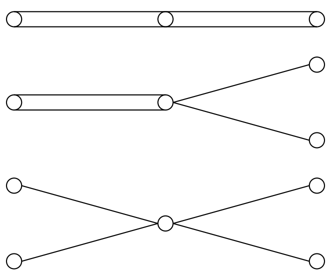
5) D'après 4), le seul graphe d'un ensemble admissible possible qui contienne une arrête triple est le suivant : 

6) Soit $(\varepsilon_1, .., \varepsilon_k) \subset \mathfrak{A}$ un sous-ensemble dont le sous-graphe correspondant est une chaine simple (c'est-à-dire k sommets reliés au suivant par une arrête simple). On pose alors $\mathfrak{A}' = (\mathfrak{A} \setminus \{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k\}) \cup \{\varepsilon\}$ avec $\varepsilon = \sum\limits_{i=1}^{k} \varepsilon_i$.
On va montrer que $\mathfrak{A}'$ est aussi un ensemble admissible :
Il est évident que les vecteurs de $\mathfrak{A}'$ sont linéairement indépendants. De plus, pour $1 \leq i \leq k-1$ on a par hypothèse, $2(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}) = -1$ et $2(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$, si $j \neq i+1$ et $k \geq j > i$.
On en déduit $(\varepsilon, \varepsilon) = k + 2 \sum\limits_{i<j\leq k} (\varepsilon_i, \varepsilon_j) = k - (k-1) = 1$. Donc ε est un vecteur unitaire.
Par ailleurs, si $\eta \in \mathfrak{A} \setminus \{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k\}$, η est lié à au plus un seul des ε_i. En effet s'il était lié à deux ε_i cela formerait un cycle avec la chaine reliant ces deux sommets, ce qui est impossible. Finalement, soit $(\eta, \varepsilon) = 0$, soit $(\eta, \varepsilon) = (\eta, \varepsilon_i)$ pour un i. Dans les deux cas $(\eta, \varepsilon) \leq 0$ et $4(\eta, \varepsilon)^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$. Donc $\mathfrak{A}'$ est bien un ensemble admissible.
Au final, si on a dans un graphe, un sous-graphe correspondant à une chaine simple on peut le remplacer par un unique sommet et le graphe obtenu est toujours un graphe correspondant à un ensemble de vecteurs admissible.

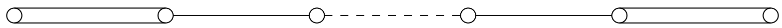
7) Le graphe Γ ne peut contenir aucun sous-graphe de la forme :



En effet, si l'un de ces sous-graphes apparaissait dans Γ il correspondrait au graphe d'un ensemble admissible d'après 1). Mais d'après 6) on peut remplacer la chaine simple par un unique sommet, et on aurait encore un graphe correspondant à un ensemble admissible. On obtiendrait respectivement les graphes suivants, qui sont tous interdits d'après 4) :



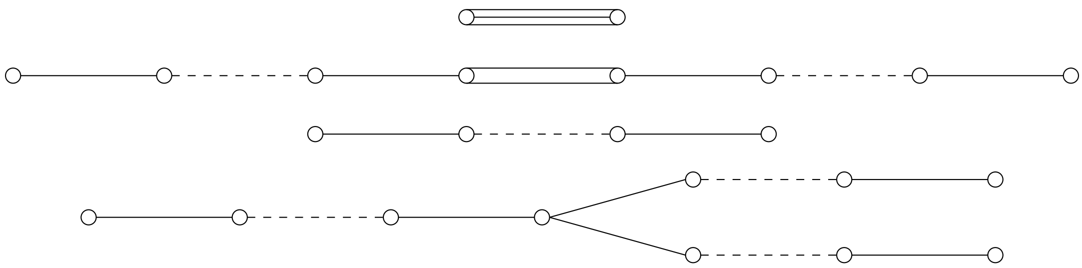
8) On a vu dans 5) qu'il existe un seul graphe qui contient une arrête triple. Par ailleurs, si un graphe contenait plus d'une seule arrête double, il contiendrait un sous-graphe de la forme :



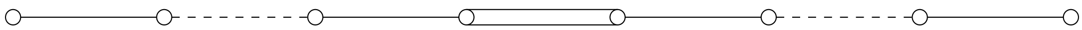
Ceci est impossible d'après 7). Il ne peut donc y avoir qu'une seule arrête double. Si tel est le cas, il ne peut pas y avoir de branche (3 sommets reliés à un même sommet) sinon on aurait un sous-graphe interdit par 7). En résumé, *si un graphe contient une arrête double, il n'en contient pas d'autre, et ne contient ni cycle, ni branches.*

Finalement, si un graphe ne contient que des arrêtes simples, il ne peut pas contenir plus d'une seule branche (toujours d'après 7). Puisqu'il ne contient pas de cycles, il a soit une seule branche, soit aucune et c'est alors une chaine simple.

Pour résumer, tout graphe connecté d'un ensemble admissible est d'une des formes :



9) On s'intéresse aux graphes connectés de la deuxième forme, c'est à dire ceux contenant une arrête double :



On nomme les sommets à gauche de la double arrête $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_p$ (de gauche à droite) et ceux à droite de la double arrête $\eta_1, ..., \eta_q$ (de droite à gauche). Par définition on a $p \geq 1$ et $q \geq 1$.
On pose $\varepsilon = \sum_{i=1}^{p} i\varepsilon_i$ et $\eta = \sum_{i=1}^{q} i\eta_i$. Par hypothèse, $2(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}) = 2(\eta_i, \eta_{i+1}) = 1$, et les autres paires de vecteurs sont orthogonales, ce qui implique : $(\varepsilon, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{p} i^2(\varepsilon_i, \varepsilon_i) + 2\sum_{i<j} ij(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sum_{i=1}^{p} i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i(i+1) = p(p+1)/2$ et de même $(\eta, \eta) = q(q+1)/2$.
On a aussi $(\varepsilon, \eta)^2 = p^2q^2(\varepsilon_p, \eta_q)^2 = p^2q^2/2$ car $4(\varepsilon_p, \eta_q)^2 = 2$. Puisque ε et η sont indépendants, l'inégalité de Schwartz nous donne $(\varepsilon, \eta)^2 < (\varepsilon, \varepsilon)(\eta, \eta)$.
On obtient donc

$$p^2q^2/2 < p(p+1)q(q+1)/4$$

$$pq < (p+1)(q+1)/2$$

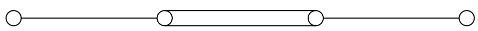
$$pq + p + q + 1 > 2pq$$

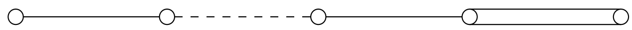
$$-pq + p + q - 1 > -2$$

Finalement on obtient

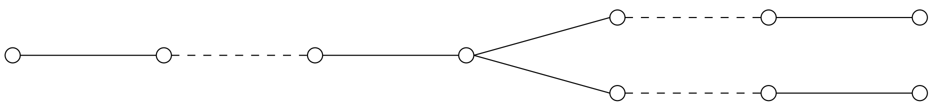
$$(p-1)(q-1) < 2$$

Si $p = 1$ l'inéquation est toujours vraie quel que soit q et inversement. On suppose $q \neq 1$. Si $p = 2$, cela implique $q-1 < 2$ donc $q = 2$. Et si $p \geq 3$, $p-1 \geq 2$ donc $(p-1)(q-1) \geq 2(q-1) \geq 2$ si $q > 1$ ce qui est absurde.
Les seules solutions sont donc $p = q = 2$, $p = 1$, q quelconque et p quelconque, $q = 1$.
On en conclut que les seuls graphes connectés comportant une arrête double sont les graphes de Coxeter associés à F_4 et B_l (où C_l) :

F_4 : 

B_l : 

10) Il ne reste plus qu'à traiter les graphes ne contenant que des arrêtes simples. On s'intéresse alors aux graphes connectés de la dernière forme, c'est-à-dire ceux contenant une branche :



On nomme ψ le sommet d'où partent les branches, ceux à gauche de ψ $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{p-1}$ (de gauche à droite), ceux en haut à droite $\zeta_1, ..., \zeta_{r-1}$ (de droite à gauche) et ceux en bas à droite $\eta_1, ..., \eta_{q-1}$ (de droite à gauche). Par définition on a $p \geq 2$, $q \geq 2$ et $r \geq 2$.

On pose $\varepsilon = \sum i\varepsilon_i$, $\eta = \sum i\eta_i$ et $\zeta = \sum i\zeta_i$. Clairement, ε, η et ζ sont linéairement indépendants, orthogonaux, et n'engendrent pas ψ.
De la même manière que dans le 4) (ε, η et ζ sont les 3 sommets liés au sommet ψ qu'on a supposé unitaire) on obtient $\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 < 1$ si θ_i est l'angle entre ψ et respectivement ε, η et ζ. Par ailleurs, le même calcul que dans 9) avec $p-1$ au lieu de p nous donne $(\varepsilon, \varepsilon) = p(p-1)/2$ et l'équivalent pour η et ζ.

On a $(\varepsilon, \psi)^2 = (\varepsilon, \varepsilon)(\psi, \psi)\cos^2\theta_1 = (\varepsilon, \varepsilon)\cos^2\theta_1 = p(p-1)\cos^2\theta_1/2$, mais aussi $(\varepsilon, \psi)^2 = (\sum i(\varepsilon_i, \psi))^2 = (p-1)^2(\varepsilon_{p-1}, \psi)^2 = (p-1)^2/4$.

Donc $\cos^2\theta_1 = \dfrac{p-1}{2p} = \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{1}{p})$. Et on a les résultats équivalents pour θ_2 et θ_3.
En les sommant on obtient l'inégalité :

$$\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r}) < 1$$

ce qui donne

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}) - 1 < 0$$

et finalement

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$$

Quitte à échanger les noms on peut supposer $\dfrac{1}{p} \leq \dfrac{1}{q} \leq \dfrac{1}{r} (\leq \dfrac{1}{2}$ car $p, q, r > 1)$.
Dans ce cas on obtient $3 \cdot \dfrac{1}{2} \geq 3 \cdot \dfrac{1}{r} \geq \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} > 1$, d'où $\dfrac{2}{3} \leq \dfrac{r}{3} < 1$. Ceci donne $2 \leq r < 3$ soit $r = 2$.
Donc $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} > \dfrac{1}{2}$ ce qui donne de la même manière $\dfrac{2}{q} > \dfrac{1}{2}$, soit $q < 4$.
Si $q = 2$, on obtient $1/p > 0$ ce qui est toujours vrai, donc tous les p conviennent.

Si $q = 3$ on obtient $1/p > 1/6$ donc $p < 6$. On rappelle que $p \geq 2$ et si $q = 3$ et $p = 2$ on retombe sur un cas d'au-dessus en inversant p et q.

Finalement les triplets possibles pour (p, q, r) sont $(p, 2, 2,)$, $(3, 3, 2)$, $(4, 3, 2)$ et $(5, 3, 2)$ qui correspondent respectivement aux graphes de Coxeter associés à D_l, E_6, E_7 et E_8.

11) On a donc traité le seul cas avec une arête triple (G_2), tous les cas possibles avec une arrête double (F_4, B_l et C_l), et finalement les cas avec uniquement des arrêtes simples et une branche (D_l, E_6, E_7 et E_8). Il ne reste donc comme possibilité que la chaine simple qui correspond au graphe A_l.
On a alors trouvé tous les cas possibles de graphes connectés associés à des ensembles de vecteurs admissibles. Or on a vu qu'un système de racines irréductible est un ensemble de vecteurs admissible, et son graphe de Coxeter est clairement connecté, donc tout graphe de Coxeter d'un système de racines irréductible est d'un de ces types. Il en découle naturellement que les diagrammes de Dynkin associés sont biens ceux du théorème.

4 Classification des algèbres de Lie simples

4.1 Liens entre Algèbres de Lie simples et systèmes de racines d'un espace euclidien

Soit L une algèbre de Lie simple, avec H une sous-algèbre torale maximale et ϕ le système de racines associé au couple (L,H) comme dans la partie 3. On a montré que l'on peut créer un espace euclidien E engendré par ϕ et qui étend H^*, muni de la forme bilinéaire symétrique duale de la forme de Killing. On a ensuite montré que ϕ vérifie bien les axiomes d'un système de racines de cet espace euclidien.
On rappelle que à $\gamma \in H^*$ on associe l'unique élément $t_\gamma \in H$ qui vérifie $\forall h \in H$, $\gamma(h) = K(t_\gamma, h)$ et que l'on a défini $h_\alpha = 2t_\alpha/(\alpha, \alpha) \in [L_\alpha, L_{-\alpha}] \subset H$ (partie 2.8).

Proposition : *Si L est une algèbre de Lie simple, alors ϕ est un système de racines d'espace euclidien irréductible.*

Démonstration : Supposons par l'absurde, que $\phi = \phi_1 \cup \phi_2$ avec les ϕ_i orthogonaux, non nuls. Si $\alpha \in \phi_1$ et $\beta \in \phi_2$ alors $(\alpha + \beta, \alpha) \neq 0$ et $(\alpha + \beta, \beta) \neq 0$ donc $\alpha + \beta$ n'appartient ni à ϕ_1, ni à ϕ_2, donc n'est pas une racine, d'où $L_{\alpha+\beta} = 0$. Or on a $[L_\alpha, L_\beta] \subset L_{\alpha+\beta} = 0$, cette inclusion découle directement de l'identité de Jacobi.
Soit M la sous-algèbre de L engendrée par les L_α, $\alpha \in \phi_1$. Alors M est centralisée par les L_β, $\beta \in \phi_2$. Mais puisque $Z(L) = 0$, $M \neq L$ car sinon $L_\beta \subset Z(L)$ mais $L_\beta \neq 0$. De plus, si $\alpha \in \phi_1$ on a $[M, L_\alpha] \subset M$ donc les L_α normalisent M. Et puisque $[M, L_\beta] = 0$ pour $\beta \in \phi_2$ et que L est générée par les L_α avec $\alpha \in \phi$, on a $[M, L] \subset M$ (par l'identité de Jacobi). Donc M est un idéal strict de L, non nul car ϕ_1 est non nul. Ceci est impossible car L est simple.

Proposition : *Soit L une algèbre de Lie simple. On fixe un système de racines simples Δ de ϕ. Alors L est générée par les espaces de racines L_α et $L_{-\alpha}$ avec $\alpha \in \Delta$. Où de manière équivalente L est générée par $x_\alpha \in L_\alpha$ et $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ des vecteurs non nuls, pour $\alpha \in \Delta$.*

Démonstration : Par définition L est générée par H et les L_α et $L_{-\alpha}$ avec $\alpha \in \phi$. Cependant $H = \sum_{\alpha \in \phi} [L_\alpha, L_{-\alpha}]$ (partie b) de la démonstration du théorème de la partie 2.8) . Donc L est engendrée par les L_α et les $L_{-\alpha}$ avec $\alpha \in \phi$.
Mais les racines simples engendrent toutes les racines, et on a déjà vu que $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$ si α, β et $\alpha + \beta \in \phi$. Donc les L_α et $L_{-\alpha}$ avec α racine simple engendrent tous les L_α et $L_{-\alpha}$ et donc L tout entier.

4.2 Algèbres de Lie simples isomorphes

Soient deux couples (L, H) et (L', H'). On leur associe respectivement le système de racines ϕ et ϕ'. On va maintenant montrer qu'un isomorphisme entre ϕ et ϕ' induit un unique isomorphisme entre H et H' qui se prolonge de manière unique en un isomorphisme entre L et L'.

Puisque ϕ engendre E, un isomorphisme de ϕ dans ϕ' induit un unique isomorphisme d'espaces vectoriels de E dans E'. Si on multiplie le produit scalaire de E par un réel positif, on obtient toujours un produit scalaire et les axiomes d'un système de racines sont toujours respectées par ϕ. On peut donc supposer que cet isomorphisme est une isométrie de E dans E'.

Mais puisque E est une extension de H^*, l'isomorphisme de ϕ dans ϕ' s'étend de manière unique en un isomorphisme d'espaces vectoriels de H^* dans H'^*. On a vu partie 2.8 qu'on peut identifier H^* avec H via la forme de Killing de L. Donc l'isomorphisme de ϕ à ϕ' donne un unique isomorphisme d'espaces vectoriels $\pi : H \to H'$.
De plus, H et H' étant abéliennes, l'isomorphisme d'espaces vectoriels peut se voir comme isomorphisme d'algèbres de Lie. En effet, on aura $\forall x, y \in H$, $\pi([x, y]) = \pi(0) = 0 = [\pi(x), \pi(y)]$.

Concrètement, si le premier isomorphisme envoie $\alpha \in \phi$ sur $\alpha' \in \phi'$, et si $t_\alpha \in H$ et $t'_\alpha \in H'$ sont leurs correspondants via la forme de Killing, alors forcément $\pi(t_\alpha) = t'_\alpha$.
Puisque l'isomorphisme de ϕ dans ϕ' est une isométrie de E dans E' on a $\pi(h_\alpha) = \pi(2t_\alpha/(\alpha, \alpha)) = 2\pi(t_\alpha)/(\alpha, \alpha) = 2t'_\alpha/(\alpha', \alpha') = h'_\alpha$. Donc on a au final $\pi(h_\alpha) = h'_\alpha$.

On cherche alors à étendre cet isomorphisme de sous-algèbres de Lie, à un isomorphisme de L dans L', noté ψ. Si tel est le cas, alors ψ doit envoyer L_α dans $L'_{\alpha'}$ pour tout $\alpha \in \phi$ car ils engendrent L.
On remarque alors que si pour tout $\gamma \in \phi$, $x_\gamma \in L_\gamma$ est envoyé sur $x'_{\gamma'} \in L'_{\gamma'}$ ($\gamma' \in \phi'$) et que l'on choisit $x_\alpha \in L_\alpha$, $x_\beta \in L_\beta$ et $x_{\alpha+\beta} \in L_{\alpha+\beta}$ tels que $[x_\alpha, x_\beta] = x_{\alpha+\beta}$, alors on aura forcément $x'_{\alpha'+\beta'} = [x'_{\alpha'}, x'_{\beta'}]$. Ceci montre que l'image des éléments d'espaces de racines simples forcent l'image des éléments des espaces d'autres racines. On va donc se concentrer sur l'étude des espaces liés aux racines simples.

Théorème : *Soient deux couples (L, H) et (L', H'), avec les systèmes de racines ϕ et ϕ' correspondants. Supposons que l'on ait un isomorphisme de ϕ dans ϕ' qui envoie α sur α', et qui implique l'isomorphisme d'algèbres de Lie $\pi : H \to H'$.*
Soit Δ un système de racines simples de ϕ alors $\Delta' = \{\alpha' | \alpha \in \phi\}$ est clairement un système de racines simples de ϕ'. On choisit ensuite pour tout $\alpha \in \Delta$ et $\alpha' \in \Delta'$ un $x_\alpha \in L_\alpha$ et un $x'_{\alpha'} \in L'_{\alpha'}$ (ce qui est équivalent à choisir un isomorphisme $\pi_\alpha : L_\alpha \to L'_{\alpha'}$).
Alors il existe un unique isomorphisme $\psi : L \to L'$ qui étend $\pi : H \to H'$ et tous les π_α, $\alpha \in \Delta$. Donc les couples (L, H) et (L', H') sont isomorphes.

Démonstration : L'unicité découle de la proposition précédente. En effet, si $\alpha \in \Delta$, x_α détermine un unique $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ tel que $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$ car $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$ est de dimension 1 engendré par t_α (démonstration du théorème de la partie 2.8). Et puisque L est générée par les x_α et y_α avec $\alpha \in \Delta$ alors un tel isomorphisme est unique s'il existe.

L'idée pour montrer l'existence est de dire que si L et L' se ressemblent alors $L \oplus L'$ devrait contenir une sous-algèbre ressemblant à la sous-algèbre diagonale de $L \oplus L : \{(x, x) | x \in L\}$, qui est trivialement isomorphe à L. Mais on peut faire de même avec L' et on obtient bien que L est isomorphe à L'.

Soient x_α, y_α et h_α comme ci-dessus. *On note D la sous-algèbre de $L \oplus L'$ engendrée par les $\tilde{x_\alpha} = (x_\alpha, x'_{\alpha'})$, $\tilde{y_\alpha} = (y_\alpha, y'_{\alpha'})$ et $\tilde{h_\alpha} = (h_\alpha, h'_{\alpha'})$ avec $\alpha \in \Delta$ et $\alpha' \in \Delta'$ (avec $x'_{\alpha'} \in L_{\alpha'}$ l'image de x_α par π_α).*

On va alors montrer que D est bien une sous-algèbre stricte de $L \oplus L$ et ensuite que D vérifie les conditions ci-dessus. (Ce n'est pas évident car elle pourrait contenir des éléments tels que $(x_\alpha, x'_{\alpha'})$ et $(x_\alpha, 2x'_{\alpha'})$ ce qui impliquerait qu'elle contiendrait tout L' et donc L et tout l'espace).

On va montrer cela en plusieurs étapes :

1) Puisque L et L' sont simples, ϕ et ϕ' sont irréductibles (première proposition du 4.1). Alors, la propriété du 3.5 montre qu'il existe une unique racine "maximale" β et β' dans ϕ et ϕ'. L'isomorphisme de ϕ dans ϕ' envoie donc nécessairement β sur β'. On choisit alors $x \in L_\beta$ et $x' \in L'_{\beta'}$.

Soit $\tilde{x} = (x, x') \in L \oplus L'$, on définit M comme le sous-espace de $L \oplus L'$ engendré par les $\mathrm{ad}\tilde{y_{\alpha_1}} ... \mathrm{ad}\tilde{y_{\alpha_m}}(\tilde{x})$, où $\alpha_i \in \Delta$ (avec de possibles répétitions).

On a déduit de l'identité de Jacobi $[L_{-\alpha_i}, L_\beta] \subset L_{\beta - \alpha_i}$. Alors l'isomorphisme implique que $[L'_{-\alpha'_i}, L'_{\beta'}] \subset L'_{\beta' - \alpha'_i}$. Les éléments de base de M appartiennent alors à $L_{\beta - \sum \alpha_i} \oplus L'_{\beta' - \sum \alpha'_i}$. En particulier, $M \cap (L_\beta \oplus L'_{\beta'})$ est de dimension 1, car juste engendré par $\tilde{x}$. En effet, une somme de racines simples ne peut pas s'annuler car elles forment une base de E l'espace euclidien obtenu par extension de H^*, et donc les seuls éléments de M compris dans $L_\beta \oplus L'_{\beta'}$ sont les multiples de $\tilde{x}$. Puisque $\dim L_\beta \oplus L'_{\beta'} \geq 2$, M est strictement inclus dans $L \oplus L'$ car sinon M serait de dimension supérieure à 2 ce qui est impossible.

2) *D stabilise M* :
Pour le montrer, il suffit de vérifier que les générateurs de D stabilisent M. Par définition de M, $\tilde{y_\alpha}$ stabilise M. De plus, comme $[h_\alpha, y_\alpha]$ est un multiple de y_α, l'isomorphisme implique que $[h'_{\alpha'}, y'_{\alpha'}]$ est un multiple de $y'_{\alpha'}$ et on montre facilement par récurrence que $\tilde{h_\alpha}$ stabilise M aussi.

Il ne reste plus qu'à montrer que c'est aussi le cas pour $\tilde{x_\alpha}$. Si $\gamma \in \Delta$, $\gamma \neq \alpha$ alors $\alpha - \gamma$ n'est pas une racine d'après le lemme du 3.3. Puisque $\tilde{y_\gamma} \in L_{-\gamma}$, on a $[\tilde{x_\alpha}, \tilde{y_\gamma}] \in L_{\alpha-\gamma}$. Donc $[\tilde{x_\alpha}, \tilde{y_\gamma}] = 0$. Et d'après l'identité de Jacobi $\mathrm{ad}x_\alpha$ commute avec les $\mathrm{ad}y_\gamma$.
En appliquant $\mathrm{ad}\tilde{x_\alpha}$ à un élément de base de M, on peut l'échanger avec tous les $\mathrm{ad}\tilde{y_\gamma}$, sauf $\mathrm{ad}\tilde{y_\alpha}$. Mais dans ce cas on obtient un $\mathrm{ad}\tilde{h_\alpha}$ que l'on a déjà traité. Comme $\alpha + \beta$ n'est pas une racine par maximalité de β, on a $\mathrm{ad}\tilde{x_\alpha}(\tilde{x}) = [\tilde{x_\alpha}, \tilde{x}] = 0$. Donc $\mathrm{ad}\tilde{x_\alpha}$ appliqué à un élément de M donne toujours 0, d'où $\tilde{x_\alpha}$ stabilise aussi M.

3) On en déduit que D est bien strictement incluse dans $L \oplus L'$:
Supposons que $D = L \oplus L'$, alors $[L \oplus L', M] \subset M$, donc M est un idéal de L. Or on a vu que M est non nul et strictement inclus dans $L \oplus L'$. Mais L et L' étant des algèbres de Lie simples, ce sont les seuls idéaux de ce type de $L \oplus L'$. Puisque M est clairement différent des deux (les éléments de L sont de la forme $(n, 0)$ avec $n \in L$, ceux de L' de la forme $(0, k)$ avec $k \in L'$ mais aucun élément de M n'est de cette forme) on a une contradiction.

4) *Les projections de D sur sa première et sur sa deuxième coordonnées sont isomorphes :*
Ces projections sont des homomorphisme d'algèbres de Lie, surjectifs à cause de la définition de D et du fait que L est engendré par les espaces de racines associés à Δ.

Supposons que $D \cap L \neq 0$ c'est-à-dire que la projection selon le second facteur n'est pas injective. Alors D contient un élément $(w, 0)$ avec $w \neq 0$ et donc aussi les éléments du type $\mathrm{ad}(z_{\alpha 1} ... \mathrm{ad}z_{\alpha s}(w), 0)$, avec $\alpha_i \in \Delta$ et $z_\alpha = x_\alpha$ ou y_α.
D'après la propriété précédente, les espaces de racines associés à Δ engendrent L, donc $L \subset D$. On peut faire la même chose pour L' et on obtient alors $L \oplus L' \subset D \subset L \oplus L'$ ce qui est impossible d'après la partie précédente.
Les projections sont alors injectives et donc bijectives. On peut donc bien construire un isomorphisme entre la projection de D sur sa première coordonnée, et celle sur sa deuxième.

5) Finalement, si $\alpha \in \Delta$ on remarque que cet isomorphisme envoie x_α sur $x'_{\alpha'}$ et h_α sur $h'_{\alpha'}$ car ce sont les projections sur la première, respectivement deuxième, coordonnées d'un même élément de D. Donc il coïncide avec l'isomorphisme $\pi : H \to H'$. On a bien l'existence d'un isomorphisme de L dans L' qui étend $\pi : H \to H'$.

Théorème : *(admis) Soit L une algèbre de Lie quelconque,toutes les sous-algèbres torales maximales de L sont isomorphes entre elles.*

Ce théorème implique que l'isomorphisme précédent ne dépend pas du choix de H.

Pour vérifier si deux algèbres de Lie simples sont isomorphes, on fixe dans chacune d'elles une sous-algèbre torale maximale. Si les systèmes de racines associés sont isomorphes alors les deux algèbres de Lie sont isomorphes, peut importe le choix de la sous-algèbre torale maximale. D'après le théorème précédent la réciproque est évidente. Donc deux algèbres de Lie simples sont isomorphes si et seulement si leur système de racine associé est isomorphe. Notre classification des systèmes de racines nous donne alors directement la classification des algèbres de Lie simples.

5 Algèbres de Lie semisimples

5.1 Radical et Algèbres de Lie semisimples

Théorème : *Si L est une algèbre de Lie, il existe un unique idéal résoluble maximal de L.*

Démonstration : On montre d'abord l'unicité. Soit S un idéal résoluble maximal de L, c'est-à-dire pas strictement inclus dans un idéal résoluble plus grand (et différent de L). Si I est un autre idéal résoluble de L, alors d'après le lemme du 2.3, $S+I$ est un idéal résoluble. Puisque S est maximal on a $S+I=S$ donc $I \subset S$. En particulier si I est un autre idéal résoluble maximal, il est inclus dans S donc on a forcément $I=S$. L'idéal résoluble maximal S est unique.
L'existence se montre par récurrence. En effet, 0 est un idéal résoluble. S'il n'y en a pas d'autres, il est maximal. Sinon il est inclus dans un autre idéal résoluble I, et on applique ensuite le raisonnement à I et ainsi de suite. On a alors une suite croissante d'idéaux inclus strictement les uns dans les autres, et tous strictement inclus dans L. Cette chaine est finie car L est de dimension finie, et possède donc un élément maximal.

Définition : *(Radical de L) Soit L est une algèbre de Lie, cet unique idéal résoluble maximal est appelé Radical de L et noté* $\mathrm{Rad}L$.

Définition : *(Algèbre de Lie semisimple) Si L est une algèbre de Lie, on dit qu'elle est semi-simple si* $\mathrm{Rad}L = 0$. *C'est-à-dire si elle ne contient pas d'idéal résoluble autre que 0.*

Propriétés : Si L est simple alors L est semisimple. Par ailleurs, pour toute algèbre de Lie L, $L/\mathrm{Rad}L$ est une sous-algèbre de Lie de L semisimple .

5.2 Décomposition d'une Algèbre de Lie semisimple en somme directe de simples

Théorème : *Soit L une algèbre de Lie semisimple, alors il existe des idéaux simples $L_1, ..., L_t$ de L tels que $L = L_1 \oplus ... \oplus L_t$. De plus, tout idéal simple (donc non nul) de L coïncide avec un des L_i.*

Démonstration : Soit I un idéal de L, on pose $I^\perp = \{x \in L | \forall y \in I, K(x,y) = 0\}$. Comme la forme de Killing est invariante, c'est aussi un idéal de L. Le corollaire du critère de Cartan (partie 2.3) appliqué a I implique que $I \cap I^\perp$ est résoluble donc nul. Le théorème du rang appliqué aux à la projection orthogonale sur les espaces vectoriels sous-jacents implique que $\dim I + \dim I^\perp = \dim L$. On a finalement $L = I \oplus I^\perp$.
On procède ensuite par récurrence. Si L est n'a pas d'idéal autre que 0, elle est simple et on a fini. Sinon on prend L_1 un idéal minimal de L (qui n'en contient aucun autre). Il est donc simple, et d'après le paragraphe précédent on a $L = L_1^\perp \oplus L_1$.
Puisque $L_1^\perp$ est un idéal de L, tout idéal de $L_1^\perp$ est un idéal de L. Donc $L_1^\perp$ est semisimple. On peut ensuite recommencer cette décomposition avec $L_1^\perp$ dont les idéaux sont aussi des idéaux de L, et ainsi de suite. Puisque L est de dimension finie, cette récurrence s'arrête et on obtient la décomposition du théorème.
Il reste à montrer la dernière affirmation. Soit I un idéal simple (non nul) de L. Alors $[I, L]$ est un idéal de I. Puisque $Z(L)$ est abélien, il est résoluble, donc nul. Si on avait $[I, L] = 0$ alors on aurait $I \subset Z(L) = 0$, ce qui est impossible. Donc on a $[I, L] = I$ car I est simple.
Mais on a clairement $[I, L] = [I, L_1] \oplus ... \oplus [I, L_t]$. Puisque $[I, L] = I$ est simple, un seul des

termes est non nul et on a $[I, L] = [I, L_i] = I$ pour un i. Donc $I \subset L_i$ qui est simple, d'où $I = L_i$ pour un i.

Propriété : *Soient un couple (L, H) et ϕ le système de racines associé. Si $L = L_1 \oplus ... \oplus L_t$ est la décomposition de L en idéaux simples, alors $H_i = H \cap L_i$ est une sous-algèbre torale maximale de L_i pour chaque i. De plus, les systèmes de racines correspondants ϕ_i dans E_i redonnent la décomposition de $\phi = \phi_1 \cup ... \cup \phi_t$ en systèmes de racines irréductibles.*

Démonstration : Si H est une sous-algèbre torale maximale de L, alors $H = H_1 \oplus ... \oplus H_t$, avec $H_i = H \cap L_i$, est sa décomposition en idéaux simples car les parties semisimple et nilpotente d'un élément de L correspondent respectivement à la somme des parties semisimples et nilpotentes des éléments de chaque composante (on utilise la représentation adjointe qui est une bijection de L dans $ad\ L \subset \mathfrak{gl}(L)$ pour se ramener à un résultat d'algèbre linéaire). Chaque H_i est trivialement une sous-algèbre torale de L_i, mais elle est de plus maximale. En effet, s'il en existait une plus grande, elle centraliserait les autres H_j et en faisant la somme directe avec ces dernières, elles engendreraient une sous-algèbre torale de L plus grande que H, ce qui est impossible. On a bien montré que H_i *est une sous-algèbre torale maximale de* L_i.
Si $\alpha \in \phi_i$, alors $\alpha \in H_i^*$, mais on peut le voir comme application linéaire sur H en imposant $\alpha(H_j) = 0$ pour $i \neq j$. Alors, α est une racine de L par rapport à H et on a clairement $L_\alpha \subset L_i$. Inversement, si $[H_i, L_\alpha] = 0$ pour tous les i alors H envoi L_α sur 0 mais $\alpha \neq 0$ (car $0 \notin \phi$) donc c'est impossible par définition. Puisque les L_i sont orthogonaux, si $\alpha \in \phi$ alors $[H_i, L_\alpha] \neq 0$ pour un et un seul i. Donc par définition de H_i, $[L_\alpha, L_i] \neq 0$ pour un seul i, et alors $L_\alpha \subset L_i$ (car L_α est de dimension 1) et $\alpha_{|H_i}$ est une racine de L_i par rapport à H_i.
On a donc une décomposition de ϕ en systèmes de racines ϕ_i qui correspondent bien aux systèmes de racines des différents L_i. Comme les L_i sont simples, d'après la première proposition du 4.1, les ϕ_i sont irréductibles. On a bien la décomposition de ϕ en systèmes de racines irréductibles, qui est unique.

5.3 Algèbres de Lie semisimples isomorphes

Les propriétés précédentes montrent que classifier les algèbres de Lie semisimples par leurs systèmes de racines revient à classifier les algèbres de Lie simples par leurs systèmes de racines irréductibles :

Théorème : *Soient deux couples (L, H) et (L', H') constitués d'une algèbre de Lie semisimple et d'une sous algèbre torale maximale. Si $L = L_1 \oplus ... \oplus L_t$ et $L' = L'_1 \oplus ... \oplus L'_t$ sont leur décomposition en idéaux simples, on note $\phi = \phi_1 \cup ... \cup \phi_t$ et $\phi' = \phi'_1 \cup ... \cup \phi'_t$ leurs systèmes de racines associés comme dans la propriété précédente.*
S'il existe un isomorphisme de ϕ dans ϕ' (donc des isomorphismes de ϕ_i vers ϕ'_i à renumérotation près) induisant un isomorphisme π de H dans H', on fixe un système de racines simples Δ de ϕ et Δ' de ϕ'. On fixe aussi un isomorphisme π_α de L_α dans $L'_{\alpha'}$ pour tous les $\alpha \in \Delta$ avec α' l'image de α par l'isomorphisme des systèmes de racines.
Alors il existe un unique isomorphisme de L vers L' qui étend π et les π_α. Donc les couples (L, H) et (L', H') sont isomorphes.
En résumé, si ϕ et ϕ' sont isomorphes alors les couples (L, H) et (L', H') sont isomorphes. Mais d'après le dernier théorème de la partie 4.2, L et L' sont alors isomorphes indépendamment du choix de H et H'.

Démonstration : Pour tous les i, on a un isomorphisme de ϕ_i vers ϕ'_i. Soient α une racine simple de Δ_i, c'est-à-dire l'ensemble des racines simples de ϕ contenues dans ϕ_i, qui forme évidemment un système de racines simples de ϕ_i. Les isomorphismes π_α donnent alors des isomorphismes $\rho_{i,\alpha}$ de L_α dans $L'_{\alpha'}$ car $L_\alpha \subset L_i$ pour un seul i.
La propriété précédente permet alors de déduire de π un unique isomorphisme π_i de H_i vers H'_i pour tous les i. On peut appliquer le théorème qui classifie les algèbres de Lie simples. On obtient alors pour chaque i un unique isomorphisme de L_i vers L'_i qui étend π_i et les $\rho_{i,\alpha}$. En faisant la somme directe des L_i on obtient bien un isomorphisme de L vers L' qui étend π et les π_α, avec les propriétés voulues. D'après le dernier théorème de la partie 4.2, les algèbres de Lie L et L' sont alors isomorphes indépendamment du choix de H et de H'.

6 Conclusion

Pour vérifier si deux algèbres de Lie semisimples sont isomorphes, il faut fixer une sous-algèbre torale maximale quelconque dans chacune d'elles et en déduire un système de racines. Ensuite, il faut décomposer les algèbres de Lie semisimples en idéaux simples.
Pour être isomorphes, il faut qu'elles aient le même nombre d'idéaux simples, et que ceux-ci aient les mêmes dimensions et soient isomorphes deux à deux.
On a vu que les systèmes de racines et les sous-algèbres torales se décomposent de manière adéquate pour former un système de racines et une sous-algèbre torale maximale dans chacun des idéaux simples. Pour chaque couple constitué d'un idéal simple et de la sous-algèbre torale maximale associée, on choisit un système de racines simples. Il permet de trouver le diagramme de Dynkin associé à cet idéal, qui est indépendant du choix du système de racines simples.
Deux couples sont alors isomorphes si leur système de racines est isomorphe, c'est-à-dire s'ils ont le même diagramme de Dynkin (présent dans la liste du théorème de classification). Les sous-algèbres torales maximales d'une algèbre de Lie étant isomorphes entre-elles, si deux couples sont isomorphes les deux idéaux simples sont alors isomorphes indépendamment du choix des sous-algèbres torale maximales.

Au final, deux algèbres de Lie semisimples sont isomorphes si leur décomposition en idéaux simples est isomorphe, c'est-a-dire si ces idéaux ont le même diagramme de Dynkin associé deux à deux.