Mémoire de Master 2

Mathématiques Fondamentales

Algèbres Commutatives Tordues

Antoine Feltz

Encadré par Mme. Vespa

Soutenu le 02 Septembre 2020

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Table des matières

Introduction

Le but de ce mémoire est de montrer le théorème énoncé page 58 :

Théorème. Pour M un $\mathbb{C}$-module libre de dimension d, on a l'équivalence de catégories

$$\mathrm{Sym}(M^{(1)})\text{-}\mathbf{Mod} \;\; \cong \;\; \mathrm{FI}_d\text{-}\mathbf{Mod} \coloneqq \mathbf{Fonct}\big(\ \mathrm{FI}_d, \mathbb{C}\text{-}\mathbf{Mod}\ \big),$$

où le terme de gauche est la catégorie des modules sur une algèbre commutative tordue $\mathrm{Sym}(M^{(1)})$, et le terme de droite est la catégorie des foncteurs sur la catégorie FI_d.

Avant de s'attaquer à cette équivalence, il faut en comprendre les termes, et en particulier le premier. Dans ce mémoire, on s'intéressera donc aux algèbres commutatives tordues, en faisant un tour des définitions et des propriétés de base de cet objet mathématique. On peut déjà donner sa définition :

Définition. Une algèbre commutative tordue est un monoïde (aussi appelé algèbre) commutatif dans la catégorie monoïdale symétrique

$$\big(\ \mathbf{\Sigma}\text{-}\mathbf{Mod}, \otimes, \mathbb{C}^{(0)}, \tau\ \big),$$

où $\mathbf{\Sigma}$ est la catégorie des ensembles finis et des bijections.

Cette définition nous incite à commencer ce mémoire par l'étude de la théorie des catégories monoïdales. On s'intéressera, en particulier, à un résultat central de cette théorie : le théorème de cohérence de MacLane. On introduira ensuite quelques catégories monoïdales particulières, dont la catégorie $\mathbf{\Sigma}\text{-}\mathbf{Mod}$, puis on montrera qu'elles sont en fait équivalentes. On pourra alors transporter la définition d'une algèbre commutative tordue dans ces autres catégories et on obtiendra, par exemple, les définitions suivantes :

Définition. Une algèbre commutative tordue est un foncteur $A : \mathbf{\Sigma} \to \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$ muni de deux lois $\mu : A \otimes A \to A$ et $\eta : \mathbb{C}^{(0)} \to A$ (des transformations naturelles) telles que μ soit associative, commutative et unitaire, *ie :* telle que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd}
A(S) \otimes A(S') \otimes A(S'') \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \mu_{S',S''}"] \arrow[d, "\mu_{S,S'} \otimes \mathrm{id}"'] & A(S) \otimes A(S' \dot\cup S'') \arrow[r, "\mu_{S,S' \dot\cup S''}"] & A\big(S \dot\cup (S' \dot\cup S'')\big) \arrow[d, "A(\varphi)"] \\
A(S \dot\cup S') \otimes A(S) \arrow[r, "\mu_{S \dot\cup S', S''}"'] & A\big((S \dot\cup S') \dot\cup S''\big) \arrow[r, "A(\psi)"'] & A(S \dot\cup S' \dot\cup S'')
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A(S) \otimes A(S') \arrow[r, "\mu_{S,S'}"] \arrow[d, "\tau_{S,S'}"'] & A(S \dot\cup S') \arrow[d, "A(f)"] \\
A(S') \otimes A(S) \arrow[r, "\mu_{S',S}"'] & A(S' \dot\cup S)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \otimes A(S) \arrow[r, "\eta_{\varnothing} \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\sim"'] & A(\varnothing) \otimes A(S) \arrow[d, "\mu_{\varnothing,S}"] \\
A(S) & A(\varnothing \dot\cup S) \arrow[l, "A(g)"]
\end{tikzcd}.$$

Définition. Une algèbre commutative tordue est une algèbre associative unitaire graduée

$$A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$$

telle que pour tout entier n, A_n soit muni d'une action de S_n. De plus, si $x \in A_n$ et $y \in A_m$, on note $\tau_{n,m}$ la permutation de S_{n+m} qui échange les n premières et les m dernières composantes et on doit avoir l'égalité "tordue" :

$$\tau_{n,m}(x \cdot y) = y \cdot x.$$

Exemple. Si V est un espace vectoriel, on considère

$$A = T^*V := \bigoplus_{n\geq 0} V^{\otimes n}$$

muni de la concaténation des produits tensoriels $V^{\otimes n} \otimes V^{\otimes m} \to V^{\otimes(n+m)}$. Alors T^*V est une algèbre commutative tordue avec cette définition (la concaténation n'est pas commutative mais elle vérifie bien l'axiome "tordu").

Enfin, on s'intéressera à une algèbre commutative tordue en particulier : $\mathrm{Sym}(M^{(1)})$. On détaillera sa construction pas-à-pas, puis on étudiera les modules sur cette algèbre commutative tordue. On pourra alors énoncer et démontrer le théorème cité ci-dessus.

Remarque. Dans tout le document on se placera sur $\mathbb{C}$, mais on peut généraliser sans aucun problème à tout corps de caractéristique nulle. Pour les autres corps (et même pour les anneaux commutatifs) certains résultats restent valables, notamment la première partie et ce qui concerne les catégories $\mathbf{Fonct}\left(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\right)$ et $\mathbf{Rep}(S_*)$ dans les autres parties.

I Théorie des catégories monoïdales

I.1 Catégories monoïdales

Définition. Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont deux catégories alors on peut définir leur catégorie produit $\mathscr{B} \times \mathscr{C}$ dont les objets sont les couples (B, C) où B est un objet de $\mathscr{B}$, et C est un objet de $\mathscr{C}$; et les morphismes sont les couples (f, g) de morphismes (*ie :* f est un morphisme dans $\mathscr{B}$ et g est un morphisme dans $\mathscr{C}$).

Définition. On note **Set** la catégorie dont les objets sont les ensembles et les flèches sont les applications ensemblistes.

Remarque. Une propriété universelle correspond à un isomorphisme naturel entre deux espaces de morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,-)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(-,-)$ dans deux catégories.

Exemple. La propriété universelle qui donne le produit cartésien de deux ensembles $X, Y \in \mathbf{Set}$ correspond à l'isomorphisme naturel en $W \in \mathbf{Set}$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}\big(W\,,\, X \times Y\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^2}\big(\,(W, W)\,,\,(X, Y)\,\big)$$

Cet isomorphisme montre aussi que le foncteur produit cartésien $\times$ et le foncteur diagonal Δ

$$\begin{array}{rccc} \times & : & \mathbf{Set}^2 & \to & \mathbf{Set} \\ & & (X,Y) & \mapsto & X \times Y \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \Delta & : & \mathbf{Set} & \to & \mathbf{Set}^2 \\ & & W & \mapsto & (W,W) \end{array}.$$

sont adjoints. Par ailleurs, l'objet $\{1\} \in \mathbf{Set}$ joue le rôle d'élément neutre pour $\times$ car on a les isomorphismes naturels

$$\{1\} \times X \xrightarrow[\lambda]{\sim} X \xleftarrow[\rho]{\sim} X \times \{1\}$$

Dans la suite on va voir comment généraliser et théoriser ce genre de propriétés.

Définition. Un monoïde ensembliste (*ie :* dans la catégorie **Set**) peut être défini de l'une des deux manières suivantes :

1) Un triplet $(S, *, e)$ où S est un ensemble (un objet de **Set**), $e \in S$ et $* : S \times S \to S$ est une loi interne associative qui admet e pour élément neutre, c'est-à-dire telle que

$$\forall\, x, y, z \in S,\ (x * y) * z = x * (y * z) \text{ et } x * e = x = e * x.$$

2) Un triplet (S, μ, η) où S est un ensemble (un objet de **Set**), et $\mu : S \times S \to S$, $\eta : \{1\} \to S$ sont deux applications2 (morphismes dans **Set**) telles que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd} S \times S \times S \arrow[r, "id\times\mu"] \arrow[d, "\mu\times id"'] & S \times S \arrow[d, "\mu"] \\ S \times S \arrow[r, "\mu"'] & S \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \{1\} \times S \arrow[r, "\eta\times id"] \arrow[dr, "\lambda"'] & S \times S \arrow[d, "\mu"] & S \times \{1\} \arrow[l, "id\times\eta"'] \arrow[dl, "\rho"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Ce qui correspond aux égalités $\mu \circ (id \times \mu) = \mu \circ (\mu \times id)$, $\mu \circ (\eta \times id) = \lambda$ et $\mu \circ (id \times \eta) = \rho$.

Remarque. On peut définir un groupe comme un monoïde (M, μ, η) muni d'une fonction $\zeta : M \to M$ (la fonction inverse $x \mapsto x^{-1}$) telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & M \times M \arrow[r, "id\times\zeta"] & M \times M \arrow[d, "\mu"] \\ \{1\} \arrow[rr, "\eta"] & & M \end{tikzcd}$$

avec $M \to \{1\}$ l'unique application possible, et δ l'application diagonale

$$\begin{array}{rcccc} \delta & : & M & \to & M \times M \\ & & x & \mapsto & (x,x) \end{array}.$$

Cette dernière est spécifique au produit cartésien $\times$ et donc se généralise mal, à l'inverse la notion de monoïde se généralise facilement dans d'autres catégories munies d'une opération "associative unitaire" comme on le verra plus loin. Il s'agit de catégories appelées catégories monoïdales.

Définition. Si $\mathscr{B}$ est une catégorie, on définit son squelette $\mathscr{B}_0$ comme étant la catégorie dont les objets sont les classes d'équivalences d'objets de $\mathscr{B}$ et les flèches sont les morphismes induits.

Définition. Si $\mathscr{B}$ est une catégorie, un bifoncteur de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{B}$ est un foncteur de $\mathscr{B} \times \mathscr{B}$ dans $\mathscr{B}$.

C'est donc une application $\square$ qui associe à tout couple d'objets $(a, b) \in \mathscr{B} \times \mathscr{B}$ un élément $a \square b \in \mathscr{B}$ et à tout couple de morphismes $(f : a \to a'\ ,\ g : b \to b')$ un morphisme $f \square g : a \square b \to a' \square b'$. Il doit alors vérifier l'identité $id_a \square id_b = id_{a \square b}$ pour a et b dans $\mathscr{B} \times \mathscr{B}$, et pour tous morphismes f, g, f', g' pour lesquels les composées $f' \circ f$ et $g' \circ g$ ont un sens, on doit avoir l'égalité

$$(f' \square g') \circ (f \square g) = (f' \circ f) \square (g' \circ g).$$

Définition. Une catégorie monoïdale stricte est un triplet $(\mathscr{B}, \square, e)$ où
- $\mathscr{B}$ est une catégorie,
- $e \in \mathscr{B}$ est un objet,
- $\square$ un bifoncteur de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{B}$ qui est associatif et qui admet e pour élément neutre. Il doit donc vérifier les identités fonctorielles :

$$\square \circ (\square \times id) = \square \circ (id \times \square) : \mathscr{B} \times \mathscr{B} \times \mathscr{B} \to \mathscr{B} \quad \text{et} \quad \square \circ (C_e \times id) = id_{\mathscr{B}} = \square \circ (id \times C_e) : \mathscr{B} \to \mathscr{B}$$

avec les foncteurs

$$\begin{array}{cccc} C_e \times \mathrm{id} & : & \mathscr{B} & \to & \mathscr{B} \times \mathscr{B} \\ & & x & \mapsto & (e, x) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cccc} \mathrm{id} \times C_e & : & \mathscr{B} & \to & \mathscr{B} \times \mathscr{B} \\ & & x & \mapsto & (x, e) \end{array}.$$

Ici fonctorielle signifie que l'égalité est vraie à la fois pour les objets et les flèches, ce qui donne les deux diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{B} \times \mathscr{B} \times \mathscr{B} \arrow[d, "\square \times id"'] \arrow[dr, "id \times \square"] & \\
\mathscr{B} \times \mathscr{B} \arrow[dr, "\square"'] & \mathscr{B} \times \mathscr{B} \arrow[d, "\square"] \\
 & \mathscr{B}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(a,b,c) \arrow[rr, "{(f,g,h)}"] \arrow[dr] \arrow[dd] & & (a',b',c') \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
 & (a, b \square c) \arrow[rr, "{(f, g \square h)}"] \arrow[dd] & & (a', b' \square c') \arrow[dd] \\
(a \square b, c) \arrow[rr, "{(f \square g, h)}"] \arrow[dr] & & (a' \square b', c') \arrow[dr] & \\
 & (a \square b) \square c = a \square (b \square c) \arrow[rr, "(f \square g) \square h = f \square (g \square h)"] & & (a' \square b') \square c' = a' \square (b' \square c')
\end{tikzcd}$$

$$\mathscr{B} \xrightarrow{C_e \times id} \mathscr{B} \times \mathscr{B} \xrightarrow{\square} \mathscr{B} = \mathscr{B} = \mathscr{B} \xleftarrow{\square} \mathscr{B} \times \mathscr{B} \xleftarrow{id \times C_e} \mathscr{B}$$

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r] \arrow[d, "f"] & (e,b) \arrow[r] \arrow[d, "{(id_e, f)}"] & e \square b \arrow[r, equal] \arrow[d, "id_e \square f"] & b \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"] & b \square e \arrow[d, "f \square id_e"] & (b,e) \arrow[l] \arrow[d, "{(id_e, f)}"] & b \arrow[l] \arrow[d, "f"] \\
b' \arrow[r] & (e,b') \arrow[r] & e \square b' \arrow[r, equal] & b' \arrow[r, equal] & b' \square e & (b',e) \arrow[l] & b' \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Exemple. On peut donner comme exemples :
- Si (M, μ, η) est un monoïde (dans **Set**) alors la catégorie $\mathscr{M}$ associée à M est strictement monoïdale pour e l'unique objet de $\mathscr{M}$ et pour $\square$ tel que $e \square e := e$ et qui agit par multiplication sur les flèches.
- Si $\mathscr{B}$ est une catégorie, on considère $\mathbf{Fonct}(\mathscr{B}, \mathscr{B})$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{B}$ et les morphismes sont les transformations naturelles entre ces foncteurs. Cette catégorie est strictement monoïdale pour $\square$ la composition des foncteurs et e le foncteur identité.

Mais cette définition peut paraître trop stricte, notamment l'égalité entre foncteurs demandée peut être trop rigide pour décrire certaines structures intéressantes (comme le produit tensoriel pour les modules). On préfère alors élargir la définition en remplaçant l'égalité par une équivalence naturelle et étudier des catégories monoïdales "relâchées". On verra plus tard que toute catégorie monoïdale "relâchée" est en fait équivalente à une catégorie monoïdale stricte abstraite, donc on ne perd pas en généralité avec cette nouvelle définition.

Définition. Une catégorie monoïdale (ou tensorielle) est la donnée de $(\mathscr{B}, \square, e)$ où

— $\mathscr{B}$ est une catégorie,

— $e \in \mathscr{B}$ est un objet,

— $\square$ un bifoncteur de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{B}$ qui est associatif à un isomorphisme naturel α près et qui admet e pour élément neutre à gauche (resp. droite) à un isomorphisme naturel λ (resp. ρ) près.

On doit donc rajouter dans la définition de la catégorie monoïdale $(\mathscr{B}, \square, e)$ la donnée des isomorphismes

$$\left\{\begin{array}{lcccccl} \alpha_{a,b,c} & : & a \square (b \square c) & \longrightarrow & (a \square b) \square c & \text{naturel en} & (a,b,c) \in \mathscr{B}^3 \\ \rho_a & : & a \square e & \longrightarrow & a & \text{naturel en} & a \in \mathscr{B} \\ \lambda_a & : & e \square a & \longrightarrow & a & \text{naturel en} & a \in \mathscr{B} \end{array}\right. .$$

De plus, il faut que $\lambda_e = \rho_e : e \square e \to e$ et que les diagrammes du pentagone et du triangle ci-dessous commutent :

$$\begin{tikzcd} a \square (b \square (c \square d)) \arrow[r, "id\square\alpha"] \arrow[d, "\alpha"'] & a \square ((b \square c) \square d) \arrow[r, "\alpha"] & (a \square (b \square c)) \square d \arrow[d, "\alpha\square id"] \\ (a \square b) \square (c \square d) \arrow[rr, "\alpha"'] & & ((a \square b) \square c) \square d \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \square (e \square c) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "id\square\lambda"'] & & (a \square e) \square c \arrow[dl, "\rho\square id"] \\ & a \square c & \end{tikzcd} \tag{1}$$

Remarque. Si ces deux diagrammes commutent on peut montrer que les deux diagrammes ci-dessous commutent eux aussi, ils sont utiles dans certaines démonstrations.

$$\begin{tikzcd} e \square (b \square c) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\lambda"'] & & (e \square b) \square c \arrow[dl, "\lambda\square id"] \\ & b \square c & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \square (b \square e) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "id\square\rho"'] & & (a \square b) \square e \arrow[dl, "\rho"] \\ & a \square b & \end{tikzcd} \tag{2}$$

Exemple. L'exemple fondamental de catégorie monoïdale est $(\mathbf{Ab}, \otimes, \mathbb{Z}, \alpha, \lambda, \rho)$ où le produit tensoriel de deux groupes abéliens est défini (à un isomorphisme de $\mathbf{Ab}$ près) par la propriété universelle usuelle. On vérifie aisément que c'est bien un bifoncteur, et α, λ, ρ sont les isomorphismes classiques obtenus eux aussi avec la propriété universelle du produit tensoriel. Enfin, en remarquant que si $A, B, C \in \mathbf{Ab}$ sont des groupes abéliens, alors

$$\forall\, a \in A,\ b \in B,\ c \in C \quad \alpha_{A,B,C}\big(\, a \otimes (b \otimes c)\,\big) = (a \otimes b) \otimes c,$$

on peut voir que les diagrammes (1) commutent bien en les évaluant sur des éléments générateurs.

Exemple. On peut aussi donner comme autres exemples :

— Le triplet $(\mathbf{Set}, \times, \{*\})$ est une catégorie monoïdale.

— Si K est un anneau alors les modules à gauche $(K\text{-}\mathbf{Mod}, \otimes_K, K)$ et $(\mathbf{Alg}_K, \otimes_K, K)$ forment des catégories monoïdales comme dans l'exemple fondamental ci-dessus.

— En particulier, pour $\mathbb{K}$ un corps on a $(\mathbb{K}\text{-}\mathbf{Ev}, \otimes_{\mathbb{K}}, \mathbb{K})$ qui est une catégorie monoïdale, ce qui leur donne parfois l'appellation de catégories tensorielles.

— Si $\mathscr{C}$ est une catégorie qui admet des produits finis (*ie :* $\prod_{i=1}^n C_i$ est bien défini pour tout entier n et toute famille d'objets $(C_i)_{1 \le i \le n}$ de $\mathscr{C}$) et un objet terminal $T \in \mathscr{C}$, alors $(\mathscr{C}, \prod, T)$ est une catégorie monoïdale. Les isomorphismes sont ceux usuellement donnés par la propriété universelle du produit et ils commutent avec les différentes projections, ce qui permet de vérifier que les diagrammes (1) commutent bien.

— On peut faire exactement la même chose avec le coproduit $\coprod$ et un objet initial I. On va détailler cet exemple car il sera utile par la suite :

Exemple. Si une catégorie $\mathscr{B}$ admet toujours des coproduits et admet un objet initial I, le coproduit définit un bifonteur de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{B}$:

$$\coprod : \qquad \begin{tikzcd} \mathscr{B} \times \mathscr{B} \arrow[r] & \mathscr{B} \\ (X_1, X_2) \arrow[r] \arrow[d, "(f_1,f_2)"'] & X_1 \coprod X_2 \arrow[d, "g"] \\ (Y_1, Y_2) \arrow[r] & Y_1 \coprod Y_2 \end{tikzcd}$$

où l'application g est obtenue avec la propriété universelle du coproduit

$$\begin{tikzcd} & Y_1 \coprod Y_2 & \\ Y_1 \arrow[ur, bend left, "i_{Y_1}"] & X_1 \coprod X_2 \arrow[u, dashed, "g"] & Y_1 \arrow[ul, bend right, "i_{Y_2}"'] \\ X_1 \arrow[u, "f_1"] \arrow[ur, "i_{X_1}"'] & & X_2 \arrow[u, "f_2"'] \arrow[ul, "i_{X_2}"] \end{tikzcd} .$$

Le triplet $\left(\mathscr{B}, \coprod, I\right)$ forme alors une catégorie monoïdale. En effet, si X est un objet de $\mathscr{B}$, on peut définir l'application ρ_X en utilisant la propriété universelle du coproduit qui donne l'existence et l'unicité d'un morphisme φ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & X & \\ & X \coprod I \arrow[u, dashed, "\varphi"] & \\ X \arrow[uur, bend left, "id"] \arrow[ur, "i_X"'] & & I \arrow[uul, bend right] \arrow[ul, "\iota"] \end{tikzcd}$$

On pose alors

$$\rho_X = \varphi : X \coprod I \to X.$$

Ensuite, on considère à nouveau la propriété universelle du coproduit de X et I mais cette fois associée au diagramme :

$$\begin{tikzcd} & X \coprod I & \\ & X \coprod I \arrow[u, dashed, "i_X \circ \varphi \;\mid\; id"] & \\ X \arrow[uur, bend left, "i_X"] \arrow[ur, "i_X"'] & & I \arrow[uul, bend right, "\iota"'] \arrow[ul, "\iota"] \end{tikzcd}$$

Les deux applications $i_X \circ \varphi$ et id rendent le diagramme commutatif car $i_X \circ \varphi \circ i_X = i_X$ d'après le premier diagramme ci-dessus. On a alors par unicité $i_X \circ \varphi = \mathrm{id}$ et on sait déjà que $\varphi \circ i_X = \mathrm{id}$, ce qui montre que

$$\rho_X = \varphi = i_X^{-1}$$

est bien un isomorphisme. On construit alors $\lambda_X : I \coprod X \to X$ et on montre que c'est un isomorphisme exactement de la même manière.

Il ne reste plus qu'à définir l'isomorphisme α. Pour cela on considère trois objets X, Y et Z de $\mathscr{B}$ et on utilise la propriété universelle du coproduit de Y et Z associée au diagramme

$$\begin{tikzcd} & & (X \coprod Y) \coprod Z & \\ & X \coprod Y \arrow[ur, bend left, "i_{X,Y}"] & Y \coprod Z \arrow[u, dashed, "\varphi"] & \\ X \arrow[ur, "i_X"] & Y \arrow[u, "i_Y^X"] \arrow[ur, "i_Y^Z"'] & & Z \arrow[ul, "i_Z"] \arrow[uul, bend right, "i_Z^{\coprod}"'] \end{tikzcd}$$

On a alors un morphisme $\varphi : Y \coprod Z \to (X \coprod Y) \coprod Z$ que l'on utilise dans la propriété universelle du coproduit de X avec $Y \coprod Z$ associée au diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & (X \coprod Y) \coprod Z & \\
X \coprod Y \arrow[ur, bend left, "i_{X,Y}"] & X \coprod (Y \coprod Z) \arrow[u, dashed, "\chi"] & \\
X \arrow[u, "i_X"] \arrow[ur, "i_X^{\coprod}"'] & & Y \coprod Z \arrow[ul, "i_{Y,Z}"] \arrow[uul, bend right, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

On obtient ainsi un morphisme

$$\chi : X \coprod (Y \coprod Z) \to (X \coprod Y) \coprod Z.$$

On refait ensuite la construction analogue qui donne d'abord un morphisme $\psi : X \coprod Y \to X \coprod (Y \coprod Z)$, puis un morphisme

$$\eta : (X \coprod Y) \coprod Z \to X \coprod (Y \coprod Z)$$

qui correspondent aux deux diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
 & X \coprod (Y \coprod Z) & & \\
 & X \coprod Y \arrow[u, dashed, "\psi"] & Y \coprod Z \arrow[ul, bend right, "i_{Y,Z}"'] & \\
X \arrow[uur, bend left, "i_X^{\coprod}"] \arrow[ur, "i_X"'] & & Y \arrow[ul, "i_Y^X"] \arrow[u, "i_Y^Z"'] & Z \arrow[ul, "i_Z"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & X \coprod (Y \coprod Z) & \\
 & (X \coprod Y) \coprod Z \arrow[u, dashed, "\eta"] & Y \coprod Z \arrow[ul, bend right, "i_{Y,Z}"'] \\
X \coprod Y \arrow[uur, bend left, "\psi"] \arrow[ur, "i_{X,Y}"'] & & Z \arrow[ul, "i_Z^{\coprod}"] \arrow[u, "i_Z"']
\end{tikzcd}$$

On vérifie alors que les morphismes χ et η sont inverse l'un de l'autre. Pour cela on utilise l'unicité de la propriété universelle du coproduit de X avec $Y \coprod Z$ associée au diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & X \coprod (Y \coprod Z) & \\
 & X \coprod (Y \coprod Z) \arrow[u, dashed, "\eta\circ\chi", "\mathrm{id}"'] & \\
X \arrow[uur, bend left, "i_X^{\coprod}"] \arrow[ur, "i_X^{\coprod}"'] & & Y \coprod Z \arrow[ul, "i_{Y,Z}"] \arrow[uul, bend right, "i_{Y,Z}"']
\end{tikzcd} \tag{3}$$

On va vérifier que les applications $\eta \circ \chi$ et id rendent ce diagramme commutatif et donc sont égales. On aura alors montré que $\eta \circ \chi = \mathrm{id}$ et l'égalité $\chi \circ \eta = \mathrm{id}$ s'obtient de manière analogue. Pour la partie gauche du diagramme on a, grâce aux diagrammes précédents, les égalités

$$\eta \circ \chi \circ i_X^{\coprod} = \eta \circ i_{X,Y} \circ i_X = \psi \circ i_X = i_X^{\coprod}.$$

Pour la partie de droite, il faut combiner les deux suites d'égalités

$$\begin{cases} \eta \circ \chi \circ i_{Y,Z} \circ i_Y^Z = \eta \circ \varphi \circ i_Y^Z = \eta \circ i_{X,Y} \circ i_Y^X = \psi \circ i_Y^X = i_{Y,Z} \circ i_Y^Z \\ \\ \eta \circ \chi \circ i_{Y,Z} \circ i_Z = \eta \circ \varphi \circ i_Z = \eta \circ i_Z^{\coprod} = i_{Y,Z} \circ i_Z \end{cases}$$

que l'on utilise dans la propriété universelle du coproduit de Y et Z associée au diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & X \coprod (Y \coprod Z) & \\
 & Y \coprod Z \arrow[u, dashed, "\eta\circ\chi\circ i_{Y,Z}", "i_{Y,Z}"'] & \\
Y \arrow[uur, bend left, "i_{Y,Z}\circ i_Y^Z"] \arrow[ur, "i_Y^Z"'] & & Z \arrow[ul, "i_Z"] \arrow[uul, bend right, "i_{Y,Z}\circ i_Z"']
\end{tikzcd}$$

D'après les relations ci-dessus les deux applications $\eta \circ \chi \circ i_{Y,Z}$ et $i_{Y,Z}$ rendent le diagramme commutatif et donc sont égales par unicité. On a alors bien montré que le diagramme (3) commute, et donc que η et χ sont inverse l'un de l'autre. On pose donc

$$\alpha_{X,Y,Z} = \chi : X \coprod (Y \coprod Z) \to (X \coprod Y) \coprod Z.$$

Il reste encore à vérifier que les diagrammes du pentagone et du triangles (1) commutent, ce qui se fait encore à l'aide de propriétés universelles, mais qui ne sera pas détaillé ici.

Définition. On introduit une nouvelle catégorie **Moncat** donc les objets sont les petites catégories monoïdales (on considère uniquement les petites pour que l'on puisse avoir une catégorie car la catégorie des catégories n'existe pas) et les flèches $(\mathscr{B}, \Box, e, \alpha, \lambda, \rho) \to (\mathscr{B}', \Box', e', \alpha', \lambda', \rho')$ sont les morphismes stricts entre ces deux catégories. On entend par morphisme strict, un foncteur $T : \mathscr{B} \to \mathscr{B}'$ vérifiant pour tout $a, b, c \in \mathscr{B}$ les identités

$$T(e) = e', \quad T(a \Box b) = T(a) \Box' T(b), \quad T \circ \lambda_a = \lambda'_{T(a)}, \quad T \circ \rho_\alpha = \rho'_{T(a)}, \quad T \circ \alpha_{a,b,c} = \alpha'_{T(a),T(b),T(c)},$$

et pour tous morphismes f, g dans $\mathscr{B}$ l'identité

$$T(f \Box g) = T(f) \Box' T(g).$$

Remarque. Cette catégorie admet des produits finis et elle admet la catégorie $\mathbb{1}$ (qui comporte un seul objet et un seul morphisme) comme élément terminal. On peut aussi regarder sa sous-catégorie pleine (on garde tous les morphismes possibles) des petites catégories monoïdales strictes. Ou à l'inverse on peut élargir la notion de morphisme à un sens non strict, mais c'est plus compliqué à définir.

Exemple. Il existe des catégories monoïdales pour lesquelles on ne peut pas se ramener à α, λ où ρ qui serait l'identité, en gardant les mêmes objets. Ces catégories ne peuvent donc se décrire simplement qu'avec la définition de catégorie monoïdale relâchée.

Par exemple, la catégorie **Set** admet un produit qui est le produit cartésien $\times$ avec les projections usuelles et un objet initial $\varnothing$. Elle est donc monoïdale pour ce produit comme expliqué dans l'exemple ci-dessus. On considère alors $\mathbb{N}$ dans $\mathbf{Set}_0$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable donc on a un isomorphisme $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ dans **Set**, ce qui donne l'égalité $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}$ dans $\mathbf{Set}_0$. On va alors montrer que l'isomorphisme naturel $\alpha_{\mathbb{N},\mathbb{N},\mathbb{N}} : \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N}$ ne peut pas être l'identité dans la catégorie $\mathbf{Set}_0$.

Supposons par l'absurde que l'on puisse avoir $\alpha = id$. Soient $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ des applications, puisque α est naturel, on a $(f \times g) \times h = f \times (g \times h)$ ce qui peut se voir avec le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \arrow[r, "\alpha = id"] \arrow[d, "f \times (g \times h)"'] & (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \arrow[d, "(f \times g) \times h"] \\
\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \arrow[r, "\alpha = id"'] & (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

Or par définition de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ on a deux projections $P_1, P_2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui sont des épimorphismes. On vérifie alors sur des éléments que les deux diagrammes suivants commutent (en identifiant $\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$) :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "P_1"] \arrow[d, "f \times (g \times h)"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "f"] \\
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "P_1"'] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "P_2"] \arrow[d, "h \times (f \times g)"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "(f \times g)"] \\
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "P_2"'] & \mathbb{N}
\end{tikzcd},$$

ce qui donne les égalités

$$\begin{cases} P_1 \circ (f \times (g \times h)) & = & f \circ P_1 \\ P_2 \circ (h \times (f \times g)) & = & (f \times g) \circ P_2 \end{cases}.$$

Avec le même argument on obtient les égalités

$$\begin{cases} P_1 \circ ((f \times g) \times h) & = & (f \times g) \circ P_1 \\ P_2 \circ ((h \times f) \times g) & = & g \circ P_2 \end{cases}.$$

Mises ensembles avec celle du début cela donne

$$\begin{cases} f \circ P_1 &= P_1 \circ (f \times (g \times h)) &= P_1 \circ ((f \times g) \times h) &= (f \times g) \circ P_1 \\ (f \times g) \circ P_2 &= P_2 \circ (h \times (f \times g)) &= P_2 \circ ((h \times f) \times g) &= g \circ P_2 \end{cases}$$

Or P_1 et P_2 sont des épimorphismes donc on obtient $f = (f \times g) = g$. On a alors montré que pour tout morphismes $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on a $f = g$ ce qui est absurde.

I.2 Théorème de cohérence

Définition. On introduit des objets abstraits, appelés mots binaires, qui sont des combinaisons des symboles $e_0, \square, (-)$ et de parenthèses. On les définit par récurrence sur leur longueur :

— Le seul mot binaire de longueur 0 est le mot vide noté e_0

— Le seul mot binaire de longueur 1 est le symbole $(-)$

— Si v et w sont deux mots binaires de longueur n et m respectivement, alors on définit un mot binaire de longueur $n+m$ par $v \square w := (v) \square (w)$.

Exemple. On remarque qu'au final la longueur d'un mot binaire est le nombre d'occurrence du symbole $(-)$. Par exemple le seul mot de longueur 2 est

$$- \square - = (-) \square (-).$$

Un autre mot binaire est

$$\big((- \square -) \square e_0\big) \square - = \big(\,(\,(-) \square (-)\,) \square e_0\,\big) \square (-)$$

qui est de longueur 3. Dans la suite on enlève les parenthèses du symbole $(-)$ qui n'apportent pas d'information, mais on garde les autres parenthèses qui déterminent l'ordre de calcul comme dans ces exemples.

Définition. On note W la "catégorie monoïdale libre sur un générateur $(-)$" dont les objets sont les mots binaires définis avant, et qui possède une unique flèche $v \to w$ pour tout couple de mots (v, w) de même longueur. On définit la multiplication $\square : W \times W \to W$ par $\square(v, w) = v \square w$ qui donne clairement un bifoncteur. Les isomorphismes α, λ, ρ sont définis comme l'unique flèche entre les objets concernés, et le mot vide e_0 est une unité pour $\square$.

Remarque. Tous les diagrammes dans la catégorie W commutent par construction car entre deux objets, il n'y a toujours qu'une seule flèche possible.

Théoreme I.1. *Pour toute catégorie monoïdale $(\mathscr{B}, \square, e, \alpha, \lambda, \rho)$ et pour tout objet $b \in \mathscr{B}$ il existe un unique morphisme strict de catégories monoïdales $W \to \mathscr{B}$ tel que $(-)$ s'envoie sur b.*

Démonstration. On ne donne ici que les étapes de la démonstration (pour le détail se référer à [Mac98] pages 165 à 169). On rappelle que, puisque $\mathscr{B}$ est une catégorie monoïdale, les diagrammes du pentagone et du triangle (1) page 8 commutent, et qu'ils impliquent que les diagrammes (2) commutent eux aussi. En plus de ces diagrammes on utilise la naturalité de α et le fait que $\lambda_e = \rho_e$. On remarque enfin que l'opérateur de $\mathscr{B}$, et celui de W sont tous les deux notés $\square$, mais on fait aisément la différence dans les calculs.

- (Analyse) Si un tel morphisme existe, on le note $w \mapsto w_b$ et on a forcément $(e_0)_b = e$, $(-)_b = b$, et $(v_b \square w_b) = (v \square w)_b$ car c'est un morphisme de catégories monoïdales. Il est alors unique car ces relations le déterminent entièrement.
- (Synthèse) On définit alors un foncteur $T : w \mapsto w_b$ par ces égalités (et T est défini de manière évidente sur les flèches). On va alors montrer que l'on obtient bien un morphisme de catégories monoïdales, ce qui achèvera la preuve.
- Pour un entier n, on définit un graphe G_n dont les sommets sont les mots binaires de longueur n qui n'utilisent pas le symbole e, et dont les arrêtes $v \leftrightarrow w$ correspondent (via T) aux flèches dites "basiques" $v_b \to w_b$ dans $\mathscr{B}$. Une flèche est dite basique si elle est construite à l'aide de $id, \square$, de parenthèses et d'une occurrence (au plus) de α ou α^{-1} (le "ou" est exclusif).
- Si on prend deux chemins dans G_n de même départ v et de même arrivée w, on montre qu'ils sont tous deux égaux à un même chemin $v \to w^{(n)} \to w$, et donc sont égaux. Le mot $w^{(n)}$ est l'unique mot de longueur n sans occurrence de e_0 dont toutes les parenthèses démarrent au début, et le chemin $v \to w^{(n)}$ est défini canoniquement car c'est le chemin qui ramène toutes les parenthèses au début à l'aide de α en partant de la parenthèse la plus à gauche. Le cœur de la démonstration

consiste à montrer que tout chemin de v à $w^{(n)}$ est égal au chemin canonique. Cela se fait en introduisant un rang ρ sur W et par disjonction de cas à l'aide des diagrammes commutatif du premier point. (attention on définit $\rho(e_0) = 0$ mais ici e_0 n'intervient pas dans les mots de G_n, sinon l'équivalence (toutes les parenthèses de w commencent au début $\Leftrightarrow \rho(w) = 0$) serait fausse : $\rho(-\square e_0) = -1$)
- On a donc montré que le graphe associé à G_n (via T) dans $\mathscr{B}$ commute ce qui signifie que tous les diagrammes de $\mathscr{B}$ impliquant uniquement l'associativité d'objets du type $b \square b \square b$... commutent.
- On introduit ensuite les isomorphismes λ et ρ dans le raisonnement. On définit un graphe G'_n analogue à G_n mais ses sommets sont tous les mots de longueur n (avec utilisation de e_0) et ses arrêtes sont celles qui correspondent à une seule occurrence de α, λ, ρ ou leur inverse ("ou" exclusif). Alors G'_n est un graphe infini car on peut rajouter autant de fois le symbole e_0 à un mot que l'on veut sans changer sa longueur, et G_n se retrouve comme sous-graphe de G'_n.
- Si v est un mot de longueur n, il existe un chemin de v à $w^{(n)}$ dans G'_n, qui commence par enlever toutes les occurrences de e_0 en partant de celle la plus à gauche, puis qui reste dans G_n (si on applique d'abord α avant d'enlever e_0, on peut échanger l'ordre en gardant le même chemin grâce aux diagrammes commutatifs du premier point ou à la naturalité de α, et puisque $\lambda_e = \rho_e$ on peut enlever indifféremment n'importe quel e_0 de $e_0 \square e_0$ en premier).
- Si on a deux chemins de v à $w^{(n)}$ dans G'_n alors ils sont chacun égaux à un chemin comme décrit au dernier point, appelons les γ_1 et γ_2. La première partie de γ_1 et de γ_2 est la même car elle ne dépend que de v (c'est le chemin qui supprime les e_0 dans un ordre fixé). La deuxième partie de γ_1 et celle γ_2 partent d'un même mot (v auquel on a supprimé les e_0), arrivent au même mot $w^{(n)}$ et restent dans G_n. Par les points précédents, on en conclut que γ_1 et γ_2 sont égaux, et nos deux chemins de départ aussi.
- On a donc montré que tous les chemins de v à $w^{(n)}$ dans G'_n sont égaux. Enfin si on considère deux chemins entre deux sommets v et w quelconques de G'_n alors on peut les décomposer en utilisant les deux techniques précédentes en des chemins $v \to w^{(n)} \to w$, qui sont donc égaux. On a alors montré que le diagramme dans $\mathscr{B}$ associé à G'_n (via T) est commutatif. Cela signifie que tout diagramme qui n'utilise que $\alpha, \lambda, \rho, id, \square$ et que l'objet b commute.
- Le dernier point à vérifier découle du fait que T est un foncteur et qu'il se comporte clairement bien avec l'identité :

$$T(f \square g) = T\big((f \square id) \circ (id \square g)\big) = T(f \square id) \circ T(id \square g) = \big(T(f) \square id\big) \circ \big(id \square T(g)\big) = T(f) \square T(g)$$

On a donc bien un morphisme de catégories monoïdales ce qui montre le théorème.

□

Définition. Soit $\mathscr{B}$ une catégorie monoïdale, si $w \in W$ est un mot binaire de longueur n on lui associe un foncteur $w_{\mathscr{B}} : \mathscr{B}^n \to \mathscr{B}$ défini par récurrence sur la longueur de w :
— Pour $w = e_0$ on pose $(e_0)_{\mathscr{B}} : \mathbb{1} \to \mathscr{B}$, $1 \mapsto e$ le foncteur constant égal à e (noté e),
— Pour $w = (-)$ on pose$(-)_{\mathscr{B}} := id_{\mathscr{B}} : \mathscr{B} \to \mathscr{B}$,
— Et pour w, w' de longueur n et n' on définit $(w \square w')_{\mathscr{B}}$ comme la composée

$$(w \square w')_{\mathscr{B}} := \square \circ (w_{\mathscr{B}} \times w'_{\mathscr{B}}) : \mathscr{B}^{n+n'} \to \mathscr{B} \times \mathscr{B} \to \mathscr{B}.$$

Exemple. Le foncteur associé au mot $w = \big(-\square(-\square-)\big) \square -$ est

$$w_{\mathscr{B}} = \big(id \square (id \square id)\big) \square id \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathscr{B}^4 & \to & \mathscr{B} \\ (b_1, b_2, b_3, b_4) & \mapsto & \big(b_1 \square (b_2 \square b_3)\big) \square b_4 \end{array}.$$

Théoreme I.2 (de cohérence). *Soit $\mathscr{B}$ une catégorie monoïdale, il existe une fonction qui à tout couple de mots binaires de même longueur (v, w) associe une équivalence naturelle $can_{\mathscr{B}}(v, w)$ entre les foncteurs $v_{\mathscr{B}}$ et $w_{\mathscr{B}}$. Ces dernières sont appelées transformations canoniques et elles sont toutes obtenues par composition et $\square$-produit de $1_e, id_{\mathscr{B}}, \alpha, \alpha^{-1}, \lambda, \lambda^{-1}, \rho$ et ρ^{-1}.*

Exemple. Pour les mots $v = (-\square-)\square-$ et $w = -\square(-\square-)$ on a l'isomorphisme naturel $can_{\mathscr{B}}(v, w) = \alpha$ entre les foncteurs $(id \square id) \square id$ et $id \square (id \square id)$ ce qui donne pour tout $a, b, c \in \mathscr{B}$, $(a \square b) \square c \cong a \square (b \square c)$.

Remarque. Si on regarde uniquement l'application $can_{\mathscr{B}}(v, w)$ sur des éléments du type $(b, \dots, b) \in \mathscr{B}^n$ pour $b \in \mathscr{B}$ on retrouve en particulier le théorème I.1. Ces deux théorèmes sont différents car le premier concerne uniquement les diagrammes qui n'utilisent qu'un seul objet $b \in \mathscr{B}$, alors que le deuxième donne des isomorphismes naturels entre les foncteurs, donc il concerne tous les diagrammes (ce qui importe dans ce cas c'est uniquement la structure des mots).

Démonstration. On définit une catégorie monoïdale $\mathbf{It}(\mathscr{B})$ dont les objets sont les couples (n,T) où n est un entier et T est un foncteur de $\mathscr{B}^n$ dans $\mathscr{B}$, et les flèches $(n,T) \to (n',T')$ sont les transformations naturelles entre T et T' si $n = n'$ (pas de flèche sinon). On définit ensuite un produit par $(n,T) \,\square\, (m,S) \coloneqq (n+m, T\square S)$ et on vérifie aisément que c'est un bifoncteur, d'élément neutre $(0,e)$. On applique ensuite le théorème I.1 à la catégorie monoïdale $\mathbf{It}(\mathscr{B})$ et à l'objet $(1, id_{\mathscr{B}}) \in \mathbf{It}(\mathscr{B})$, alors il existe un unique morphisme de catégories monoïdales $W \to \mathbf{It}(\mathscr{B})$ qui envoie $(-)$ sur $(1, id_{\mathscr{B}})$. On remarque que sous ces conditions $w \in W$ s'envoie sur $w_{\mathscr{B}}$ comme défini ci dessus, et l'unique flèche $v \to w$ s'envoie sur un morphisme entre $v_{\mathscr{B}}$ et $w_{\mathscr{B}}$ dans $\mathbf{It}(\mathscr{B})$, c'est-à-dire une transformation naturelle que l'on note $can_{\mathscr{B}}(v,w)$. L'autre affirmation découle de la définition d'un morphisme de catégories monoïdales, et de la construction de $can_{\mathscr{B}}(v,w)$ comme image de $v \to w$ par un tel morphisme. □

Théoreme I.3 (Résumé). *Si $\mathscr{B}$ est une catégorie monoïdale (ie. si les diagrammes (1) page 8 commutent),*

1) Tout diagramme correspondant à la description suivante commute :
- *Les sommets sont des foncteurs $w_{\mathscr{B}}$ associés à des mots $w \in W$ d'une même longueur n (Ce sont des composées et des $\square$-produits de 1_e et $id_{\mathscr{B}}$).*
- *Les flèches sont des transformations naturelles entre ces foncteurs qui sont obtenues par composition et $\square$-produit de $1_e, id_{\mathscr{B}}, \alpha, \alpha^{-1}, \lambda, \lambda^{-1}, \rho$ et ρ^{-1}.*

2) Si w est un mot avec les lettres $e, b_1, \dots, b_n \in \mathscr{B}$ alors il existe une unique flèches de $\mathscr{B}$ obtenue par composition et $\square$-produit de $1_e, id_{\mathscr{B}}, \alpha, \alpha^{-1}, \lambda, \lambda^{-1}, \rho$ et ρ^{-1} qui envoie w sur un mot dont toutes les parenthèses commencent au début et auquel on a éliminé toutes les occurrences de e :

$$\big(((b_1 \square b_2) \square b_3) \square \cdots \square b_n\big)$$

3) Tout diagramme dans la catégorie $\mathscr{B}$ entre des objets de longueur fixée (par rapport au $\square$-produit), dont les flèches n'utilisent que des compositions et des $\square$-produits de $1_e, id_{\mathscr{B}}, \alpha, \alpha^{-1}, \lambda, \lambda^{-1}, \rho$ et ρ^{-1}, commute.

4) ***Cela signifie que si on prend une $\square$-combinaison dans $\mathscr{B}$ on peut changer le parenthésage et supprimer les occurrences de e dans n'importe quel ordre car tous les ordres possibles sont en fait égaux.***

I.3 Monoïdes (ou algèbres) dans une catégorie monoïdale

Définition. Soit $(\mathscr{B}, \square, e, \alpha, \lambda, \rho)$ une catégorie monoïdale,
- Un monoïde ou une algèbre dans la catégorie $\mathscr{B}$ est triplet (b, μ, η) où b est un objet de $\mathscr{B}$ et $\mu : b \square b \to b$, $\eta : e \to b$ sont deux flèches dans $\mathscr{B}$ telles que les deux diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd} b \square (b \square b) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "id\square\mu"'] & (b \square b) \square b \arrow[r, "\mu\square id"] & b \square b \arrow[d, "\mu"] \\ b \square b \arrow[rr, "\mu"'] & & b \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} e \square b \arrow[r, "\eta\square id"] \arrow[dr, "\lambda"'] & b \square b \arrow[d, "\mu"] & b \square e \arrow[l, "id\square\eta"'] \arrow[dl, "\rho"] \\ & b & \end{tikzcd}$$

- Un morphisme $f : (b, \mu, \eta) \to (b', \mu', \eta')$ de monoïdes de $\mathscr{B}$ est une flèche $f : b \to b'$ dans $\mathscr{B}$ telle que les deux diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd} b \square b \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "f\square f"'] & b \arrow[d, "f"] \\ b' \square b' \arrow[r, "\mu'"'] & b' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} e \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\eta'"'] & b \arrow[d, "f"] \\ & b' \end{tikzcd}$$

- La catégorie $\mathbf{Mon}_{\mathscr{B}}$ a pour objets les monoïdes de la catégorie $\mathscr{B}$, et pour flèches les morphismes de monoïdes dans $\mathscr{B}$.

Remarque. Si b est un monoïde de $\mathscr{B}$, les deux diagrammes commutatifs donnent les équations

$$\begin{cases} \mu \circ (id \square \mu) &= \mu \circ (\mu \square id) \circ \alpha \\ \mu \circ (\eta \square id) &= \lambda \\ \mu \circ (id \square \eta) &= \rho \end{cases}$$

Cela correspond au fait que μ est associative (via α) et que "$\eta(e)$ est neutre pour μ (via λ et ρ)" si cela a du sens. Par ailleurs, si $f : (b,\mu,\eta) \to (b',\mu',\eta')$ est un morphisme de monoïdes les deux diagrammes commutatifs donnent les équations usuelles

$$\begin{cases} f \circ \mu &= \mu' \circ (f \square f) \\ f \circ \eta &= \eta' \end{cases}.$$

Exemple. Un monoïde M dans la catégorie $(\mathbf{Ab}, \otimes, \mathbb{Z})$ est un anneau unitaire. En effet, M est un groupe abélien muni de deux morphismes de groupes abéliens $\phi : M \otimes M \to M$ et $\eta : \mathbb{Z} \to M$. On note alors $\mu : M \times M \to M$ l'application bilinéaire associée à ϕ (par $\mu = \phi \circ \otimes$) et $\mathbb{1} := \eta(1)$ et on obtient un anneau $(M, +, \mu)$ dont $\mathbb{1}$ est une unité par les deux égalités

$$x = \lambda(1 \otimes x) = \mu \circ (\eta \otimes id)(1 \otimes x) = \mu(\mathbb{1} \otimes x) \quad \text{et} \quad x = \rho(x \otimes 1) = \mu \circ (id \otimes \eta)(x \otimes 1) = \mu(x \otimes \mathbb{1}).$$

Exemple. En observant les monoïdes dans des catégories différentes on peut ainsi retrouver des objets bien connus :

Catégories monoïdales $\mathscr{B}$	Monoïdes dans cette catégorie
$(\mathbf{Set}, \times, \{1\})$	Monoïdes classiques (groupes sans inverse)
$(\mathbf{Top}, \times, \{*\})$	Monoïdes topologiques (cf. groupes topologiques)
$(\mathbf{Ab}, \otimes, \mathbb{Z})$	Anneaux unitaires
$(K\text{-}\mathbf{Mod}, \otimes_K, K)$	K – Algèbres unitaires
$(\mathscr{B}^{op}, \square^{op}, e)$	Comonoïdes de $\mathscr{B}$
$(K\text{-}\mathbf{Mod}^{op}, \otimes_K^{op}, K)$	K – Co-algèbres (co-unitaires)

Remarque. On peut remarquer qu'on a un foncteur oubli $U : \mathbf{Mon}_{\mathscr{B}} \to \mathscr{B}$ qui envoie le triplet (b,μ,η) sur b et on va se demander sous quelles conditions il admet un adjoint, ce qui permettra de définir une catégorie monoïdale libre.

Définition. Soit (b,μ,η) un monoïde dans $\mathscr{B}$, pour $w \in W$ un mot binaire on définit le produit itéré (n fois si w est de longueur n) selon w, noté $\mu_w : w_b \to b$, par récurrence sur la longueur de w :
— Pour $w = e_0$, on définit $\mu_{e_0} := \eta : e \to b$,
— Pour $w = (-)$, on définit $\mu_{(-)} := id : b \to b$,
— Pour $w = - \square -$, on définit $\mu_{-\square-} := \mu : b \square b \to b$
— Enfin pour $v, w \in W$ deux mots, on définit le produit itéré comme la composée

$$\mu_{v \square w} := \mu \circ (\mu_v \square \mu_w) : (v \square w)_b = (v_b \square w_b) \to b \square b \to b$$

Proposition I.4. *Soit (b,μ,η) un monoïde dans $\mathscr{B}$, si v et w sont deux mots binaires de même longueur, on a l'égalité*

$$\mu_w \circ can_{\mathscr{B}}(v,w) = \mu_v : v_b \to b$$

Cela signifie que dans un monoïde, deux produits itérés n fois sont toujours égaux à composition par un isomorphisme près.

Démonstration. Si $can_{\mathscr{B}}(v,w)$ est l'identité la formule est triviale, si c'est λ on a alors $v = e_0 \square -$ et $w = (-)$, donc μ_v est la composée $\mu \circ (\mu_{e_0} \square \mu_{(-)}) = \mu \circ (\eta \square id)$ et $\mu_w = id$. La formule est alors exactement donnée par le diagramme en triangle que doit vérifier un monoïde. On a la même chose si $can_{\mathscr{B}}(v,w) = \rho$. Enfin, on remarque que $can_{\mathscr{B}}\big(- \square (- \square -), (- \square -) \square -\big) = \alpha$, et dans ce cas la relation voulue correspond exactement au diagramme en pentagone d'un monoïde.

On a donc vu que si $can_{\mathscr{B}}(v,w)$ est l'identité, λ, ρ, α alors la formule est vraie et il en est de même pour leur inverse. Or les applications $can_{\mathscr{B}}(v,w)$ sont toutes obtenues par composition et $\square$-produit de $id, \alpha, \alpha^{-1}, \lambda, \lambda^{-1}, \rho$ et ρ^{-1}. On montre alors par récurrence sur le nombre d'occurrences de ces fonctions noté Nb, que la formule est toujours vraie. L'initialisation correspond à une occurrence d'une des fonctions, qu'on a donc déjà traité. Pour l'hérédité, on considère une application $can_{\mathscr{B}}(v,w)$ avec $Nb = n+1$, que l'on décompose, par exemple, $can_{\mathscr{B}}(v,w) = \phi \circ can_{\mathscr{B}}(v,\tilde{w})$, avec $\phi \in \{\alpha, \lambda, \rho, \alpha^{-1}, \lambda^{-1}, \rho^{-1}\}$

et $can_{\mathscr{B}}(v, \tilde{w})$ vérifiant $Nb = n$. Alors on a $\mu_{\tilde{w}} = \mu_w \circ \phi : \tilde{w}_b \to b$ qui est un produit itéré, et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $can_{\mathscr{B}}(v, \tilde{w})$, ce qui donne

$$\mu_w \circ can_{\mathscr{B}}(v, w) = \mu_w \circ \phi \circ can_{\mathscr{B}}(v, \tilde{w}) = \mu_{\tilde{w}} \circ can_{\mathscr{B}}(v, \tilde{w}) = \mu_v \qquad \text{(HR)}$$

□

Exemple. Soit b un monoïde d'une catégorie monoïdale $\mathscr{B}$, on définit par récurrence une n-multiplication

$$\mu^{(n)} : b^{(n)} := \big(((b \,\square\, b) \,\square\, b) \,\square \cdots \square\, b\big) \to b \text{ par :}$$

— $\mu^{(0)} := \eta$, $\mu^{(1)} := id$, $\mu^{(2)} := \mu$
— $\mu^{(n+1)} := \mu \circ (\mu^{(n)} \,\square\, id)$.

Alors la propriété implique que pour tout entier n et pour tous $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ on a l'égalité

$$\mu^{(n)} \circ (\mu^{(k_1)} \,\square \cdots \square\, \mu^{(k_n)}) = \mu^{(k_1 + \dots + k_n)} : b^{(k_1 + \dots + k_n)} \to b$$

Théoreme I.5. *Si $\mathscr{B}$ est une catégorie monoïdale qui admet des coproduits dénombrables (ie. telle que pour toute suite $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'objets de $\mathscr{B}$, il existe un coproduit $\coprod_{i \in \mathbb{N}} b_i$) et telle que pour tout objet $a \in \mathscr{B}$ les foncteurs $a \,\square\, -$ et $- \,\square\, a$ préservent les coproduits, alors il existe un foncteur $F : \mathscr{B} \to \mathbf{Mon}_{\mathscr{B}}$ qui est adjoint à gauche au foncteur oubli $U : \mathbf{Mon}_{\mathscr{B}} \to \mathscr{B}$.*

Démonstration. On se base sur la construction classique du monoïde libre sur un ensemble $S \in \mathbf{Set}$: En posant S^n comme l'ensemble des mots de longueur n dont les lettres sont dans S, le monoïde libre sur S est $\coprod_{n \in \mathbb{N}} S^n$ où la loi est donnée par la concaténation des mots. On adapte ici cette construction (qui est aussi celle utilisée pour le K−Module libre sur M, $F(M) = \oplus_{n \in \mathbb{N}} M^n$). □

Définition. Si $b \in \mathscr{B}$ est un objet d'une catégorie monoïdale, on appelle $F(b)$ le monoïde libre sur b avec F le foncteur adjoint au foncteur oubli du théorème précédent.

I.4 Actions de monoïdes d'une catégorie monoïdale

Définition. Soit $\mathscr{B}$ une catégorie monoïdale,

— Une action à gauche d'un monoïde (c, μ, η) sur un objet $b \in \mathscr{B}$ est la donnée d'une flèche $v : c \square b \to b$ de $\mathscr{B}$ telle que les deux diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd}
c \,\square\, (c \,\square\, b) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "id \square v"'] & (c \,\square\, c) \,\square\, b \arrow[r, "\mu \square id"] & c \,\square\, b \arrow[d, "v"] \\
c \,\square\, b \arrow[rr, "v"'] & & b
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
e \,\square\, b \arrow[r, "\eta \square id"] \arrow[dr, "\lambda"'] & c \,\square\, b \arrow[d, "v"] \\
& b
\end{tikzcd}$$

Ces diagrammes correspondent aux relations

$$"g \cdot (g' \cdot x) = \mu(g, g') \cdot x" \text{et} "\eta(e) \cdot x = x = \lambda(e \,\square\, x)"$$

des actions de groupes classiques.

— On définit ensuite la catégorie ${}_c\mathbf{LAct}$ dont les objets sont les couples (b, v) où b est un objet de $\mathscr{B}$ et v une action à gauche de c sur b, et les flèches $(b, v) \to (b', v')$ sont les flèches $f : b \to b'$ dans $\mathscr{B}$ telles que $v' \circ (id \,\square\, f) = f \circ v : c \,\square\, b \to b'$ (c'est-à-dire que f commute avec l'action de c).

— Tout est défini de la même manière pour une action à droite de c sur b, $\sigma : b \,\square\, c \to b$.

Définition. On peut aussi adopter un autre point de vue : pour un monoïde c dans une catégorie monoïdale $\mathscr{B}$, un c-module à gauche dans $\mathscr{B}$ est un objet $b \in \mathscr{B}$ muni d'une action à gauche de c : $v : c \,\square\, b \to b$. Pour un objet c on note c-**Mod** la catégorie (abélienne) des c-modules dans $\mathscr{B}$.

Exemple. Dans certaines catégories on retrouve des notions bien connues :

— Pour $\mathscr{B} = \mathbf{Set}$ on retrouve l'action d'un monoïde classique sur un ensemble, et en particulier les actions de groupes.

— Pour $\mathscr{B} = \mathbf{Ab}$ on obtient l'action d'un anneau R (un monoïde dans $\mathbf{Ab}$) sur un groupe abélien, c'est-à-dire un R-module. Par exemple l'affirmation "$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel" est identique à l'affirmation "le monoïde $\mathbb{R}$ de la catégorie monoïdale $\mathbf{Ab}$ agit sur le groupe abélien $\mathbb{C}$".

Proposition I.6. *Si c est un monoïde dans la catégorie monoïdale $\mathscr{B}$ le foncteur libre*

$$\begin{array}{cccc} F & : & \mathscr{B} & \to & {}_c\mathbf{LAct} \\ & & b & \mapsto & (c \,\square\, b, \tilde{v}) \end{array},$$

avec $\tilde{v} := (\mu \square id) \circ \alpha : c \square (c \square b) \to (c \square c) \square b \to c \square b$, est adjoint à gauche au foncteur oubli $U :_c \mathbf{LAct} \to \mathscr{B}$.

I.5 Catégories monoïdales symétriques

Définition. Soit $\mathscr{M}$ une catégorie monoïdale, un tressage de $\mathscr{M}$ est un isomorphisme naturel $\gamma_{a,b} : a \square b \to b \square a$ entre les foncteur $(- \square -)$ et $(- \square -) \circ \sigma$, où $\sigma : \mathscr{M}^2 \to \mathscr{M}^2$ est le foncteur qui échange les deux coordonnées, telle que les trois diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd} a \square e \arrow[rr, "\gamma_{a,e}"] \arrow[dr, "\rho"'] & & e \square a \arrow[dl, "\lambda"] \\ & a & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (a \square b) \square c \arrow[r, "\gamma_{a \square b, c}"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] & c \square (a \square b) \arrow[r, "\alpha"] & (c \square a) \square b \arrow[d, "\gamma_{c,a} \square id"] \\ a \square (b \square c) \arrow[r, "id \square \gamma_{b,c}"] & a \square (c \square b) \arrow[r, "\alpha"] & (a \square c) \square b \end{tikzcd} \tag{4}$$

$$\begin{tikzcd} a \square (b \square c) \arrow[r, "\gamma_{a, b\square c}"] \arrow[d, "\alpha"'] & (b \square c) \square a \arrow[r, "\alpha^{-1}"] & b \square (c \square a) \arrow[d, "id \square \gamma_{c,a}"] \\ (a \square b) \square c \arrow[r, "\gamma_{a,b} \square id"] & (b \square a) \square c \arrow[r, "\alpha^{-1}"] & b \square (a \square c) \end{tikzcd}$$

Remarque. Les deux diagrammes en hexagone se correspondent via le changement $\gamma \leftrightarrow \gamma^{-1}$, donc si γ est un tressage de $\mathscr{M}$ alors γ^{-1} en est aussi une. De plus, on peut traduire ces diagrammes par les égalités

$$\begin{cases} \gamma_{a \square b, c} &= \alpha^{-1} \circ (\gamma_{a,c}^{-1} \square id) \circ \alpha \circ (id \square \gamma_{b,c}) \circ \alpha^{-1} \\ \gamma_{a, b \square c} &= \alpha \circ (id \square \gamma_{a,c}^{-1}) \circ \alpha^{-1} \circ (\gamma_{a,b} \square id) \circ \alpha \end{cases}$$

Ces identités permettent d'exprimer $\gamma_{a \square b, c}$ et $\gamma_{a, b \square c}$ en fonction de $\gamma_{a,b}, \gamma_{b,c}, \gamma_{a,c}$ et α. Cette relation est particulièrement utile si $\square$ est associative, c'est-à-dire si $\alpha = id$.

Remarque. Attention, $\gamma_{a,c}^{-1}$ n'est pas toujours égal à $\gamma_{c,a}$, ce sont des isomorphismes mais ils ne sont en général pas inverses l'un de l'autre.

Définition. Une catégorie monoïdale symétrique est une catégorie monoïdale $\mathscr{M}$ munie d'un tressage γ telle que pour tout $a, b \in \mathscr{M}$ on ait

$$\gamma_{a,b} \circ \gamma_{b,a} = \mathrm{Id} = \gamma_{b,a} \circ \gamma_{a,b}.$$

Il suffit donc que γ vérifie cette identité, l'identité $\lambda_a \circ \gamma_{a,e} = \rho_a$ pour tout $a \in \mathscr{M}$ et qu'un des deux hexagones ci dessus commute.

Exemple. La catégorie $(\mathbb{C}\text{-}\mathbf{Mod}, \otimes, \mathbb{C})$ munie du tressage

$$\begin{array}{cccc} \gamma_{M,N} : & M \otimes N & \to & N \otimes M \\ & x \otimes y & \mapsto & y \otimes x \end{array}$$

est symétrique car on a bien

$$\big(\gamma_{M,N} \circ \gamma_{M,N}\big)(x \otimes y) = \gamma_{M,N}(y \otimes x) = x \otimes y,$$

donc $\gamma_{M,N} \circ \gamma_{M,N} = \mathrm{id}$ et de même dans l'autre sens.

Exemple. On note $\mathfrak{A}$ la catégorie des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels gradués dans laquelle les espaces vectoriels sont de degré 0 et où on décale artificiellement un espace V de degré 0 en $V[n]$ de degré n. On définit alors un bifoncteur $\otimes$ comme le produit tensoriel (sur $\mathbb{C}$) usuel entre espaces vectoriels que l'on muni de la graduation suivante

$$(V \otimes W)_n = \bigoplus_{i+j=n} V_i \otimes W_j$$

Le triplet $(\mathfrak{A}, \otimes, \mathbb{C})$ forme alors une catégorie monoïdale et on peut lui donner deux structures symétriques données par

$$\begin{array}{cccc} \tau_{V,W} : & V \otimes W & \to & W \otimes V \\ & v \otimes w & \mapsto & w \otimes v \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cccc} \sigma_{V,W} : & V \otimes W & \to & W \otimes V \\ & v \otimes w & \mapsto & (-1)^{|v| \cdot |w|}\, w \otimes v \end{array}.$$

On peut vérifier que ces deux structures ne sont pas équivalentes. Les monoïdes commutatifs dans la première sont les anneaux commutatifs gradués et dans la deuxième ce sont les anneaux graduellement-commutatifs.

Proposition I.7. *Si $\mathscr{M}$ est une catégorie monoïdale symétrique on a une action naturelle de S_n sur*

$$\mathscr{M}^{\square n} := \mathscr{M} \square \mathscr{M} \square \cdots \square \mathscr{M}$$

induite par le tressage symétrique γ.

Démonstration. En effet, l'application γ donne l'action des transpositions qui engendrent le groupe symétrique. Un simple tressage (non symétrique) ne suffit pas car on doit avoir $\gamma^2 = \mathrm{Id}$ pour que l'action soit compatible avec la loi de S_n. □

Exemple. Dans la catégorie monoïdale symétrique $(\mathbb{C}\text{-}\mathbf{Mod}, \otimes, \mathbb{C}, \gamma)$ l'action de S_n sur $(\mathbb{C}\text{-}\mathbf{Mod})^{\otimes n}$ est donnée, pour $\sigma \in S_n$ par :

$$\begin{array}{ccc} M_1 \otimes \cdots \otimes M_n & \to & M_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes M_{\sigma(n)} \\ x_1 \otimes \cdots \otimes x_n & \mapsto & x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)} \end{array}$$

Définition. Si $\mathscr{M}$ est une catégorie monoïdale symétrique et M un monoïde (une algèbre) dans $\mathscr{M}$, on dit que M est une monoïde symétrique (une algèbre symétrique) dans $\mathscr{M}$ si sa loi $\mu : \mathscr{M} \square \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ est invariante par l'action de S_2 via γ.

Exemple. Le monoïde

$$\big(\mathbb{C}, \times : \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \big)$$

de $(\mathbb{C}\text{-}\mathbf{Mod}, \otimes, \mathbb{C}, \gamma)$ est symétrique car l'identification $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se fait de manière symétrique.

Théoreme I.8 (de cohérence des catégories monoïdales symétriques).
Soit $\mathscr{M}$ une catégorie monoïdale symétrique, si $w \in W$ est un mot de longueur n et si $\tau \in S_n$ est une permutation, le mot permuté (de longueur n selon w et τ) est le foncteur $(w\tau)_{\mathscr{M}} : \mathscr{M}^n \to \mathscr{M}$ défini par

$$(w\tau)_{\mathscr{M}} \big((a_1, \ldots, a_n) \big) := w(a_{\tau(1)}, \ldots, a_{\tau(n)})$$

(on évalue le mot w en remplaçant le i-ème symbole $(-)$ par $a_{\tau(i)}$ et les symboles e_0 par $e \in \mathscr{M}$). Il existe alors une fonction qui à tout couple $(v\sigma, w\tau)$ de mots permutés de même longueur associe une équivalence naturelle $can_{\mathscr{M}}(v\sigma, w\tau)$ entre les foncteurs $(v\sigma)_{\mathscr{M}}$ et $(w\tau)_{\mathscr{M}}$. Ces dernières sont appelées transformations canoniques et elles sont toutes obtenues par composition et $\square$-produit de $1_e, id_{\mathscr{M}}, \alpha, \alpha^{-1}, \lambda, \lambda^{-1}, \rho, \rho^{-1}$ et γ, γ^{-1}.

Démonstration. Soient $(v\sigma)_{\mathscr{M}}$ et $(w\tau)_{\mathscr{M}}$ deux mots permutés,

- Il existe une transformation naturelle entre ces deux mots. En effet, σ et τ peuvent se décomposer en produit de transpositions de type $(i, i+1)$, et correspondent donc à la composée de plusieurs applications $\gamma_{i,i+1}$. De plus, d'après le théorème de cohérence I.2 page 13 on peut passer de v à w à l'aide de α, λ, ρ et l'identité. On obtient alors l'existence d'une transformation entre ces deux mots permutés, construite avec α, λ, ρ et γ, qui est donc un isomorphisme naturel. Il ne reste qu'à montrer que si l'on dispose de deux transformations naturelles χ_1, χ_2 entre $(v\sigma)_{\mathscr{M}}$ et $(w\tau)_{\mathscr{M}}$ construites à l'aide de α, λ, ρ et γ alors elles sont égales.

- D'après le théorème I.2 si χ_1 et χ_2 n'utilisent que λ, ρ où α alors ils sont égaux. Or d'après les diagrammes (4) qui définissent γ, on peut échanger les occurrences de λ et ρ avec celles de γ sans problème, afin de toutes les mettre au début. Après cette modification, le début de χ_1 et χ_2 ne comporte qu'une série de λ et ρ, et sont donc égaux par le théorème de cohérence I.2. On peut alors supposer que χ_1 et χ_2 ne comporte aucune occurrence de λ ou ρ. De plus, par naturalité de γ ou de α on peut échanger les occurrences de ces deux transformations, et placer toutes celles de α au début. Encore une fois le théorème de cohérence nous permet de supposer qu'il n'y a plus d'occurrence de α dans χ_1 et χ_2. On peut donc supposer ici que $\alpha = id$ et que $\square$ est associatif.
- Il ne reste alors plus qu'à étudier le cas où χ_1 et χ_2 ne comportent que des occurrences de γ. Les deux diagrammes hexagonaux (4) donnent pour $\alpha = id$ et $\gamma_{a,c}^{-1} = \gamma_{c,a}$ les identités :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \gamma_{a \square b, c} & = & (\gamma_{c,a} \square id) \circ (id \square \gamma_{b,c}) \\ \gamma_{a, b \square c} & = & (id \square \gamma_{c,a}) \circ (\gamma_{a,b} \square id) \end{array} \right.$$

  On montre alors par récurrence qu'échanger un argument avec un $\square$-produit de n autres, peut se faire par composition d'échanges successifs d'arguments adjacents. On peut donc décomposer χ_1 et χ_2 comme composées d'éléments $\gamma_{i,i+1}$, qui est un morphisme entre deux arguments adjacents a_i et a_{i+1}. Il en va alors de même pour $\chi_2^{-1} \circ \chi_1$ qui est une transformation naturelle de $(v\sigma)_{\mathscr{M}}$ vers lui même.

- Il est bien connu que le groupe S_n peut s'écrire avec $n-1$ générateurs τ_i (les transpositions $(i, i+1)$) vérifiant les relations $\tau_i^2 = id$, $(\tau_i\tau_{i+1})^3 = id$ et $\tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i$ pour $i < j-1$. On montrera au point suivant que les éléments du type $\gamma_{i,i+1}$ vérifient ces identités. Ces éléments vérifieront alors toutes les identités vérifiées par des éléments de S_n. Mais $\chi_2^{-1} \circ \chi_1$ est une transformation de $(v\sigma)_{\mathscr{M}}$ vers lui même, donc elle correspond à l'identité dans S_n. On obtient alors $\chi_2^{-1} \circ \chi_1 = id$, d'où $\chi_2 = \chi_1$.
- Montrons finalement que les éléments $\gamma_{a_i,a_{i+1}}$ vérifient les identités voulues. La première $\tau_i^2 = id$ correspond exactement à dire que le tressage γ est symétrique et la troisième $\tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i$ s'obtient par naturalité de γ. Pour obtenir la deuxième, $(\tau_i\tau_{i+1})^3 = id$ qui se ré-exprime $\tau_i \circ \tau_{i+1} \circ \tau_i = \tau_{i+1} \circ \tau_i \circ \tau_{i+1}$, on utilise la naturalité de γ et les relations de γ obtenues ci-dessus pour construire le diagramme commutatif suivant (on ne note pas les applications identités)

$$\begin{tikzcd}
 & a_{i+1} \square a_i \square a_{i+2} \arrow[rr, "\gamma_{i+1,i+2}"] \arrow[d, "\gamma_{i,(i+1)\square(i+2)}"] & & a_{i+1} \square a_{i+2} \square a_i \arrow[d, "\gamma_{i,(i+1)\square(i+2)}"'] \arrow[dr, "\gamma_{i,i+1}"] & \\
a_i \square a_{i+1} \square a_{i+2} \arrow[ur, "\gamma_{i,i+1}"] \arrow[dr, "\gamma_{i+1,i+2}"'] & & & & a_{i+2} \square a_{i+1} \square a_i \\
 & a_i \square a_{i+2} \square a_{i+1} \arrow[rr, "\gamma_{i,i+1}"'] & & a_{i+2} \square a_i \square a_{i+1} \arrow[ur, "\gamma_{i+1,i+2}"'] &
\end{tikzcd}$$

On obtient alors l'identité voulue.

□

Remarque (**Résumé**). Tout diagramme dans une catégorie monoïdale symétrique $\mathscr{M}$ entre des objets de longueur fixée (par rapport au $\square$-produit), dont les flèches n'utilisent que des compositions et des $\square$-produits de $1_e, id_{\mathscr{B}}, \alpha, \alpha^{-1}, \lambda, \lambda^{-1}, \rho, \rho^{-1}$ et γ, γ^{-1}, commute.

I.6 Foncteurs monoïdaux

Définition. Un foncteur monoïdal entre deux catégories monoïdales $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}'$ est un triplet (F, F_2, F_0) où

— $F : \mathscr{M} \to \mathscr{M}'$ est un foncteur,

— $F_0 : e' \to F(e)$ est une flèche dans $\mathscr{M}'$,

— F_2 une application qui à tout couple $(a, b) \in \mathscr{M}^2$ associe une flèche $F_2(a, b) : F(a)\square F(b) \to F(a\square b)$ dans $\mathscr{M}'$ telle que les trois diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd}
F(b) \square e' \arrow[r, "\rho'"] \arrow[d, "id\square F_0"'] & F(b) \\
F(b) \square F(e) \arrow[r, "F_2"'] & F(b \square e) \arrow[u, "F(\rho)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
e' \square F(b) \arrow[r, "\lambda'"] \arrow[d, "F_0\square id"'] & F(b) \\
F(e) \square F(b) \arrow[r, "F_2"'] & F(e \square b) \arrow[u, "F(\lambda)"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(a) \square \big(F(b) \square F(c)\big) \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "id\square F_2"'] & \big(F(a) \square F(b)\big) \square F(c) \arrow[r, "F_2\square id"] & F(a \square b) \square F(c) \arrow[d, "F_2"] \\
F(a) \square F(b \square c) \arrow[r, "F_2"] & F\big(a \square (b \square c)\big) \arrow[r, "F(\alpha)"] & F\big((a \square b) \square c\big)
\end{tikzcd}$$

Définition. Soit (F, F_2, F_0) un foncteur monoïdal,

— Il est dit fort si F_0 et $F_2(a, b)$ sont des isomorphismes pour tout $a, b \in \mathscr{M}$.

— Il est dit strict si F_0 et $F_2(a, b)$ sont égaux à l'identité pour tout $a, b \in \mathscr{M}$.

— Une transformation naturelle monoïdale entre deux foncteurs monoïdaux (F, F_2, F_0) et (G, G_2, G_0) de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{M}'$ est une transformation naturelle $\theta : F \to G$ entre les foncteurs sous-jacents, telle que les deux diagrammes suivants commutent dans $\mathscr{M}'$:

$$\begin{tikzcd}
F(a) \square F(b) \arrow[r, "F_2"] \arrow[d, "\theta_a\square\theta_b"'] & F(a \square b) \arrow[d, "\theta_{a\square b}"] \\
G(a) \square G(b) \arrow[r, "G_2"'] & G(a \square b)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
e' \arrow[r, "F_0"] \arrow[dr, "G_0"'] & F(e) \arrow[d, "\theta_e"] \\
 & G(e)
\end{tikzcd}$$

Cela correspond aux égalités "classiques" (par exemple pour les représentations) :

$$\begin{cases} G_2 \circ (\theta_a \square \theta_b) = \theta_{a\square b} \circ F_2 \\ G_0 = \theta_e \circ F_0 \end{cases}$$

Définition. On ne considèrera dans les parties suivantes que des foncteur monoïdaux fort et on ne précise pas toujours les isomorphismes F_0 et F_2. On définit la composée de deux foncteurs monoïdaux ou de deux transformations naturelles monoïdales de manière évidente.

Remarque. Si F est un foncteur monoïdal de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{M}'$, on peut généraliser le concept de F_0 et F_2. Pour cela on choisit un mot $v \in W$ de longueur n et on définit une transformation naturelle F_v entre les foncteurs $v \circ F^n$ et $F \circ v$ de $\mathscr{M}^n$ dans $\mathscr{M}'$, telle que

$$F_v \circ v\big(F(a_1), \dots, F(a_n)\big) = F \circ v(a_1, \dots, a_n).$$

On voit qu'avec cette égalité on retrouve bien $F_{(e_0)} = F_0$ et $F_{(-\square-)} = F_2$. On peut définir proprement ces transformations naturelles par récurrence avec

— Pour les mots de longueur $0, 1$ et 2 : $F_{(e_0)} = F_0$, $F_{(-)} = id$, $F_{(-\square-)} = F_2$

— Puis pour deux mots v et w on définit $F_{v\square w}$ par :

$$F_{v\square w} = F_2 \circ (F_v \square F_w).$$

On montre alors par récurrence que les deux diagrammes suivants commutent pour v, w des mots de même longueur et $\theta : F \to G$ une transformation naturelle monoïdale :

$$\begin{tikzcd}
v\big(F(a_1), \dots, F(a_n)\big) \arrow[r, "F_v"] \arrow[d, "can_{\mathscr{M}'}(v,w)"'] & F \circ v\big(a_1, \dots, a_n\big) \arrow[d, "F(can_{\mathscr{M}}(v,w))"] \\
w\big(F(a_1), \dots, F(a_n)\big) \arrow[r, "F_w"] & F \circ w\big(a_1, \dots, a_n\big)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
v\big(F(a_1), \dots, F(a_n)\big) \arrow[r, "F_v"] \arrow[d, "v(\theta_{a_1}, \dots, \theta_{a_n})"'] & F \circ v\big(a_1, \dots, a_n\big) \arrow[d, "\theta_{v(a_1, \dots, a_n)}"] \\
v\big(G(a_1), \dots, G(a_n)\big) \arrow[r, "G_v"] & G \circ v\big(a_1, \dots, a_n\big)
\end{tikzcd}$$

I.7 Catégories monoïdales strictes

Théoreme I.9. *Si $\mathscr{M}$ est une catégorie monoïdale, il existe $\mathscr{S}$ une catégorie monoïdale stricte et il existe $G : \mathscr{M} \to \mathscr{S}$ et $F : \mathscr{S} \to \mathscr{M}$ des foncteurs monoïdaux forts qui réalisent une équivalence de catégories*

$$\mathscr{M} \cong \mathscr{S}.$$

Donc toute catégorie monoïdale est équivalente à une catégorie monoïdale stricte (via des foncteurs monoïdaux forts).

Démonstration.

- On définit la catégorie monoïdale stricte $\mathscr{S}$ comme le monoïde libre sur $\mathscr{M}$ défini à la section I.3. Ses objets sont donc les mots $s = [b_1, \dots, b_k]$, dont les lettres sont des objets de $\mathscr{M}$, y compris le mot vide $\varnothing$. On définit un produit sur les objets, donné par la concaténation et noté $s \cdot t$. Il est clairement associatif et admet $\varnothing$ comme élément neutre, donc les applications α, λ et ρ usuelles sont ici égales à l'identité.
- On va maintenant définir les flèches de $\mathscr{S}$, mais pour cela on introduit une fonction $F : \mathscr{S} \to \mathscr{M}$ donnée par $F(\varnothing) = e$ et

  $$F(s) = F([b_1, \dots, b_k]) = \big((b_1 \square b_2) \square \cdots \square b_k\big)$$

  On définit alors les flèches $s \to t$ dans $\mathscr{S}$ comme étant exactement les flèches $F(s) \to F(t)$ dans $\mathscr{M}$ (il y en a 0 ou 1 pour chaque couple (s, t) par le théorème de cohérence I.2). La composition dans $\mathscr{S}$ est issue de celle dans $\mathscr{M}$, ce qui fait de $\mathscr{S}$ une catégorie.
- Finalement, si $f : s \to t$ et $g : u \to v$ sont deux flèches dans $\mathscr{S}$, on définit leur produit $f \cdot g$ par la flèche associée à la composée

  $$F(s \cdot u) \xrightarrow{can} F(s) \square F(u) \xrightarrow{f \square g} F(t) \square F(v) \xrightarrow{can} F(t \cdot v)$$

  où $f : F(s) \to F(t)$ et $g : F(u) \to F(v)$ sont vues dans $\mathscr{M}$. Or les flèches f et g dans $\mathscr{M}$ sont canoniques, donc $f \cdot g$ aussi par composition et $\square$-produit, ainsi que $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$. Le produit est donc aussi associatif sur les flèches, et il se comporte clairement bien avec la flèche identité. Ceci montre que la catégorie $\mathscr{S}$ est monoïdale stricte.

- On pose ensuite F_0 la fonction identité $e \to e$ et $F_2(s,t) : F(s) \square F(t) \to F(s \cdot t)$ l'unique flèche entre ces deux objets de $\mathscr{M}$ (l'isomorphisme canonique qui ramène toutes les parenthèses au début). Le théorème de cohérence I.2 permet de vérifier que (F, F_0, F_2) est un foncteur monoïdal car chaque diagramme compare deux flèches canoniques de $\mathscr{M}$, et il est clairement fort.
- On définit alors le foncteur $G : \mathscr{M} \to \mathscr{S}$ sur les objets $b \in \mathscr{M}$ par $G(b) := [b]$, et sur les flèches par $G(f) = f$ l'unique flèche de $\mathscr{S}$ associée à f. C'est clairement un foncteur, et on a la relation $G(b) \cdot G(c) = [b] \cdot [c] = [b,c]$. On peut alors définir $G_0 : \varnothing \to [e]$ comme la flèche identité associée à $id : F(\varnothing) = e \to e = F([e])$. On pose de même $G_2(b,c) : [b,c] \to [b \square c]$ la flèche identité associée à l'application $id : F([b,c]) = b \square c \to b \square c = F([b \square c])$. On remarque que G_0 et $G_2(b,c)$ sont associées à des applications canoniques et donc sont des isomorphismes.
- On vérifie enfin que G est un foncteur monoïdal fort. Il reste uniquement la commutativité du diagramme hexagonal à vérifier, les deux autres étant clairs (on a $G_2 = \lambda' = \rho' = id$, et l'application restante $G(\rho) \circ (id \square G_0)$ va de $[b] = G(b) \cdot \varnothing$ dans $[b] = G(b)$, donc est l'identité). On a $F_2 = \alpha' = id$ donc le diagramme hexagonal se réduit à

$$\begin{tikzcd}
G(a) \cdot \big(G(b) \cdot G(c)\big) \arrow[r, "id"] \arrow[d, "id \cdot G_2"'] & \big(G(a) \cdot G(b)\big) \cdot G(c) \arrow[r, "G_2 \cdot id"] & G(a \square b) \cdot G(c) \arrow[d, "id"] \\
G(a) \cdot G(b \square c) \arrow[r, "id"] & G\big(a \square (b \square c)\big) \arrow[r, "G(\alpha)"] & G\big((a \square b) \square c\big)
\end{tikzcd},$$

qui se ré-écrit

$$\begin{tikzcd}
{[a,b,c]} \arrow[r, "id"] \arrow[d, "id \cdot G_2"'] & {[a,b,c]} \arrow[r, "G_2 \cdot id"] & {[a \square b, c]} \arrow[d, "id"] \\
{[a, b \square c]} \arrow[r, "id"] & {[a \square (b \square c)]} \arrow[r, "G(\alpha)"] & {[(a \square b) \square c]}
\end{tikzcd}.$$

On voit ainsi que la flèche $G(\alpha)$ de $\mathscr{S}$ correspond à l'application dans $\mathscr{M}$:

$$\alpha : a \square (b \square c) \to (a \square b) \square c,$$

que la flèche $id \cdot G_2$ de $\mathscr{S}$ correspond à l'application (dans $\mathscr{M}$) :

$$\alpha^{-1} : (a \square b) \square c = G([a,b,c]) \to G([a, b \square c]) = a \square (b \square c),$$

et que la flèche $G_2 \cdot id$ de $\mathscr{S}$ correspond à l'application :

$$id : G([a \square b, c]) = (a \square b) \square c \to (a \square b) \square c = G([(a \square b) \square c])$$

Le diagramme est donc commutatif, et (G, G_0, G_2) est un foncteur monoïdal fort.

- Il ne reste plus qu'à vérifier que F et G sont des équivalences de catégories ce qui achèvera la preuve. Si $b \in \mathscr{M}$ est un mot, on a

$$F \circ G(b) = F([b]) = b$$

donc $F \circ G$ est l'identité. A l'inverse, si $s = [b_1, \ldots, b_k]$ est un objet de $\mathscr{S}$ alors on a

$$G \circ F(s) = G\big((b_1 \square b_2) \square \cdots \square b_k)\big) = \big[(b_1 \square b_2) \square \cdots \square b_k)\big]$$

Donc $G \circ F$ n'est pas l'identité, mais on a

$$F\big(G \circ F(s)\big) = F\big(\big[(b_1 \square b_2) \square \cdots \square b_k)\big]\big) = ((b_1 \square b_2) \square \cdots \square b_k) = F\big(s\big)$$

Donc on a un isomorphisme naturel $G \circ F(s) \to s$ dans $\mathscr{S}$ correspondant à l'isomorphisme $id : F\big(G \circ F(s)\big) \to F\big(s\big)$ dans $\mathscr{M}$, ce qui achève la preuve.

$\square$

Théoreme I.10 (de cohérence). *Si $\mathscr{M}$ est une catégorie monoïdale alors tout diagramme de $\mathscr{M}$ qui utilise uniquement $id, \alpha, \lambda, \rho$ et $\square$ commute.*

Remarque. On montre ce théorème pour une catégorie monoïdale équivalente à une catégorie monoïdale stricte via des foncteurs monoïdaux forts, ce qui donne une deuxième démonstration du théorème de cohérence dans ce cas. Mais en fait, d'après le théorème précédent, cette hypothèse est toujours vérifiée par une catégorie monoïdale donc on peut conclure dans le cas général. Cependant cette démonstration du théorème de cohérence ne peut pas remplacer la première car on l'utilise de manière cruciale pour montrer que l'hypothèse est toujours vérifiée dans la démonstration du théorème précédent.

Démonstration. Soient $v, w \in W$ deux mots binaires de longueur n, on considère $\theta, \delta : v \to w$ deux transformations naturelles entre les foncteurs associés à ces deux mots, construites uniquement par composition et $\square$-produit de α, λ, ρ et id. Plus précisément, on note $\theta^{(\mathscr{M})}$, $\delta^{(\mathscr{M})}$ les transformations naturelles entre les foncteurs $v, w : \mathscr{M}^n \to \mathscr{M}$ associés aux mots v et w dans $\mathscr{M}$, et $\theta^{(\mathscr{S})}$, $\delta^{(\mathscr{S})}$ celles entre les foncteurs $v, w : \mathscr{S}^n \to \mathscr{S}$. Le but est de montrer que $\theta^{(\mathscr{M})} = \delta^{(\mathscr{M})}$ ce qui redonnera le théorème de cohérence I.2.

On note $(G, G_0, G_2) : \mathscr{M} \to \mathscr{S}$ et $(F, F_0, F_2) : \mathscr{S} \to \mathscr{M}$ les foncteurs monoïdaux forts réalisant une équivalence de catégorie entre $\mathscr{M}$ et $\mathscr{S}$. On peut alors construire les transformations naturelles $G_v : v \circ G \to G \circ v$ et $G_w : w \circ G \to G \circ w$ comme dans la remarque de la partie I.6 (par récurrence à partir de G_0 et G_2). On a alors vu que les deux diagrammes suivants commutent (on remplace $can_{\mathscr{M}'}(v, w)$ par θ et δ qui sont aussi construites uniquement à l'aide de α, λ et ρ) :

$$\begin{tikzcd}
v\big(G(a_1), \dots, G(a_n)\big) \arrow[r, "G_v"] \arrow[d, "\theta^{(\mathscr{S})}\left(G(a_1),\dots,G(a_n)\right)"'] & G \circ v\big(a_1, \dots, a_n\big) \arrow[d, "G\circ\theta^{(\mathscr{M})}(a_1,\dots,a_n)"] \\
w\big(G(a_1), \dots, G(a_n)\big) \arrow[r, "G_w"] & G \circ w\big(a_1, \dots, a_n\big)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
v\big(G(a_1), \dots, G(a_n)\big) \arrow[r, "G_v"] \arrow[d, "\delta^{(\mathscr{S})}\left(G(a_1),\dots,G(a_n)\right)"'] & G \circ v\big(a_1, \dots, a_n\big) \arrow[d, "G\circ\delta^{(\mathscr{M})}(a_1,\dots,a_n)"] \\
w\big(G(a_1), \dots, G(a_n)\big) \arrow[r, "G_w"] & G \circ w\big(a_1, \dots, a_n\big)
\end{tikzcd}$$

Or θ et δ sont construite à partir de α, λ et ρ qui valent toutes l'identité dans $\mathscr{S}$ qui est stricte, donc on a $\delta^{(\mathscr{S})} = \theta^{(\mathscr{S})}$. Mais G_v et G_w sont des isomorphismes, donc les diagrammes donnent alors l'égalité fonctorielle

$$G \circ \theta^{(\mathscr{M})} = G \circ \delta^{(\mathscr{M})}, \quad \text{d'où} \quad F \circ G \circ \theta^{(\mathscr{M})} = F \circ G \circ \delta^{(\mathscr{M})}.$$

Or il existe une équivalence naturelle $\eta : F \circ G \to Id$ qui donne l'égalité fonctorielle $\eta \circ F \circ G = Id$. Ceci permet de conclure $\theta^{(\mathscr{M})} = \delta^{(\mathscr{M})}$ □

II Différents modèles de la catégorie monoïdale Σ-Mod

II.1 La catégorie $\mathbf{Rep}(S_*)$

Définition. La catégorie $\mathbf{Rep}(S_*)$ est définie comme suit :

- Ses objets sont des suites $V = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où chaque V_n est une représentation linéaire du groupe symétrique S_n (avec la convention $S_0 = S_1 = \{1\}$),
- Les morphismes entre deux objets $V = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $W = (W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où chaque f_n est un opérateur d'entrelacement (*ie :* morphisme de représentations) entre V_n et W_n.

Lemme II.1. *C'est une catégorie abélienne (additive) et les produits, coproduits, noyaux, conoyaux, sommes directes sont calculés degré par degré. Par exemple,* $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}\big((f_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = \big(\ \mathrm{ker}(f_n)\ \big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque. On rappelle que si $H \subset G$ est un sous-groupe alors pour (ρ, F) une représentation de H on peut définir une représentation de G induite par ρ notée

$$(\pi, E) = \mathrm{Ind}_H^G\big((\rho, F)\big).$$

Elle est définie comme suit :

Puisque ρ est une représentation de H on a une action (linéaire) de H sur F que l'on peut étendre en une action de $\mathbb{C}[H]$ sur F par linéarité. Ceci muni F d'une structure de $\mathbb{C}[H]$-module. On pose alors

$$E := \mathbb{C}[G] \bigotimes_{\mathbb{C}[H]} F$$

Cet espace est naturellement un $\mathbb{C}[G]$-module ce qui donne une représentation π de G qui à tout élément g de G lui associe le morphisme

$$\begin{array}{cccc} \pi(g) & : & \mathbb{C}[G] \underset{\mathbb{C}[H]}{\otimes} F & \to & \mathbb{C}[G] \underset{\mathbb{C}[H]}{\otimes} F \\ & & x \otimes y & \mapsto & (g\cdot x)\otimes y \end{array}.$$

On a alors les propriétés suivantes :

— Pour $h \in H$ on a

$$\pi(h)|_F \cong \rho(h)$$

car $\pi(h)|_F(x) = h \otimes x = 1 \otimes (h \cdot x) = 1 \otimes \big(\rho(h)(x)\big)$.

— Pour toute représentation σ de G on a l'isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_G\left(\mathrm{Ind}_H^G(\rho), \sigma\right) \cong \mathrm{Hom}_H\left(\rho, \mathrm{Res}_H^G(\sigma)\right)$$

— Pour ρ_1 et ρ_2 deux représentations de H on a l'égalité

$$\mathrm{Ind}_H^G(\rho_1 \oplus \rho_2) = \mathrm{Ind}_H^G(\rho_1) \oplus \mathrm{Ind}_H^G(\rho_2).$$

Définition. Si V et W sont deux objets de $\mathbf{Rep}(S_*)$, on peut définir leur produit tensoriel

$$V \otimes W = \big(\ (V \otimes W)_n\ \big)_{n\in\mathbb{N}}$$

par

$$\big(V \otimes W\big)_n := \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Ind}_{S_i\times S_j}^{S_n}(V_i \otimes W_j)$$

En effet, V_i est une représentation de S_i et W_j de S_j, on peut alors étendre $V_i \otimes W_j$ (qui est une représentation de $S_i \times S_j$) en une représentation de S_n. On note de plus $\mathbb{C}_0$ l'objet de $\mathbf{Rep}(S_*)$ donné par

$$(\mathbb{C}_0)_n = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Proposition II.2. *Le triplet* $\big(\ \mathbf{Rep}(S_*), \otimes, \mathbb{C}_0\ \big)$ *ainsi défini forme une catégorie monoïdale.*

Proposition II.3. *On rappelle qu'une partition* λ *est une suite décroissante d'entiers positifs* $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ *et on dit que c'est une partition de l'entier* k *si* $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = k$. *Si le corps de base est de caractéristique nulle, pour* k *un entier et* λ *une partition de* k *on a une représentation irréductible* M_λ *de* S_k *associée par dualité de Schur-Weyl.*

Démonstration. C'est admis ici, pour une démonstration se référer à [SS12]. □

Remarque. Les objets simples de $\mathbf{Rep}(S_*)$ sont les suites $V = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que V_n soit nul pour tout entier sauf un, et telle que pour cet entier n, V_n soit une représentation irréductible de S_n. Or, par dualité de Schur-Weyl, on sait que les classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de S_n sont en bijection avec les partitions de n. De plus, tout objet de $\mathbf{Rep}(S_*)$ se décompose en somme directe de simples car le corps de base est de caractéristique nulle. On en conclut que les classes d'isomorphismes de simples dans $\mathbf{Rep}(S_*)$ sont en bijection avec les partitions.

II.2 La catégorie $\mathbf{Fonct}\big(\mathbf{\Sigma}\,,\,\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\big)$ ou $\mathbf{\Sigma}$-Mod

Définition. On définit :

- $\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$ la catégorie dont les objets sont les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels et les morphismes sont les applications linéaires.

- $\mathbf{\Sigma}$ la catégorie dont les objets sont les ensembles finis et les morphismes sont les bijections entre ces ensembles.

- $\mathbf{Fonct}\big(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\big)$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs de $\mathbf{\Sigma}$ vers $\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$ et les morphismes sont les transformations naturelles entre ces foncteurs. Elle est aussi parfois appelée la catégorie des foncteurs sur $\mathbf{\Sigma}$ et notée $\mathbf{\Sigma}$-$\mathbf{Mod}_{\mathbb{C}}$, et ses objets sont appelés des $\mathbf{\Sigma}$-modules.

Lemme II.4. *Un objet de* $\mathbf{Fonct}\big(\mathbf{\Sigma}\,,\,\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\big)$ *est donc un foncteur V qui associe à chaque ensemble fini S un espace vectoriel $V(S)$ et à chaque bijection entre ensembles finis $f : S \to S'$ un isomorphisme $V(f) : V(S) \to V(S')$, telle que pour tout isomorphismes $g : S \to S'$ et $f : S' \to S''$ on ait la relation $V(f \circ g) = V(f) \circ V(g)$.*
De même, un morphisme $\phi : V \to W$ dans $\mathbf{Fonct}\big(\mathbf{\Sigma}\,,\,\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\big)$ *est une loi qui associe à tout ensemble fini S une application linéaire $\phi_S : V(S) \to W(S)$ telle que pour toute bijection $f : S \to S'$ le diagramme de naturalité suivant commute :*

$$\begin{array}{ccccc} S & & V(S) & \xrightarrow{\phi_S} & W(S) \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & {\scriptstyle V(f)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle W(f)} \\ S' & & V(S') & \xrightarrow[\phi_{S'}]{} & W(S') \end{array}$$

Exemple. Si M est un $\mathbb{C}$-module et n un entier, on définit un objet $M^{(n)}$ de $\mathbf{Fonct}\big(\mathbf{\Sigma}\,,\,\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\big)$ sur les objets par :

$$\begin{array}{cccc} M^{(n)} & : & \mathbf{\Sigma} & \to & \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} \\ & & S & \mapsto & \begin{cases} M & \text{si } |S| = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array},$$

et toute flèche $f : S \to S'$ dans $\mathbf{\Sigma}$ (*ie :* bijection) s'envoie sur l'identité de M si le cardinal commun de S et S' est n, et sur l'identité de 0 sinon.

Proposition II.5. *Les catégories $\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$ et* $\mathbf{Fonct}\big(\mathbf{\Sigma}\,,\,\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\big)$ *sont abéliennes.*

Démonstration. La catégorie $\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$ est une catégorie classiquement abélienne (algèbre linéaire) et pour la deuxième c'est une catégorie de foncteurs à valeurs dans une catégorie abélienne donc elle est abélienne. □

Proposition II.6. *On peut adopter le point de vue des représentations dans cette catégorie :*

- *Si V est un objet de* $\mathbf{Fonct}\big(\mathbf{\Sigma}\,,\,\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\big)$ *alors pour tout ensemble fini S l'espace vectoriel $V(S)$ peut être vu comme une représentation du groupe* $\mathrm{Aut}(S)$

- *Si $\phi : V \to W$ est un morphisme de* $\mathbf{Fonct}\big(\mathbf{\Sigma}\,,\,\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\big)$ *alors pour tout ensemble fini S on peut voir l'application linéaire $\phi_S : V(S) \to W(S)$ comme un opérateur d'entrelacement entre les représentations $V(S)$ et $W(S)$ du groupe* $\mathrm{Aut}(S)$.

Démonstration. Si $f \in \mathrm{Aut}(S)$ alors c'est une bijection de S dans S, donc c'est une flèche dans $\mathbf{\Sigma}$. On peut alors lui appliquer le foncteur V et on obtient un isomorphisme $V(f) : V(S) \to V(S)$. Cette construction permet de définir l'application $\tilde{V}$ associée au foncteur V par

$$\begin{array}{cccc} \tilde{V} & : & \mathrm{Aut}(S) & \to & \mathrm{GL}\big(V(S)\big) \\ & & f & \mapsto & V(f) \end{array}$$

Puisque V est un foncteur on a $V(f \circ g) = V(f) \circ V(g)$ et donc $\tilde{V}$ est un morphisme de groupes, ce qui donne bien une représentation de $\mathrm{Aut}(S)$. De plus si $f \in \mathrm{Aut}(S)$, le diagramme suivant commute par naturalité de ϕ :

$$\begin{tikzcd} V(S) \arrow[r, "\phi_S"] \arrow[d, "V(f)=\tilde{V}(f)"'] & W(S) \arrow[d, "W(f)=\tilde{W}(f)"] \\ V(S) \arrow[r, "\phi_S"'] & W(S) \end{tikzcd}$$

Ceci donne l'égalité $\tilde{W}(f) \circ \phi_S = \phi_S \circ \tilde{V}(f)$ pour tout $f \in \mathrm{Aut}(S)$ et donc on a bien un opérateur d'entrelacement. $\square$

Remarque. Les objets simples de $\mathbf{Fonct}\big(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\big)$ sont les foncteurs F tels que $F(S)$ soit nul pour tout ensemble fini S sauf pour un cardinal n fixé, et tel que pour les ensembles S de cardinaux n, $F(S)$ soit une représentation irréductible de $\mathrm{Aut}(S)$. On remarque qu'il suffit que la représentation $F([n])$ de $\mathrm{Aut}([n]) = S_n$ soit irréductible car si on considère un autre ensemble S de cardinal n, en fixant une bijection $\sigma : S \to [n]$, on obtient un isomorphisme de représentations $F(\sigma) : F(S) \to F([n])$. On peut alors voir que tout objet se décompose en somme directe de simples, et que les classes d'isomorphismes de simples de $\mathbf{Fonct}\big(\mathbf{\Sigma}\,,\ \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\big)$ sont en bijection avec les partitions car elles correspondent aux représentations irréductibles de $\mathrm{Aut}([n]) = S_n$ pour un entier n quelconque.

Théoreme II.7. *Les catégories abéliennes $\boldsymbol{Rep}(S_*)$ et $\mathbf{Fonct}\big(\mathbf{\Sigma}\,,\ \boldsymbol{Vec}_{\mathbb{C}}\big)$ sont équivalentes via le foncteur*

$$\begin{array}{ccc} G: & \mathbf{Fonct}\big(\mathbf{\Sigma}\,,\ \boldsymbol{Vec}_{\mathbb{C}}\big) \longrightarrow \boldsymbol{Rep}(S_*) \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"'] & \big(\,V(\,[n]\,)\,\big)_{n\in\mathbb{N}} \arrow[d, "\big(\sigma_{[n]}\big)_{n\in\mathbb{N}}"] \\ W \arrow[r] & \big(\,W(\,[n]\,)\,\big)_{n\in\mathbb{N}} \end{tikzcd}$$

où $[n]$ est l'objet $\{1,\dots,n\}$ de $\mathbf{\Sigma}$ et $V(\,[n]\,)$ est vu comme représentation de $\mathrm{Aut}([n]) = S_n$ comme dans la proposition ci-dessus.

Démonstration.

i) Tout d'abord G est bien un foncteur :

Si $\tau \circ \sigma : V \to V' \to V''$ est une composée de flèches dans $\mathbf{Fonct}\big(\mathbf{\Sigma}\,,\ \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\big)$ alors par définition de $\tau \circ \sigma$ on a pour tout ensemble fini S l'égalité

$$(\tau \circ \sigma)_S = \tau_S \circ \sigma_S : V(S) \to V'(S) \to V''(S).$$

En appliquant ceci à l'ensemble $[n]$ pour $n \in \mathbb{N}$ on a bien

$$\big((\tau \circ \sigma)_{[n]}\big)_{n\in\mathbb{N}} = \big(\tau_{[n]}\big)_{n\in\mathbb{N}} \circ \big(\sigma_{[n]}\big)_{n\in\mathbb{N}} : \big(V(\,[n]\,)\big)_{n\in\mathbb{N}} \to \big(V'(\,[n]\,)\big)_{n\in\mathbb{N}} \to \big(V''(\,[n]\,)\big)_{n\in\mathbb{N}}.$$

ii) On définit alors un foncteur dans l'autre sens, d'abord sur les objets par

$$\begin{array}{ccccc} H & : & \mathbf{Rep}(S_*) & \to & \mathbf{Fonct}\big(\mathbf{\Sigma}\,,\ \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\big) \\ & & U = \big(U_n\big)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \varphi^U : \big(S \mapsto U_{|S|}\big) \end{array}$$

Mais il faut encore définir le foncteur φ^U sur les flèches.

Pour cela on commence par choisir pour chaque ensemble fini S une bijection $g_S : S \to [|S|]$ (il n'y a qu'un nombre fini de choix possible). Ensuite on considère une flèche $f : S \to S'$ de $\mathbf{\Sigma}$, c'est-à-dire une bijection entre deux ensembles finis et on note m le cardinal commun de S et S'. Alors la composée $g_{S'} \circ f \circ (g_S)^{-1}$ est une bijection de $[m]$ dans lui-même, donc c'est un élément de S_m. Alors le morphisme de la représentation U_m envoie l'élément $g_{S'} \circ f \circ (g_S)^{-1}$ de S_m sur un isomorphisme θ_f^U de U_m.

On définit alors

$$\varphi^U(f) := \theta_f^U$$

et φ^U est bien un foncteur car on a l'identité

$$(g_{S''} \circ f \circ (g_{S'})^{-1}) \circ (g_{S'} \circ f' \circ (g_S)^{-1}) = g_{S''} \circ (f \circ f') \circ (g_S)^{-1}$$

d'où $\theta_f^U \circ \theta_{f'}^U = \theta_{f \circ f'}^U$ par fonctorialité.

iii) On peut alors définir le foncteur H sur les flèches : l'image par H de la suite d'opérateurs d'entrelacement $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}} : V = (V_n)_{n\in\mathbb{N}} \to (W_n)_{n\in\mathbb{N}} = W$ est la transformation naturelle $\tau : \varphi^V \to \varphi^W$ définie par

$$\tau_S := \sigma_{|S|} : V_{|S|} \to W_{|W|}$$

La transformation τ est bien naturelle car $\sigma_{|S|}$ est un opérateur d'entrelacement ce qui donne le diagramme commutatif associé à l'élément $g_{S'} \circ f \circ (g_S)^{-1}$:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[d, "f"'] & V_{|S|} \arrow[rr, "\tau_S=\sigma_{|S|}"] \arrow[d, "\theta_f^V"'] & & W_{|S|} \arrow[d, "\theta_f^W"] \\ S' & V_{|S'|} = V_{|S|} \arrow[rr, "\tau'_S=\sigma_{|S|}"'] & & W_{|S'|} = W_{|S|} \end{tikzcd} .$$

iv) Il est alors clair que H est bien un foncteur et on peut vérifier que G et H forment des équivalences des catégories :

- Si $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un objet de $\mathbf{Rep}(S*)$ on a l'égalité

$$G \circ H\big((V_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = G(\varphi^V) = \big(\varphi^V_{[n]}\big)_{n\in\mathbb{N}} = \big(V_{|[n]|}\big)_{n\in\mathbb{N}} = \big(V_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

Ce qui donne bien $G \circ H = \mathrm{Id}_{\mathbf{Rep}(S*)}$

- Si V est un objet de $\mathbf{Fonct}\big(\mathbf{\Sigma}\,,\,\mathbf{Vec}_\mathbb{C}\big)$ alors

$$H \circ G(V) = H\big(\ V(\ [n]\ )\ )_{n\in\mathbb{N}}\big) = \varphi^{(\,V(\,[n]\,)\,)_{n\in\mathbb{N}}}$$

est le foncteur qui envoie tout ensemble fini S sur $V(\ [|S|]\ )$. On cherche alors à définir une équivalence naturelle σ entre les foncteurs V et $H \circ G(V)$. Pour cela on considère pour chaque ensemble fini S la bijection $g_S : S \to [|S|]$ choisie pour définir H et on pose

$$\sigma_S := V(g_s) : V(S) \to V(\ [|S|]\ )$$

Cette dernière est bien bijective car g_S l'est, il reste à montrer que σ est naturelle. Si $f : S \to S'$ est une flèche dans $\mathbf{\Sigma}$, par définition on a

$$H \circ G(V)(f) = \varphi^{G(V)}(f) = \theta_f^{G(V)} = \tilde{V}(g_{S'} \circ f \circ (g_S)^{-1}) = V(g_{S'} \circ f \circ (g_S)^{-1})$$

Donc le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} S \arrow[d, "f"'] & V(S) \arrow[r, "\sigma_S=V(g_S)"] \arrow[d, "V(f)"'] & V(\ [|S|]\ ) = H \circ G(V)(S) \arrow[d, "V(g_{S'}\circ f\circ(g_S)^{-1})=H\circ G(f)"] \\ S' & V(S') \arrow[r, "\sigma_{S'}=V(g_{S'})"'] & V(\ [|S'|]\ ) = H \circ G(V)(S') \end{tikzcd}$$

Finalement σ est bien une équivalence naturelle et donc on a $H \circ G \simeq \mathrm{Id}_{\mathbf{Fonct}\left(\mathbf{\Sigma}\,,\,\mathbf{Vec}_\mathbb{C}\right)}$.

$\square$

Définition. Si V et W sont deux objets de $\mathbf{Fonct}\big(\mathbf{\Sigma}\,,\ \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\big)$, on peut définir leur produit tensoriel $V\otimes W$ comme étant le foncteur qui associe à tout ensemble fini S l'espace vectoriel

$$(V\otimes W)(S) \coloneqq \bigoplus_{S=X\uplus Y} V(X)\otimes_{\mathbb{C}} W(Y)$$

où $X\uplus Y$ désigne l'union disjointe des deux ensembles. De plus, si on considère une bijection $f:S\to S'$, l'application linéaire

$$(V\otimes X)(f): \bigoplus_{S=X\uplus Y} V(X)\otimes_{\mathbb{C}} W(Y) \to \bigoplus_{S'=X'\uplus Y'} V(X')\otimes_{\mathbb{C}} W(Y')$$

envoi simplement le facteur direct $V(X)\otimes_{\mathbb{C}} W(Y)$ sur le facteur $V(\,f(X)\,)\otimes_{\mathbb{C}} W(\,f(Y)\,)$.

Proposition II.8. *Le triplet* $\big(\mathbf{Fonct}\big(\mathbf{\Sigma},\ \boldsymbol{Vec}_{\mathbb{C}}\big),\otimes,\mathbb{C}^{(0)}\big)$, *où* $\mathbb{C}^{(0)}$ *est le foncteur défini page 25, forme une catégorie monoïdale. De plus, les foncteurs G et H respectent le produit tensoriel et forment donc une équivalence de catégories monoïdales.*

Démonstration. On montre que les foncteurs G et H qui réalisent l'équivalence de catégories respectent le produit tensoriel, à isomorphisme prés. Commençons par le foncteur G :
Si V et W sont deux objets de la catégorie $\mathbf{Fonct}\big(\mathbf{\Sigma},\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\big)$ alors ce sont des foncteurs de $\mathbf{\Sigma}$ vers $\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$ et on a d'une part

$$\begin{aligned}
G(V\otimes W) &= G\begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma} & \to & \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} \\ S & \mapsto & \bigoplus_{S=X\uplus Y}\big(V(X)\otimes W(Y)\big)\end{pmatrix} \\
&= \Big(\bigoplus_{[n]=X\uplus Y}\big(V(X)\otimes W(Y)\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= \Big(\bigoplus_{n=i+j}\big(V([i])\otimes W([j])\big)^{\oplus\binom{n}{i}}\Big)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= \Big(\bigoplus_{k=n+m}\big(V([n])\otimes W([m])\big)^{\oplus\binom{k}{n}}\Big)_{k\in\mathbb{N}}.
\end{aligned}$$

D'autre part on a les égalités

$$\begin{aligned}
G(V)\otimes G(W) &= \big(V([n])\big)_{n\in\mathbb{N}}\otimes\big(W([m])\big)_{m\in\mathbb{N}} \\
&= \Big(\bigoplus_{n+m=k}\mathrm{Ind}_{S_n\times S_m}^{S_k}\big(V([n])\otimes W([m])\big)\Big)_{k\in\mathbb{N}} \\
&= \Big(\bigoplus_{n+m=k}\mathbb{C}[S_k]\bigotimes_{\mathbb{C}[S_n\times S_m]}\big(V([n])\otimes W([m])\big)\Big)_{k\in\mathbb{N}}.
\end{aligned}$$

De plus, le sous-groupe $S_n\times S_m$ est d'indice $\binom{k}{n}$ dans S_k et, par le choix d'un représentant pour chaque classe, on obtient un isomorphisme

$$\mathbb{C}[S_k]\bigotimes_{\mathbb{C}[S_n\times S_m]}\big(V([n])\otimes W([m])\big) \cong \big(V([n])\otimes W([m])\big)^{\oplus\binom{k}{n}}.$$

Ceci définit donc bien un isomorphisme

$$G(V\otimes W) \cong G(V)\otimes G(W).$$

On refait ensuite le même travail pour le foncteur H :
Si $U=(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $T=(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sont deux objets de $\mathbf{Rep}(S_*)$ on a les égalités

$$\begin{aligned}
H(U\otimes T) &= H\Big(\big((U\otimes T)_n\big)_{n\in\mathbb{N}}\Big) \\
&= H\Big(\big(\bigoplus_{i+j=n}\mathrm{Ind}_{S_i\times S_j}^{S_n}(U_i\otimes T_j)\big)_{n\in\mathbb{N}}\Big) \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma} & \to & \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} \\ E & \mapsto & \bigoplus_{i+j=|E|}\mathrm{Ind}_{S_i\times S_j}^{S_{|E|}}(U_i\otimes T_j)\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Mais on a aussi les identités

$$\begin{aligned}
H(U)\otimes H(T) &= \varphi^U \otimes \varphi^T \\
&= \left(\begin{array}{ccc} \boldsymbol{\Sigma} & \to & \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} \\ E & \mapsto & \bigoplus_{E=X\cup Y} \left(\varphi^U(X)\otimes\varphi^T(Y)\right) \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{ccc} \boldsymbol{\Sigma} & \to & \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} \\ E & \mapsto & \bigoplus_{E=X\cup Y} \left(U_{|X|}\otimes T_{|Y|}\right) \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Pour un ensemble E de cardinal n on a alors les deux égalités :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} H(U\otimes T)\,(E) & = & \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Ind}_{S_i\times S_j}^{S_n}(U_i\otimes T_j) \\ \big(H(U)\otimes H(T)\big)\,(E) & = & \bigoplus_{n=i+j} \left(U_i\otimes T_j\right)^{\oplus\binom{n}{i}} \end{array} \right. .$$

On construit alors un isomorphisme entre $H(U\otimes T)\,(E)$ et $\big(H(U)\otimes H(T)\big)\,(E)$ comme pour le foncteur G qui est naturel car il ne dépend que du cardinal de l'ensemble E. Cela permet de conclure en donnant un isomorphisme naturel entre les foncteurs

$$H(U\otimes T) \;\cong\; H(U)\otimes H(T).$$

□

II.3 La catégorie $\mathbf{Rep}^{\mathrm{pol}}(\mathrm{GL})$

On veut définir l'espace vectoriel $\mathbb{C}^\infty$ comme "union croissante" des espaces $\mathbb{C}^n$ et le groupe $\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{C})$ comme "union croissante" des groupes $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$.

Définition. On définit le foncteur $F:\mathbb{N}^*\to\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$ qui envoie n sur $\mathbb{C}^n$ et le morphisme $n\to m$ (qui correspond à la relation $n\le m$) sur l'inclusion canonique $\mathbb{C}^n\hookrightarrow\mathbb{C}^m$. De même, on définit le foncteur $G:\mathbb{N}^*\to\mathbf{Gr}$ qui associe à n le groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ et à la flèche $n\to m$ l'inclusion $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\hookrightarrow\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$. On définit alors $\mathbb{C}^\infty$ comme la colimite du foncteur F et $\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{C})$ comme la colimite du foncteur G.

Proposition II.9. *L'espace vectoriel $\mathbb{C}^\infty$ est l'espace vectoriel de base les vecteurs abstraits $e_i=(0,\dots,0,1,0,0,\dots)$ pour $i\in\mathbb{N}^*$, et le groupe $\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{C})$ est le sous groupe de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^\infty)$ des éléments g tels que $g(e_i)=e_i$ pour i assez grand.*

Démonstration. On note $E=\mathrm{Vect}\big((e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}\big)$ et i_n l'inclusion canonique de $\mathbb{C}^n$ dans E. Montrons que $\big(E,\{i_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\big)$ est la colimite du foncteur F. On aura alors prouvé la première affirmation, la deuxième se montre de manière analogue.

i) On a bien $E\in\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ (la catégorie de départ) l'application i_n est bien une flèche de $\mathbb{C}^n=F(n)$ vers E dans $\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$.

ii) Si $f:n\to m$ est une flèche dans $\mathbb{N}^*$ on a $n\le m$ et $F(f)$ est l'inclusion $\mathbb{C}^n\hookrightarrow\mathbb{C}^m$. Alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
F(n)=\mathbb{C}^n \arrow[d, hook, "F(f)"'] \arrow[dr, hook, "i_n"] & \\
F(m)=\mathbb{C}^m \arrow[r, hook, "i_m"'] & E
\end{tikzcd}$$

iii) Si on a un espace vectoriel $D\in\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ des applications $v_n:F(n)=\mathbb{C}^n\to D$ telles que pour toute flèche $f:n\to m$ on ait le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
F(n)=\mathbb{C}^n \arrow[d, hook, "F(f)"'] \arrow[dr, "v_n"] & \\
F(m)=\mathbb{C}^m \arrow[r, "v_m"'] & D
\end{tikzcd}$$

alors on a $n \le m$ et $(v_m)|_{\mathbb{C}^n} = v_n$. On définit une application linéaire $\alpha : E \to D$ sur une base de E par $\alpha(e_i) = v_i(e_i)$ pour $i \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} F(n) = \mathbb{C}^n \arrow[r, hook, "i_n"] \arrow[dr, "v_n"'] & E \arrow[d, "\alpha"] \\ & D \end{tikzcd}$$

car pour $k \le n$ on a les égalités

$$\alpha \circ i_n(e_k) = \alpha(e_k) = v_k(e_k) = \big((v_n)|_{\mathbb{C}^k}\big)(e_k) = v_n(e_k)$$

□

Définition. Si k est un entier, $(\mathbb{C}^\infty)^{\otimes k}$ est une représentation de $\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C})$ via l'action diagonale

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C}) \times (\mathbb{C}^\infty)^{\otimes k} & \to & (\mathbb{C}^\infty)^{\otimes k} \\ (M\ ,\ x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) & \mapsto & (Mx_1) \otimes \cdots \otimes (Mx_k). \end{array}$$

On définit alors la catégorie $\mathbf{Rep}^{\mathrm{pol}}(\mathrm{GL})$:

- Ses objets sont les représentations de $\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C})$ polynomiales, c'est-à-dire qui sont des sous-quotients d'une somme directe (finie ou non) de représentations du type $(\mathbb{C}^\infty)^{\otimes k}$,
- Ses flèches sont les opérateurs d'entrelacement entre ces représentations de $\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C})$.

Remarque. C'est par définition une catégorie abélienne.

Proposition II.10. *L'espace vectoriel des opérateurs d'entrelacement*

$$V_\lambda := \mathrm{Hom}_{S_k}(M_\lambda, (\mathbb{C}^\infty)^{\otimes k})$$

est une représentation polynomiale de $\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C})$*, donc un objet de* $\boldsymbol{Rep}^{\mathrm{pol}}(\mathrm{GL})$*. De plus, cet objet est simple, et tout objet de* $\boldsymbol{Rep}^{\mathrm{pol}}(\mathrm{GL})$ *se décompose en somme directe d'objets de ce type.*

Démonstration. C'est admis ici, pour une démonstration se référer à [SS12]. □

Définition. Si V et W sont deux objets de $\mathbf{Rep}^{\mathrm{pol}}(\mathrm{GL})$ on définit leur produit tensoriel comme étant la représentation de $\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C})$ donnée par l'espace vectoriel $V \otimes W$ et le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C}) \times \big(V \otimes W\big) & \to & V \otimes W \\ (M, v \otimes w) & \mapsto & (Mv) \otimes (Mw). \end{array}$$

C'est bien une représentation polynomiale car si V est un sous-quotient de $\mathbb{C}^{\otimes n}$ et W de $\mathbb{C}^{\otimes m}$, alors $V \otimes W$ est un sous-quotient de $\mathbb{C}^{\otimes (n+m)}$ et le produit tensoriel se comporte bien avec les sommes directes.

Proposition II.11. *Le triplet* $\big(\boldsymbol{Rep}^{\mathrm{pol}}(\mathrm{GL}), \otimes, \mathbb{C}\big)$ *où* $\mathbb{C}$ *est la représentation triviale de* $\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C})$ *forme une catégorie monoïdale.*

II.4 La catégorie de Schur S

Définition. On définit les notions de fonction polynomiale et de foncteur strictement polynomial :

— Un fonction $f : V \to W$ entre deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie est dite polynomiale s'il existe des bases $(v_i)_{1 \le i \le n}$ de V et $(w_j)_{1 \le j \le m}$ de W et des polynômes $(P_j)_{1 \le j \le m}$ dans $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ tels que pour tout $v \in V$ on ait

$$f(v) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\Big) = \sum_{j=1}^{m} P_j(x_1, \ldots, x_n)\, w_j$$

— Une fonction polynomiale est dite homogène de degré d si tous les polynômes $(P_j)_{1 \le j \le m}$ sont homogènes de degré d.

— On note ${\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}}^f$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$ constituée des espaces vectoriels de dimension finie. Alors un foncteur $F : {\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}}^f \to {\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}}^f$ est strictement polynomial si pour tout couple (V,W) d'espaces vectoriels de dimension finie, l'application

$$\begin{array}{cccc} F & : & \mathrm{Hom}(V,W) & \to & \mathrm{Hom}\big(F(V),F(W)\big) \\ & & \varphi & \mapsto & F(\varphi) \end{array}$$

est une application polynomiale entre espaces vectoriels.

— Un foncteur strictement polynomial est dit homogène de degré d si pour tout couple d'espaces vectoriels de dimension finie l'application précédente est homogène de degré d.

Exemple. Le foncteur

$$\begin{array}{ccccc} (-)^{\otimes 2} & : & \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} & \to & \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} \\ & & V & \mapsto & V^{\otimes 2} = V \otimes V \end{array}$$

est polynomial homogène de degré 2. En effet, si V et W sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension n et m, alors on a des isomorphismes

$$\mathrm{Hom}(V,W) \cong \mathbf{M}_{n,m}(\mathbb{C}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Hom}(V\otimes V, W \otimes W) \cong \mathbf{M}_{n^2,m^2}(\mathbb{C}).$$

L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(V,W) & \to & \mathrm{Hom}(V\otimes V, W\otimes W) \\ \varphi & \mapsto & \varphi \otimes \varphi \end{array}$$

se transforme alors en

$$\begin{array}{ccccc} T & : & \mathbf{M}_{nm}(\mathbb{C}) & \to & \mathbf{M}_{n^2m^2}(\mathbb{C}) \\ & & M & \mapsto & T(M) \end{array},$$

où $T(M)$ est la matrice par blocs

$$T(M) = \left(\begin{array}{c|c|c} M\cdot M_{1,1} & M \cdot M_{1,2} & \cdots \\ \hline M \cdot M_{2,1} & \ddots & \cdots \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right).$$

Chaque composante de $T(M)$ est un produit de deux composantes de M (coordonnées dans la base canonique des $E_{i,j}$). On note alors $P_{k,l}$ le polynôme homogène de degré 2 associé à la composante $T(M)_{k,l}$ qui s'écrit $P_{k,l}(x_1,\dots,x_{nm}) = x_\alpha x_\beta$ pour α et β les deux composantes de M associées. On a alors

$$T(M) = T\big(\sum_{i,j} m_{i,j}E_{i,j}\big) = \sum_{k,l} P_{k,l}(m_{1,1},\dots,m_{nm})E_{k,l}$$

et donc T est bien une application linéaire homogène de degré 2.

Définition. Pour n un entier, on définit les quatre foncteurs T^n, Λ^n, Γ^n et S^n suivants :

$$\begin{array}{ccccc} T^n & : & \mathbb{C}\text{-}\mathbf{Mod} & \to & \mathbb{C}\text{-}\mathbf{Mod} \\ & & V & \mapsto & V^{\otimes n} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \Lambda^n & : & \mathbb{C}\text{-}\mathbf{Mod} & \to & \mathbb{C}\text{-}\mathbf{Mod} \\ & & V & \mapsto & \Lambda^n V := V^{\otimes n} \big/ \langle v\otimes v\rangle \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma^n & : & \mathbb{C}\text{-}\mathbf{Mod} & \to & \mathbb{C}\text{-}\mathbf{Mod} \\ & & V & \mapsto & \big(V^{\otimes n}\big)^{S_n} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} S^n & : & \mathbb{C}\text{-}\mathbf{Mod} & \to & \mathbb{C}\text{-}\mathbf{Mod} \\ & & V & \mapsto & S^nV := \big(V^{\otimes n}\big)_{S_n} = V^{\otimes n} \big/ \langle u\otimes v - v \otimes u\rangle \end{array}$$

On appelle T^nV la n-ème puissance tensorielle de V, Γ^nV sa n-ème puissance extérieure, Γ^nV sa n-ème puissance divisée et S^nV sa n-ème puissance symétrique.

Proposition II.12. *Pour n un entier, les quatre foncteurs T^n, Λ^n, Γ^n et S^n définis ci-dessus sont polynomiaux homogènes de degré n. De plus, on a les applications quotient*

$$\begin{array}{ccc} T^nV & \to & \Lambda^nV \\ v_1\otimes\cdots\otimes v_n & \mapsto & v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \end{array} \quad \textit{et} \quad \begin{array}{ccc} T^n & \to & S^n \\ v_1\otimes\cdots\otimes v_n & \mapsto & v_1 \cdot v_2 \cdot - \cdot v_n \end{array}.$$

Enfin dans Λ^nV on a la relation antisymétrique pour $v,w \in V$:

$$v \wedge w = -w \wedge v$$

car on a $(v+w)\wedge(v+w) = 0 = v\wedge w + w \wedge v$.

Définition. Si M est une représentation de S_n on lui associe un foncteur F_M défini par

$$\begin{array}{cccc} F_M & : & \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} & \to & \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} \\ & & V & \mapsto & \big(V^{\otimes n} \otimes M\big)_{S_n} \end{array}$$

où $\big(V^{\otimes n} \otimes M\big)_{S_n}$ est l'ensemble des co-invariants de la représentation $V^{\otimes n} \otimes M$ où S_n agit via le morphisme

$$\begin{array}{ccc} S_n \times (V^{\otimes n} \otimes M) & \to & V^{\otimes n} \otimes M \\ (\sigma\,,\, v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes m\,) & \mapsto & v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)} \otimes \sigma \cdot m \end{array}$$

Lemme II.13. *Si on se restreint aux représentations M de dimensions finies du groupe symétrique S_n, alors les foncteurs F_M associés sont polynomiaux homogènes de degré n.*

Définition. On note alors $\mathbf{S}$ la sous catégorie pleine de $\mathbf{Fonct}\big(\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}, \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\big)$ dont les objets sont les foncteurs isomorphes à un foncteur F_M pour une représentation M d'un groupe symétrique.

Proposition II.14. *La catégorie $\mathbf{S}$ est une catégorie abélienne.*

Démonstration. La catégorie $\mathbf{Fonct}\big(\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}, \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\big)$ est abélienne car c'est une catégorie de foncteurs à valeurs dans une catégorie abélienne. Il reste juste à vérifier que, si on considère un morphisme entre deux objets dans $\mathbf{S}$, le noyau et le co-noyau du morphisme ainsi que le produit et le co-produit des objets définis dans $\mathbf{Fonct}\big(\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}, \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\big)$ restent bien dans $\mathbf{S}$; ce qui se fait facilement. □

Remarque. On note $\mathbf{S}^0$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{S}$ constituée des foncteurs isomorphes à F_M pour une représentation M de dimension finie. Alors la catégorie $\mathbf{S}^0$ est équivalente à la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Fonct}\big(\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}{}^f, \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}{}^f\big)$ constituée des foncteurs polynomiaux.

Définition. On définit la somme directe et le produit tensoriel de deux foncteurs F et G de $\mathbf{S}$ terme à terme :

$$\begin{array}{cccc} F \oplus G & : & \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} & \to & \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} \\ & & V & \mapsto & F(V) \oplus G(V) \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} F \otimes G & : & \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} & \to & \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} \\ & & V & \mapsto & F(V) \otimes G(V) \end{array}.$$

Proposition II.15. *Si le corps de base est de caractéristique nulle, pour une partition λ on note M_λ la représentation irréductible de $S_{|\lambda|}$ associée par dualité de Schur-Weyl et S_λ le foncteur F_{M_λ}. Alors S_λ est un objet simple de $\mathbf{S}$ et tout objet de $\mathbf{S}$ est isomorphe à une somme directe (finies ou non) de foncteurs du type S_λ.*

Démonstration. On a déjà vu qu'une représentation M d'un groupe symétrique S_n se décompose sur les représentations M_λ comme suit :

$$M = \bigoplus_\lambda M_\lambda.$$

Alors on a les identités

$$F_M = \big((-)^{\otimes n} \otimes (\bigoplus_\lambda M_\lambda)\big)_{S_n} \cong \big(\bigoplus_\lambda \big((-)^{\otimes n} \otimes M_\lambda\big)\big)_{S_n} \cong \bigoplus_\lambda \big((-)^{\otimes n} \otimes M_\lambda\big)_{S_{|\lambda|}} = \bigoplus_\lambda S_\lambda$$

□

Proposition II.16. *On définit $C_{\mathbb{C}}$ le foncteur qui envoie tout espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et toute flèche sur l'identité. C'est alors un élément de $\mathbf{S}$ et le triplet $\big(\mathbf{S}, \otimes, C_{\mathbb{C}}\big)$ forme une catégorie monoïdale (ou tensorielle).*

Démonstration. Le foncteur $C_{\mathbb{C}}$ est équivalent au foncteur $F_{\mathbb{C}}$ pour $\mathbb{C}$ la représentation triviale de $S_0 = \{1\}$ qui envoie donc l'espace vectoriel V sur

$$\big(V^{\otimes 0} \otimes \mathbb{C}\big)_{S_0} = \big(\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}\big)_{\{\mathrm{id}\}} = \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}.$$

De plus, la catégorie est monoïdale car le produit tensoriel se fait terme par terme. Les applications et identités voulues s'obtiennent alors en relevant celles de la catégorie d'arrivée $\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$ qui est classiquement monoïdale. □

II.5 Équivalences

Théoreme II.17. *Lorsque le corps de base est de caractéristique nulle, les quatre catégories monoïdales* $\boldsymbol{Rep}(S_*), \mathbf{Fonct}\big(\boldsymbol{\Sigma}\,,\ \boldsymbol{Vec}_{\mathbb{C}}\big), \boldsymbol{Rep}^{\mathrm{pol}}(\mathrm{GL})$ *et* $\mathbf{S}$ *sont équivalentes via des foncteurs monoïdaux.*

Démonstration. On montre l'équivalence selon l'ordre suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Fonct}\big(\boldsymbol{\Sigma}\,, \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\big) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \mathbf{Rep}(S_*) \arrow[dl] \\
\mathbf{S} \arrow[r] & \mathbf{Rep}^{\mathrm{pol}}(\mathrm{GL})
\end{tikzcd}$$

On a déjà vu que ces quatre catégories sont abéliennes et même monoïdales et que chaque objet se décompose comme somme directe de simples. De plus, dans chaque catégorie on a fait la liste des simples et on a vu que les classes d'isomorphismes de simples étaient en bijection avec les partitions. Il suffit alors de définir des foncteurs additifs qui envoient les simples de la catégorie de départ associés à une partition, sur les simples de la catégorie d'arrivée associés à la même partition et on aura défini une équivalence de catégories abéliennes en passant aux sommes directes. On peut aussi montrer (se référer à [SS12]) que, dans chaque cas, le produit tensoriel de deux simples se décompose en simples en utilisant le même procédé (la règle de Littlewood-Richardson) et alors les foncteurs ainsi définis respecteront la structure de catégorie monoïdale.

Il reste à donner les foncteurs additifs vérifiant ces propriétés :

— On a vu aux théorèmes II.7 et II.8 que le foncteur

$$G : \qquad \begin{tikzcd}
\mathbf{Fonct}\big(\boldsymbol{\Sigma}\,, \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\big) \arrow[r] & \mathbf{Rep}(S_*) \\
V \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"'] & \big(\, V(\,[n]\,)\,\big)_{n\in\mathbb{N}} \arrow[d, "\left(\sigma_{[n]}\right)_{n\in\mathbb{N}}"] \\
W \arrow[r] & \big(\, W(\,[n]\,)\,\big)_{n\in\mathbb{N}}
\end{tikzcd}$$

est une équivalence de catégories monoïdales (et abéliennes) pour $V_{[n]}$ vu comme représentation de S_n. De plus, il est additif car la somme directe de foncteurs est définie par $(F \oplus G)(S) := F(S) \oplus G(S)$. Et, par définition, il envoie les simples de $\mathbf{Fonct}\big(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\big)$ associés à une partition λ sur les simples de $\mathbf{Rep}(S_*)$ associés à λ.

— On considère ensuite le foncteur

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{S} \arrow[r] & \mathbf{Rep}^{\mathrm{pol}}(\mathrm{GL}) \\
F \arrow[r] \arrow[d, "\tau"'] & F(\mathbb{C}^\infty) \arrow[d, "\tau_{\mathbb{C}^\infty}"] \\
G \arrow[r] & G(\mathbb{C}^\infty)
\end{tikzcd} .$$

Il est bien défini car il existe une représentation M d'un groupe symétrique (qui se décompose $M = \bigoplus\limits_{\lambda} M_\lambda$) telle que F soit isomorphe à F_M. On a alors

$$F(\mathbb{C}^\infty) = F_M(\mathbb{C}^\infty) = \big((\mathbb{C}^\infty)^{\otimes n} \otimes M\big)_{S_n} \cong \Big(\bigoplus_{\lambda} \big((\mathbb{C}^\infty)^{\otimes n} \otimes M_\lambda\big)\Big)_{S_n}$$

Donc $F(\mathbb{C}^\infty)$ est bien un sous-quotient d'une somme directe de représentations du type $(\mathbb{C}^\infty)^{\otimes k}$ car $M_\lambda \subset \mathbb{C}^m \subset \mathbb{C}^\infty$, et donc un objet de $\mathbf{Rep}^{\mathrm{pol}}(\mathrm{GL})$. Ce foncteur est donc bien défini et il est additif par définition de la somme directe de deux foncteurs. De plus, si λ est une partition, le simple S_λ de $\mathbf{S}$ s'envoie sur le simple V_λ de $\mathbf{Rep}^{\mathrm{pol}}(\mathrm{GL})$ car on peut montrer (*cf :* [SS12]) qu'on a l'isomorphisme

$$S_\lambda\big(\,\mathbb{C}^\infty\,\big) := F_{M_\lambda}\big(\,\mathbb{C}^\infty\,\big) := \big(\,(\,\mathbb{C}^\infty\,)^{\otimes|\lambda|} \otimes M_\lambda\,\big)_{S_{|\lambda|}} \cong \mathrm{Hom}_{S_{|\lambda|}}\big(\,M_\lambda\,,\,(\,\mathbb{C}^\infty\,)^{\otimes|\lambda|}\,\big) =: V_\lambda.$$

— On introduit aussi le foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Rep}(S_*) & \to & \mathbf{S} \\ V = (V_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & S_V := \bigoplus_{n\geq 0} F_{V_n} = \bigoplus_{n\geq 0} \big((-)^{\otimes n} \otimes V_n\big)_{S_n} \\ f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \downarrow & & \downarrow \bigoplus_{n\geq 0} \big(\mathrm{Id}_{(-)^{\otimes n}} \otimes f_n\big)_{S_n} \\ W = (W_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & S_W := \bigoplus_{n\geq 0} F_{W_n} = \bigoplus_{n\geq 0} \big((-)^{\otimes n} \otimes W_n\big)_{S_n} \end{array}.$$

Ce foncteur est lui aussi additif par distributivité du produit tensoriel sur la somme directe. De plus, il envoie le simple $M = (\ M_n\ )_{n\in\mathbb{N}}$ associé à la partition λ défini par

$$M_n = \begin{cases} M_\lambda & \text{si} \quad n = |\lambda| \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

sur le simple S_λ de $\mathbf{S}$ car on a

$$\bigoplus_{n\geq 0} F_{M_n} := \bigoplus_{n\geq 0} \big((-)^{\otimes n} \otimes M_n\big)_{S_n} = \big((-)^{\otimes|\lambda|} \otimes M_\lambda\big)_{S_{|\lambda|}} =: S_\lambda.$$

— On peut aussi utiliser le foncteur composé

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Fonct}\big(\,\mathbf{\Sigma}\,,\ \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\,\big) & \to & \mathbf{S} \\ V & \mapsto & \Phi_V = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} F_{V([n])} = \bigoplus_{n\geq 0} \big((-)^{\otimes n} \otimes V([n])\big)_{S_n} \end{array}$$

qui est lui-aussi additif par définition de la somme directe des foncteurs, et par distributivité du produit tensoriel sur la somme directe. Enfin, il envoie lui-aussi les simples sur les simples associés à la même partition par composition de deux foncteurs qui vérifient cette propriété.

□

III Algèbres commutatives tordues

III.1 La catégorie monoïdale $(\mathcal{V}, \otimes, \mathbb{1})$

Définition. On définit $(\mathcal{V}, \otimes, \mathbb{1})$ une catégorie monoïdale abstraite équivalente à l'une des quatre catégories monoïdales précédentes ($\mathbf{Rep}(S_*)$, $\mathbf{Fonct}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}})$, $\mathbf{Rep}^{\mathrm{pol}}(\mathrm{GL})$ et $\mathbf{S}$). On peut alors définir des notions dans $\mathcal{V}$, puis passer la définition dans n'importe quelle autre des quatre catégories.

Proposition III.1. *Comme les quatre autres catégories, si le corps de base est de caractéristique nulle, alors la catégorie $\mathcal{V}$ possède des objets simples et les classes d'isomorphismes de simples sont en bijection avec les partitions. De plus, tout objet de $\mathcal{V}$ se décompose en une somme directe (finie ou non) d'objets simples.*

Définition. Un objet de $\mathcal{V}$ est dit de longueur finie si sa décomposition en somme directe d'objets simples est finie. Plus généralement, il est finiment gradué si dans sa décomposition chaque simple n'apparait qu'un nombre fini de fois. On note $\mathcal{V}_f$ (resp. $\mathcal{V}_{gf}$) la sous-catégorie pleine de $\mathcal{V}$ des objets de longueur finie (resp. finiment gradués).

Exemple. Si on se place dans la catégorie $\mathbf{Rep}(S_*)$ les objets finiment gradués sont les suites $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout entier n la représentation V_n de S_n soit de dimension finie (elle se décompose alors en une somme directe finie de simples, et pour $n \neq m$ les simples associés ne sont pas isomorphes). De plus, les objets de longueur finie sont les objets finiment gradués $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquels V_n est nul pour n suffisamment grand.
De même dans la catégorie $\mathbf{Fonct}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}})$, un foncteur $F : \mathbf{\Sigma} \to \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$ est finiment engendré si pour tout ensemble fini S, l'espace vectoriel $F(S)$ est de dimension finie. Il est de longueur finie si, en plus, on a $F(S) = 0$ sauf pour un nombre fini d'ensembles.

Proposition III.2. *On note $\mathcal{V}_n$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{V}$ des objets dont la décomposition en somme directe de simples ne comprend que des simples associés à des partitions λ telles que $|\lambda| = n$. Alors tout objet V de $\mathcal{V}$ se décompose comme somme directe d'objets V_n de $\mathcal{V}_n$, ce que l'on note*

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n .$$

Chaque objet de $\mathcal{V}$ est alors naturellement gradué.

Démonstration. Cela se voit dans la catégorie $\mathbf{Rep}(S_*)$ car la sous-catégorie $(\mathbf{Rep}(S_*)))_n$ correspond la catégorie à $\mathbf{Rep}(S_n)$ vue comme sous-catégorie de $\mathbf{Rep}(S_*)$. De même dans la catégorie $\mathbf{Fonct}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}})$, la sous-catégorie $\mathcal{V}_n$ est la catégorie $\mathbf{Fonct}(\mathbf{\Sigma}_n, \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}})$ où $\mathbf{\Sigma}_n$ est la sous-catégorie pleine de $\mathbf{\Sigma}$ dont les objets sont les ensembles de cardinal n. □

III.2 Objets représentables

Définition. Pour un entier n on considère le foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Rep}(S_*) & \to & \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} \\ V = (V_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & V_n \end{array}$$

On note alors $\mathbb{C}_{<n>}$ l'objet de $\mathbf{Rep}(S_*)$ qui représente ce foncteur, c'est-à-dire tel qu'on ait l'isomorphisme naturel en $V = (V_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbf{Rep}(S_*)$ suivant :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rep}(S_*)}\left(\mathbb{C}_{<n>}, V\right) \cong V_n.$$

Proposition III.3. *L'objet $\mathbb{C}_{<n>}$ se décrit dans les différentes catégories équivalentes :*

- *Dans **Rep**(S_*) il est décrit par*

$$\left(\mathbb{C}_{<n>}\right)_m = \begin{cases} \mathbb{C}[S_n] & si\ n = m \\ 0 & sinon \end{cases} .$$

- *Dans* $\mathbf{Fonct}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}})$ *si l'on note $[n]$ l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$, il correspond (via l'équivalence de catégories H définie page 26) au projectif standard usuel*

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{C}\left[\mathrm{Hom}_{\mathbf{\Sigma}}([n], -)\right] & : & \mathbf{\Sigma} & \to & \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} & & \\ & & X & \mapsto & \mathbb{C}\left[\mathrm{Hom}_{\mathbf{\Sigma}}([n], X)\right] & = & \begin{cases} \mathbb{C}[S_n] & si\ |X| = n \\ 0 & sinon \end{cases} \end{array}$$

qui envoie une flèche $f : X \to X'$ entre ensemble de cardinaux n vers le morphisme $\mathbb{C}[S_n] \to \mathbb{C}[S_n]$ qui permute les éléments selon la permutation de $[n]$ associée à f en fixant deux bijections $X \cong [n]$ et $X' \cong [n]$. Ce foncteur se ré-écrit en ne gardant que le squelette (défini page 7)

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{\Sigma}_0 & \to & \boldsymbol{Vec}_{\mathbb{C}} & & \\ k & \mapsto & \mathbb{C}\left[\,\mathrm{Hom}_{\mathbf{\Sigma}_0}(n,k)\,\right] & = & \left\{ \begin{array}{cc} \mathbb{C}[S_n] & si\ k = n \\ 0 & sinon \end{array} \right. \end{array}.$$

— *Dans $\boldsymbol{Rep}^{\mathrm{pol}}(\mathrm{GL})$ il correspond à la représentation $(\,\mathbb{C}^{\infty}\,)^{\otimes n}$ de $\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{C})$.*

— *Dans $\mathbf{S}$ il correspond au foncteur*

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{Vec}_{\mathbb{C}} & \to & \boldsymbol{Vec}_{\mathbb{C}} \\ V & \mapsto & V^{\otimes n} \end{array}$$

Démonstration. Si on note $\big((U^n)_m\big)_{m\in\mathbb{N}}$ l'objet de $\mathbf{Rep}(S_*)$ défini par

$$\big(U^n\big)_m = \left\{ \begin{array}{cc} \mathbb{C}[S_n] & \text{si } m = n \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. ,$$

on va montrer que l'on a un isomorphisme naturel en $V \in \mathbf{Rep}(S_*)$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rep}(S_*)}\big(U^n, V\big) \cong V_n$$

et on aura ainsi montré que $\mathbb{C}_{<n>}$ correspond bien à U^n dans la catégorie $\mathbf{Rep}(S_*)$. Pour cela on considère $f = (f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rep}(S_*)}\big(U^n, V\big)$. Alors pour m différent de n, on a

$$f_m : (U^n)_m := 0 \longrightarrow V_m$$

donc f_m est nulle. Et pour $m = n$ on a

$$f_n : (U^n)_n = \mathbb{C}[S_n] \longrightarrow V_n.$$

On a donc

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rep}(S_*)}\big(U^n, V\big) \cong \{f_n : \mathbb{C}[S_n] \to V_n \text{ morphisme de représentations}\}.$$

On considère alors le morphisme évaluation en $(\mathrm{id}) \in S_n$:

$$\begin{array}{cccc} \text{éval}_{(\mathrm{id})} & : & \{f_n : \mathbb{C}[S_n] \to V_n \text{ morphisme de représentations}\} & \to & V_n \\ & & f_n & \mapsto & f_n(\mathrm{id}) \end{array}.$$

Puisque f_n est un morphisme de représentations, pour $\sigma \in S_n$ on a la formule

$$f_n(\sigma) = \sigma \cdot f_n(\mathrm{id}).$$

Ceci permet de montrer que f_n est uniquement déterminée par $f_n(\mathrm{id}) \in V_n$ et donc que $\text{éval}_{(\mathrm{id})}$ est un isomorphisme. On obtient alors la formule donnée pour $\mathbb{C}_{<n>}$ dans la catégorie $\mathbf{Rep}(S_*)$.

Montrons maintenant la formule dans la catégorie $\mathbf{Fonct}\big(\,\mathbf{\Sigma}\,, \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\,\big)$. On a par définition

$$H(\mathbb{C}_{<n>}) := \varphi^{\mathbb{C}_{<n>}} = \left(\begin{array}{ccc} \mathbf{\Sigma} & \to & \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} \\ X & \mapsto & \big(\,\mathbb{C}_{<n>}\,\big)_{|X|} \end{array} \right).$$

Donc avec la définition de $\mathbb{C}_{<n>}$ dans $\mathbf{Rep}(S_*)$

$$\big(\,\mathbb{C}_{<n>}\,\big)_{|X|} = \left\{ \begin{array}{cc} \mathbb{C}[S_n] & \text{si } |X| = n \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. ,$$

on obtient bien la définition de $\mathbb{C}_{<n>}$ dans $\mathbf{Fonct}\big(\,\mathbf{\Sigma}\,, \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\,\big)$ voulue.

On retrouve les deux autres résultats de même en utilisant les isomorphismes du théorème II.17 :

Dans la catégorie **S** l'objet $\mathbb{C}_{<n>}$ est donné par le foncteur

$$S_{\mathbb{C}_{<n>}} := \bigoplus_{m\geq 0} \big(\, (-)^{\otimes m} \otimes (\mathbb{C}_{<n>})_m \,\big)_{S_m}.$$

Or pour $m \neq n$ le terme de la somme directe est nul, donc on obtient

$$S_{\mathbb{C}_{<n>}} = \big(\, (-)^{\otimes n} \otimes \mathbb{C}[S_n] \,\big)_{S_n} \cong (-)^{\otimes n} \otimes \mathbb{C} = (-)^{\otimes n}.$$

L'isomorphisme s'obtient car les co-invariants forment un quotient dans lequel les vecteurs de base de $\mathbb{C}[S_n]$ sont identifiés car S_n agit simultanément sur $(-)^{\otimes n}$ et sur $\mathbb{C}[S_n]$.

Enfin, pour obtenir le résultat dans la catégorie $\mathbf{Rep}^{\mathrm{pol}}(\mathrm{GL})$, il suffit d'évaluer le foncteur $S_{\mathbb{C}_{<n>}}$ sur l'espace vectoriel $\mathbb{C}^\infty$. On obtient donc bien dans $\mathbf{Rep}^{\mathrm{pol}}(\mathrm{GL})$ l'égalité de représentations

$$\mathbb{C}_{<n>} = S_{\mathbb{C}_{<n>}}(\mathbb{C}^\infty) = (\,\mathbb{C}^\infty\,)^{\otimes n}.$$

□

Proposition III.4. *Pour deux entiers n et m on a la relation*

$$\mathbb{C}_{<n>} \otimes \mathbb{C}_{<m>} = \mathbb{C}_{<n+m>}$$

Démonstration. On rappelle que si X et Y sont deux ensembles finis alors on a un isomorphisme

$$\mathbb{C}[X] \otimes \mathbb{C}[Y] \cong \mathbb{C}[X \times Y]$$

car les éléments de type $[x] \otimes [y]$ avec $x \in X$ et $y \in Y$ forment une base du premier espace et les éléments du type (x, y) avec $x \in X$ et $y \in Y$ forment une base du deuxième.

On commence par faire une première démonstration de la proposition dans la catégorie $\mathbf{Rep}(S_*)$. Si k est un entier, on a par définition

$$\big(\,\mathbb{C}_{<n>} \otimes \mathbb{C}_{<m>}\,\big)_k = \bigoplus_{i+j=k} \mathrm{Ind}_{S_i \times S_j}^{S_k}\big((\mathbb{C}_{<n>})_i \otimes (\mathbb{C}_{<m>})_j\big).$$

Mais le terme dans la somme directe est nul si i est différent de n ou j de m. On a donc

$$\big(\,\mathbb{C}_{<n>} \otimes \mathbb{C}_{<m>}\,\big)_k = \begin{cases} \mathrm{Ind}_{S_n \times S_m}^{S_k}\big(\,\mathbb{C}[S_n] \otimes \mathbb{C}[S_m]\big) & \text{si } k = n+m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Or d'après le rappel, on a les égalités suivantes entre représentations de S_{n+m}

$$\mathrm{Ind}_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}}\big(\,\mathbb{C}[S_n] \otimes \mathbb{C}[S_m]\big) = \mathrm{Ind}_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}}\big(\,\mathbb{C}[S_n \times S_m]\big) = \mathbb{C}[S_n \times S_m] \bigotimes_{\mathbb{C}[S_n \times S_m]} \mathbb{C}[S_{n+m}] = \mathbb{C}[S_{n+m}].$$

On a donc

$$\big(\,\mathbb{C}_{<n>} \otimes \mathbb{C}_{<m>}\,\big)_k = \begin{cases} \mathbb{C}[S_{n+m}] & \text{si } k = n+m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \big(\,\mathbb{C}[S_{n+m}]\big)_k.$$

Ceci montre bien le résultat.

On donne en plus une deuxième démonstration dans la catégorie $\mathbf{Fonct}\big(\,\mathbf{\Sigma}\,,\,\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\big)$ qui est plus classique (vis-à-vis des projectifs standards notamment) et qui utilise des outils intéressants :

Pour deux entier n et m, on a par définition l'égalité fonctorielle

$$\mathbb{C}_{<n>} \otimes \mathbb{C}_{<m>} = \mathbb{C}\big[\,\mathrm{Hom}_{\mathbf{\Sigma}}([n], -)\,\big] \otimes \mathbb{C}\big[\,\mathrm{Hom}_{\mathbf{\Sigma}}([m], -)\,\big] : \mathbf{\Sigma} \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}.$$

Pour un ensemble fini S on a alors

$$\big(\,\mathbb{C}_{<n>} \otimes \mathbb{C}_{<m>}\,\big)(S) = \bigoplus_{S = X \sqcup Y} \mathbb{C}\big[\,\mathrm{Hom}_{\mathbf{\Sigma}}([n], X)\,\big] \otimes \mathbb{C}\big[\,\mathrm{Hom}_{\mathbf{\Sigma}}([m], Y)\,\big].$$

Or si $|X|$ est différent de n on a $\mathrm{Hom}_{\mathbf{\Sigma}}([n],X)=\varnothing$ et donc $\mathbb{C}\big[\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Sigma}}([n],X)\ \big]=0$ et de même pour Y. En utilisant le rappel cela donne alors

$$\big(\mathbb{C}_{<n>}\otimes\mathbb{C}_{<m>}\big)(S)=\begin{cases}\displaystyle\bigoplus_{S=X\cup Y,|X|=n}\mathbb{C}\big[\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Sigma}}([n],X)\times\mathrm{Hom}_{\mathbf{\Sigma}}([m],Y)\ \big] & \text{si } |S|=n+m\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

Mais pour $|S|=n+m$, puisque dans $\mathbf{\Sigma}$ on a que des bijections, on a un isomorphisme

$$\bigoplus_{S=X\cup Y,|X|=n}\mathbb{C}\big[\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Sigma}}([n],X)\times\mathrm{Hom}_{\mathbf{\Sigma}}([m],Y)\ \big]\cong\mathbb{C}\big[\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Sigma}}([n]\cup[m],S)\big]$$

car on a une bijection ensembliste

$$\{\mathrm{Hom}_{\mathbf{\Sigma}}([n],X)\times\mathrm{Hom}_{\mathbf{\Sigma}}([m],Y)|S=X\cup Y,|X|=n\}\cong\mathrm{Hom}_{\mathbf{\Sigma}}([n]\cup[m],S).$$

Cela donne enfin

$$\begin{aligned}\big(\mathbb{C}_{<n>}\otimes\mathbb{C}_{<m>}\big)(S)&=\begin{cases}\mathbb{C}\big[\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Sigma}}([n]\cup[m],S) & \text{si } |S|=n+m\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\\&=\mathbb{C}\big[\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Sigma}}([n]\cup[m],S)\ \big]\\&=\mathbb{C}\big[\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Sigma}}([n+m],S)\ \big]\\&=\mathbb{C}_{<n+m>}(S)\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{C}_{<n>}\otimes\mathbb{C}_{<m>}=\mathbb{C}_{<n+m>}.$$

□

Définition. On définit deux opérations de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$:

— Une transposition

$$\begin{array}{cccc}(-)^{\dagger} & : & \mathcal{V} & \to & \mathcal{V}\\ & & V & \mapsto & V^{\dagger}\end{array}$$

qui est définie dans la catégorie $\mathbf{Rep}(S_*)$ par

$$\big(V^{\dagger}\big)_n=(V_n)\otimes\mathrm{sgn}_n$$

où sgn_n est la représentation signature de S_n.

— Une dualité

$$\begin{array}{ccccc}(-)^{\vee} & : & \mathcal{V}^{\mathrm{op}} & \to & \mathcal{V}\\ & & V & \mapsto & V^{\vee}\end{array}$$

qui est définie dans la catégorie $\mathbf{Rep}(S_*)$ par

$$\big(V^{\vee}\big)_n=(V_n)^*$$

où $(V_n)^*$ est la représentation contragradiente de V_n (et donc le dual vectoriel).

Proposition III.5. *On a un isomorphisme entre $(V^{\vee})^{\vee}$ et V si et seulement si V est finiment gradué. De plus, si V et W sont finiment gradués on a la relation*

$$(V\otimes W)^{\vee}=V^{\vee}\otimes W^{\vee}$$

La dualité se restreint donc en une équivalence de catégories entre $\mathcal{V}_{gf}$ et $\mathcal{V}_{gf}^{op}$.

III.3 Structures symétriques sur $\mathcal{V}$

Définition. On peut mettre deux structures de catégories monoïdales symétriques sur $\mathcal{V}$ qui sont données par les morphismes τ et σ définis par

$$\begin{array}{ccccc}\tau_{V,W} & : & V\otimes W & \to & W\otimes V\\ & & v\otimes w & \mapsto & w\otimes v\end{array}\quad\text{et}\quad\begin{array}{ccccc}\sigma_{V,W} & : & V\otimes W & \to & W\otimes V\\ & & v\otimes w & \mapsto & (-1)^{|v|\cdot|w|}\,w\otimes v\end{array},$$

où $|v|$ est le degré de v donné par la graduation naturelle de $\mathcal{V}$ décrite à la proposition III.2.

Remarque. Ces structures symétriques se traduisent dans les quatre catégories équivalentes à $\mathcal{V}$ comme suit :

— Dans $\mathbf{Rep}(S_*)$ elles correspondent à des suites d'opérateurs d'entrelacement $\big((\tau_{V,W})_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big((\sigma_{V,W})_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par linéarité sur des éléments générateurs

$$\begin{array}{cccccc} (\tau_{V,W})_n & : & (V\otimes W)_n \coloneqq & \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Ind}_{S_i\times S_j}^{S_n}(V_i\otimes W_j) & \to & \bigoplus_{j+i=n} \mathrm{Ind}_{S_j\times S_i}^{S_n}(W_j\otimes V_j) & \eqqcolon (W\otimes V)_n \\ & & & v_i\otimes w_j & \mapsto & w_j\otimes v_i & \end{array}$$

et

$$\begin{array}{cccccc} (\sigma_{V,W})_n & : & (V\otimes W)_n \coloneqq & \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Ind}_{S_i\times S_j}^{S_n}(V_i\otimes W_j) & \to & \bigoplus_{j+i=n} \mathrm{Ind}_{S_j\times S_i}^{S_n}(W_j\otimes V_j) & \eqqcolon (W\otimes V)_n \\ & & & v_i\otimes w_j & \mapsto & (-1)^{i\cdot j}\, w_j\otimes v_i & \end{array}.$$

— Dans $\mathbf{Fonct}\big(\mathbf{\Sigma}\,,\,\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\big)$, cela correspond à deux transformations naturelles qui associent à un ensemble fini S les applications linéaires

$$\begin{array}{cccccc} (\tau_{V,W})_S & : & (V\otimes W)(S) \coloneqq & \bigoplus_{S=X\cup Y} V(X)\otimes W(Y) & \to & \bigoplus_{S=Y\cup X} W(Y)\otimes V(X) & \eqqcolon (W\otimes V)(S) \\ & & & x\otimes y & \mapsto & y\otimes x & \end{array}$$

et

$$\begin{array}{cccccc} (\sigma_{V,W})_S & : & (V\otimes W)(S) \coloneqq & \bigoplus_{S=X\cup Y} V(X)\otimes W(Y) & \to & \bigoplus_{S=Y\cup X} W(Y)\otimes V(X) & \eqqcolon (W\otimes V)(S) \\ & & & x\otimes y & \mapsto & (-1)^{|X|\cdot|Y|}\; y\otimes x & \end{array}.$$

On remarque que dans les deux cas, pour une décomposition $S = X\cup Y$, la transformation envoie $V(X)\otimes W(Y)$ sur $W(Y)\otimes V(X)$ et donc permute les facteurs de la somme directe.

— Dans $\mathbf{Rep}^{\mathrm{pol}}(\mathrm{GL})$, si $V = V_\lambda$ et $W = V_\mu$ sont deux objets simples pour λ une partition de n et μ une partition de m, ils correspondent simplement aux opérateurs d'entrelacements (morphismes de représentations) définis par linéarité sur les espaces vectoriels par

$$\begin{array}{cccc} \tau_{V,W} & : & V\otimes W & \to & W\otimes V \\ & & v\otimes w & \mapsto & w\otimes v \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cccc} \sigma_{V,W} & : & V\otimes W & \to & W\otimes V \\ & & v\otimes w & \mapsto & (-1)^{n\cdot m}\, w\otimes v \end{array}.$$

Puisque tout objet se décompose comme somme directe d'objets simples V_λ on peut étendre cette définition à toute la catégorie par somme directe.

— Enfin, dans $\mathbf{S}$, cela correspond aux deux transformations naturelles qui associent à un espace vectoriel E les applications linéaires

$$\begin{array}{cccccc} (\tau_{V,W})_E & : & (V\otimes W)(E) \coloneqq & V(E)\otimes W(E) & \to & W(E)\otimes V(E) & \eqqcolon (W\otimes V)(E) \\ & & & x\otimes y & \mapsto & y\otimes x & \end{array}$$

et

$$\begin{array}{cccccc} (\sigma_{V,W})_E & : & (V\otimes W)(E) \coloneqq & V(E)\otimes W(E) & \to & W(E)\otimes V(E) & \eqqcolon (W\otimes V)(E) \\ & & & x\otimes y & \mapsto & (-1)^{n\cdot m}\, y\otimes x & \end{array},$$

si V est un foncteur isomorphe à F_N pour une représentation N du groupe S_n et si W est isomorphe à F_M avec M une représentation de S_m.

Remarque. Comme dans la proposition I.7 on peut construire une action naturelle de S_n sur $\mathcal{V}^{\otimes n}$ via l'application τ. En effet, l'action de la transposition $(i, i+1)$ de S_n est donnée par le morphisme

$$V^{\otimes n} \xrightarrow{\mathrm{Id}_{V^{\otimes(i-1)}}\,\otimes\,\tau\,\otimes\,\mathrm{Id}_{V^{\otimes(n-i-1)}}} V^{\otimes n}\ .$$

Lemme III.6. *On peut considérer la représentation signature de S_n sur l'espace vectoriel $\Lambda^n(\mathbb{C}^n)$ au lieu de $\mathbb{C}$. Dans ce cas, l'induction de la représentation signature de $S_n \times S_m$ à S_{n+m} correspond à une application*

$$\iota_{n,m} : \Lambda^n(\mathbb{C}^n) \otimes \Lambda^m(\mathbb{C}^m) \to \Lambda^{n+m}(\mathbb{C}^{n+m}),$$

et pour des éléments $\alpha \in \Lambda^n(\mathbb{C}^n)$ et $\beta \in \Lambda^m(\mathbb{C}^m)$ on a la relation

$$\iota_{n,m}(\alpha \otimes \beta) = (-1)^{n\cdot m}\, \iota_{m,n}(\beta \otimes \alpha).$$

Démonstration. Par définition on a

$$\Lambda^n(\mathbb{C}^n) := {(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}} \Big/ {\langle x \otimes x \rangle},$$

et si on note $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ alors la famille

$$(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n})_{1 \le i_1, \dots, i_n \le n}$$

est une base de $(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$. Mais si deux indices sont égaux on voit facilement que, dans le quotient, l'élément devient nul avec les relations

$$x \wedge y = -y \wedge x \qquad \text{et} \qquad x \wedge x = 0.$$

Il ne reste alors dans le quotient que les éléments du type $e_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(n)}$ avec $\sigma \in S_n$, mais ils sont tous égaux au signe près par la formule

$$e_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(n)} = \mathrm{sgn}(\sigma)\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n.$$

On en conclut alors que $\Lambda^n(\mathbb{C}^n)$ est un espace vectoriel de dimension 1 de base (non canonique) $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$. De plus, on a bien une action linéaire de S_n sur $\Lambda^n(\mathbb{C}^n)$ qui est donnée par

$$\begin{array}{ccccc} S_n \times \Lambda^n(\mathbb{C}^n) & \to & \Lambda^n(\mathbb{C}^n) & & \\ \big(\sigma, \lambda \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n\big) & \mapsto & \lambda \cdot e_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(n)} & = & \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \lambda\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \end{array}$$

On voit alors que l'on retombe bien sur la représentation signature de S_n. L'induction de $S_n \times S_m$ à S_{n+m} se fait alors via l'application bilinéaire de concaténation

$$\begin{array}{cccc} \iota_{n,m} : & \Lambda^n(\mathbb{C}^n) \times \Lambda^m(\mathbb{C}^m) & \to & \Lambda^{n+m}(\mathbb{C}^{n+m}) \\ & \big(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n\,,\, e'_1 \wedge \cdots \wedge e'_m\big) & \mapsto & e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \wedge e'_1 \wedge \cdots \wedge e'_m \end{array}$$

qui induit une application linéaire associée $\iota_{n,m} : \Lambda^n(\mathbb{C}^n) \otimes \Lambda^m(\mathbb{C}^m) \to \Lambda^{n+m}(\mathbb{C}^{n+m})$. Il reste enfin à vérifier la formule voulue sur deux générateurs (éléments non nuls) α de $\Lambda^n(\mathbb{C}^n)$ et β de $\Lambda^m(\mathbb{C}^m)$:

$$\begin{aligned} \iota_{n,m}(\alpha \otimes \beta) &= \iota_{n,m}\big((\lambda \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \otimes (\mu \cdot e'_1 \wedge \cdots \wedge e'_m) \big) \\ &= \lambda\mu \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \wedge e'_1 \wedge \cdots \wedge e'_m \\ &= (-1)^{n\cdot m}\, \lambda\mu \cdot e'_1 \wedge \cdots \wedge e'_m \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ &= (-1)^{n\cdot m}\, \iota_{m,n}\big((\mu \cdot e'_1 \wedge \cdots \wedge e'_m) \otimes (\lambda \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \big) \\ &= (-1)^{n\cdot m}\, \iota_{m,n}(\beta \otimes \alpha) \end{aligned}$$

□

Proposition III.7. *Les catégories monoïdales symétriques $(\mathcal{V}, \tau)$ et $(\mathcal{V}, \sigma)$ sont équivalentes via le foncteur monoïdal involutif*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \to & \mathcal{V} \\ V & \mapsto & V^\dagger \end{array}.$$

Démonstration. — Pour la démonstration on se place dans la catégorie $\mathbf{Rep}(S_*)$ et alors la transposée est donnée par le diagramme suivant

$$\mathcal{V} \xrightarrow{\quad (-)^\dagger \quad} \mathcal{V}$$

$$\begin{array}{ccc} V = (V_n)_{n\in\mathbb{N}} & & \big(V_n \otimes \mathrm{sgn}_n\big)_{n\in\mathbb{N}} = V^\dagger \\ {\scriptstyle f=(f_n)_{n\in\mathbb{N}}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle (f_n\otimes \mathrm{id})_{n\in\mathbb{N}} = f^\dagger} \\ W = (W_n)_{n\in\mathbb{N}} & & \big(W_n \otimes \mathrm{sgn}_n\big)_{n\in\mathbb{N}} = W^\dagger \end{array}$$

Il est alors clair que c'est un foncteur car $(f_n \otimes \mathrm{Id}) \circ (g_n \otimes \mathrm{Id}) = (f_n \circ g_n) \otimes \mathrm{Id}$ et $\mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id} = \mathrm{Id}$.

— On vérifie alors qu'il respecte la structure monoïdale de $\mathbf{Rep}(S_*)$ sur deux objets V et W :

$$\begin{aligned}
\big((V \otimes W)^\dagger\big)_n &= (V \otimes W)_n \otimes \mathrm{sgn}_n \\
&= \Big(\bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Ind}_{S_i \times S_j}^{S_n} (V_i \otimes W_j) \Big) \otimes \mathrm{sgn}_n \\
&\cong \bigoplus_{i+j=n} \Big(\mathrm{Ind}_{S_i \times S_j}^{S_n} (V_i \otimes W_j) \otimes \mathrm{sgn}_n \Big) \\
&\cong \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Ind}_{S_i \times S_j}^{S_n} \big(\ (V_i \otimes \mathrm{sgn}_i) \otimes (W_j \otimes \mathrm{sgn}_j) \ \big) \\
&= \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Ind}_{S_i \times S_j}^{S_n} \big(\ (V^\dagger)_i \otimes (W^\dagger)_j \ \big) \\
&= \big(\ V^\dagger \otimes W^\dagger \ \big)_n
\end{aligned}$$

Le passage de la troisième à la quatrième ligne s'obtient en regardant l'action de $S_i \times S_j$ sur $V_i \otimes W_j$: Un élément $(\sigma, \tau) \in S_i \times S_j$ agit par bloc multiplié par la signature qui se décompose en un produit $\mathrm{sgn}_n\big((\sigma,\tau)\big) = \mathrm{sgn}_i(\sigma) \cdot \mathrm{sgn}_j(\tau)$. On obtient alors un isomorphisme

$$\theta_{V,W} : V^\dagger \otimes W^\dagger \cong (V \otimes W)^\dagger.$$

— On vérifie ensuite qu'il respecte les deux structures symétriques c'est-à-dire que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
V^\dagger \otimes W^\dagger \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\theta_{V,W}"] & W^\dagger \otimes V^\dagger \arrow[d, "\theta_{W,V}"] \\
(V \otimes W)^\dagger \arrow[r, "(\tau)^\dagger"'] & (W \otimes V)^\dagger
\end{tikzcd}$$

Pour cela on considère comme dans le lemme III.6 que la représentation signature de S_n agit sur l'espace $\Lambda^n(\mathbb{C}^n)$ au lieu de $\mathbb{C}$. Avec cette convention l'isomorphisme $\theta_{V,W}$ s'écrit

$$\begin{array}{ccccc}
\big(\ V^\dagger \otimes W^\dagger \ \big)_n = & \bigoplus_{i+j=n} (V_i \otimes \Lambda^i(\mathbb{C}^i)) \otimes (W_j \otimes \Lambda^j(\mathbb{C}^j)) & \to & (V \otimes W)_n \otimes \Lambda^n(\mathbb{C}^n) & = \big((V \otimes W)^\dagger\big)_n \\
& (v_i \otimes \alpha_i) \otimes (w_j \otimes \beta_j) & \mapsto & (v_i \otimes w_j) \otimes \iota_{i,j}(\alpha_i \otimes \beta_j) &
\end{array}.$$

On peut ensuite vérifier que le diagramme commute en évaluant les applications sur des éléments : Pour $v \otimes \alpha$ dans $(V^\dagger)_i = V_i \otimes \Lambda^i(\mathbb{C}^i)$ et $w \otimes \beta$ dans $(W^\dagger)_j = W_j \otimes \Lambda^j(\mathbb{C}^j)$ on a les égalités

$$\begin{aligned}
\theta_{W,V} \circ \sigma \big(\ (v \otimes \alpha) \otimes (w \otimes \beta) \ \big) &= \theta_{W,V}\big(\ (-1)^{i \cdot j} \, (w \otimes \beta) \otimes (v \otimes \alpha) \ \big) \\
&= (-1)^{i \cdot j} \, (w \otimes v) \otimes \ \iota_{j,i}(\beta \otimes \alpha) \\
&= (w \otimes v) \otimes \big((-1)^{i \cdot j} \ \iota_{j,i}(\beta \otimes \alpha) \big) \\
\text{Lemme III.6} \quad &= (w \otimes v) \otimes \iota_{i,j}(\alpha \otimes \beta) \\
&= \big(\tau(v \otimes w) \big) \otimes \iota_{i,j}(\alpha \otimes \beta) \\
&= (\tau \otimes \mathrm{id}) \Big((v \otimes w) \otimes \ \iota_{i,j}(\alpha \otimes \beta) \Big) \\
&= (\tau)^\dagger \Big((v \otimes w) \otimes \iota_{i,j}(\alpha \otimes \beta) \Big) \\
&= (\tau)^\dagger \circ \theta_{V,W} \Big((v \otimes \alpha) \otimes (w \otimes \beta) \Big)
\end{aligned}$$

Et comme ces éléments engendrent l'espace $(V^\dagger)_i \otimes (W^\dagger)_j$ on obtient la commutativité sur cet espace, puis sur $V^\dagger \otimes W^\dagger$ entier par somme directe (l'induction ne change pas l'espace vectoriel de la représentation).

— Ainsi la transposition $(\mathcal{V},\tau) \to (\mathcal{V},\sigma)$ est un foncteur monoïdal symétrique. On peut alors montrer de la même manière que la transposition "inverse" $(\mathcal{V},\sigma) \to (\mathcal{V},\tau)$ est aussi un foncteur monoïdal symétrique. Il suffit alors de montrer que la transposition est une involution et on aura montré que c'est une équivalence de catégories fonctorielles.

— Montrons donc que c'est une involution. On reprend la représentation signature usuelle et pour un entier n on a

$$(V^{\dagger\dagger})_n = (V^\dagger)_n \otimes \mathrm{sgn}_n = (V_n \otimes \mathrm{sgn}_n) \otimes \mathrm{sgn}_n \cong V_n \otimes (\mathrm{sgn}_n \otimes \mathrm{sgn}_n)$$

Et on peut alors définir un isomorphisme (naturel) de représentations

$$\begin{array}{ccc} V_n \otimes (\mathrm{sgn}_n \otimes \mathrm{sgn}_n) & \to & V_n \\ v \otimes \alpha \otimes \beta & \mapsto & v \end{array}.$$

C'est bien un opérateur d'entrelacement car pour $x \in S_n$ on a l'identité

$$x \cdot (v \otimes \alpha \otimes \beta) = (x \cdot v) \otimes \alpha \otimes \beta$$

car on a les égalités

$$x\cdot(v\otimes\alpha\otimes\beta) = (x\cdot v)\otimes(x\cdot\alpha)\otimes(x\cdot\beta) = (x\cdot v)\otimes(\mathrm{sgn}(x)\alpha)\otimes(\mathrm{sgn}(x)\beta) = \big(\mathrm{sgn}(x)\big)^2\,\big((x\cdot v)\otimes\alpha)\otimes\beta\big).$$

Ceci donne donc un isomorphisme de représentations de S_n entre $(V^{\dagger\dagger})_n$ et V_n pour tout entier n, qui est de plus naturel. On a donc une équivalence naturelle entre les foncteurs $(-)^\dagger \circ (-)^\dagger$ et Id, et la transposition est bien une involution.

□

III.4 Algèbres commutatives tordues

On peut maintenant définir ce qu'est une algèbre commutative tordue. Pour cela on s'appuiera sur les résultats sur la catégorie $\mathcal{V}$, du théorème II.17 et on utilisera la construction faite dans les parties I.3 et I.4.

La définition générale d'une algèbre commutative tordue se fait dans la catégorie monoïdale symétrique $\big(\,\mathbf{Fonct}\big(\,\mathbf{\Sigma}\,,\ \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\,\big),\otimes,\mathbb{C}^{(0)},\tau\,\big)$. Mais, si le corps de base est de caractéristique nulle, par le théorème II.17 on peut transporter la définition dans les autres catégories équivalentes et donc dans $\mathcal{V}$. On peut alors donner la définition suivante :

Définition. Une algèbre commutative tordue est un monoïde (aussi appelé algèbre) commutatif dans la catégorie monoïdale symétrique abstraite $\big(\,\mathcal{V},\otimes,\mathbb{1},\tau\,\big)$.

On peut alors détailler ce que devient cette définition dans les quatre catégories équivalentes à $\mathcal{V}$:

Proposition III.8. *Une algèbre commutative tordue dans* $\boldsymbol{Rep}(S_*)$ *correspond à une algèbre associative unitaire graduée*

$$A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$$

telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n *soit muni d'une action de* S_n *telle que, pour* $x \in A_n$ *et* $y \in A_m$, *si on note* $\tilde{\tau}_{n,m}$ *la permutation de* S_{n+m} *qui échange les* n *premières et les* m *dernières composantes on ait l'égalité*

$$\tilde{\tau}_{n,m}(x \cdot y) = y \cdot x.$$

Remarque. On retrouve ici la définition de l'introduction. Attention : Une algèbre commutative tordue est un monoïde commutatif dans une catégorie monoïdale, mais cela ne signifie pas que l'algèbre associée doit être commutative ! Il faut regarder attentivement à quoi correspond la commutativité du monoïde comme dans la preuve ci-dessous.

Démonstration. Un monoïde dans $(\mathbf{Rep}(S_*),\otimes,\mathbb{C}_0)$ est une suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de représentations de S_n munie d'une loi $\mu : V \otimes V \to V$ qui se décompose aussi selon le degré $\mu = (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec pour chaque entier n un morphisme de représentations

$$\mu_n : (V \otimes V)_n = \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Ind}_{S_i \times S_j}^{S_n}(V_i \otimes V_j) \to V_n$$

Si n et m sont deux entiers on peut restreindre l'application μ_{n+m} en une application

$$\mu_{n+m} : V_n \otimes V_m \to V_{n+m}$$

car l'espace vectoriel de la représentation $\mathrm{Ind}_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}}(V_n \otimes V_m)$ est $V_n \otimes V_m$. On peut alors construire la bijection

$$\begin{array}{ccc} \text{monoïdes dans } \mathbf{Rep}(S_*) & \leftrightarrow & \mathbb{C}\text{–algèbres graduées munies d'une action de } S_* \\ V = (V_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V_n \\ (A_n)_{n\in\mathbb{N}} & \leftarrow & A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n \end{array}$$

Une algèbre commutative tordue est un monoïde commutatif donc l'application μ est invariante par l'action de $\tau_{V,V}$. On a donc l'égalité

$$\mu \circ \tau_{V,V} = \mu.$$

Ceci donne pour deux entiers n et m et un élément $x \otimes y$ de base de $V_n \otimes V_m$ l'égalité :

$$\mu_{n+m}(x \otimes y) = \mu_{n+m} \circ (\tau_{V,V})_{n+m}(x \otimes y) = \mu_{n+m}(y \otimes x).$$

Enfin, le monoïde $V = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi muni d'une loi $\eta : \mathbb{C}_0 \to V$, on a donc une application $\eta_0 : (\mathbb{C}_0)_0 := \mathbb{C} \to V_0$. On peut alors voir que l'élément $\eta_0(1_{\mathbb{C}})$ de $V_0 \subset \oplus V_n$ est un élément neutre pour μ, et que donc μ est bien unitaire. ☐

Proposition III.9. *Dans la catégorie* $\mathbf{Fonct}(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}})$*, une algèbre commutative tordue est un foncteur* $A : \boldsymbol{\Sigma} \to \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$ *muni de deux lois* $\mu : A \otimes A \to A$ *et* $\eta : \mathbb{C}^{(0)} \to A$ *(des transformations naturelles) telles que* μ *soit associative, commutative et unitaire, ie : telle que les diagrammes suivants commutent :*

$$\begin{tikzcd} A(S) \otimes A(S') \otimes A(S'') \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \mu_{S',S''}"] \arrow[d, "\mu_{S,S'} \otimes \mathrm{id}"'] & A(S) \otimes A(S' \uplus S'') \arrow[r, "\mu_{S,S' \uplus S''}"] & A(S \uplus (S' \uplus S'')) \arrow[d, "A(\varphi)"] \\ A(S \uplus S') \otimes A(S) \arrow[r, "\mu_{S \uplus S', S''}"'] & A((S \uplus S') \uplus S'') \arrow[r, "A(\psi)"'] & A(S \uplus S' \uplus S'') \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A(S) \otimes A(S') \arrow[r, "\mu_{S,S'}"] \arrow[d, "\tau_{S,S'}"'] & A(S \uplus S') \arrow[d, "A(f)"] \\ A(S') \otimes A(S) \arrow[r, "\mu_{S',S}"'] & A(S' \uplus S) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{C} \otimes A(S) \arrow[r, "\eta_{\varnothing} \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\sim"'] & A(\varnothing) \otimes A(S) \arrow[d, "\mu_{\varnothing,S}"] \\ A(S) & A(\varnothing \uplus S) \arrow[l, "A(g)"] \end{tikzcd}$$

où les applications

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \varphi & : & (S \uplus S') \uplus S'' & \to & S \uplus S' \uplus S'' \\ \psi & : & (S \uplus S') \uplus S'' & \to & S \uplus S' \uplus S'' \\ f & : & S \uplus S' & \to & S' \uplus S \\ g & : & \varnothing \uplus S & \to & S \end{array} \right.$$

sont les bijections usuelles.

Démonstration. Un monoïde dans $(\mathbf{Fonct}(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}), \otimes, \mathbb{C}^{(0)})$ est un foncteur $F : \boldsymbol{\Sigma} \to \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$ muni d'une transformation naturelle $\mu : F \otimes F \to F$ et d'une application naturelle $\eta : \mathbb{C}^{(0)} \to A$. Or pour un ensemble fini S on a défini le produit tensoriel $F \otimes F$ par

$$(F \otimes F)(S) := \bigoplus_{S = X \uplus Y} F(X) \otimes F(Y).$$

Donc μ est une transformation naturelle qui associe à chaque ensemble fini S une application linéaire (flèche de $\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$)

$$\mu_S : \bigoplus_{S = X \uplus Y} F(X) \otimes F(Y) \to F(S)$$

Si on considère alors un couple (S, S') d'ensembles finis on peut restreindre l'application μ_S en une application linéaire

$$\mu_{S,S'} : F(S) \otimes F(S') \to F(S \uplus S')$$

Cette dernière application est bien naturelle et associative. De plus, une algèbre commutative tordue est un monoïde commutatif, donc l'application μ est invariante par l'action de $\tau_{F,F}$, et donc $\mu_{S,S'}$ aussi. Enfin, pour $S = \varnothing$, on a une application linéaire $\eta_\varnothing : \mathbb{C}^{(0)}(\varnothing) = \mathbb{C} \to A(\varnothing)$, alors l'élément $\mathbb{1} := \eta_\varnothing(1_\mathbb{C})$ de $A(\varnothing)$ est un élément neutre pour la loi μ. □

Proposition III.10. *Une algèbre commutative tordue dans la catégorie* $\boldsymbol{Rep}^{\mathrm{pol}}(\mathrm{GL})$ *est une algèbre commutative munie d'une action du groupe* $\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{C})$ *via des morphismes d'anneaux qui donne à cet anneaux une structure de représentation polynômiale telle que définie page 30.*

Démonstration. Dans $\mathbf{Rep}^{\mathrm{pol}}(\mathrm{GL})$ un monoïde commutatif est une représentation polynômiale V du groupe $\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{C})$ munie d'un opérateur d'entrelacement $\theta : V \otimes V \to V$ qui permet de mettre une structure d'algèbre sur l'espace vectoriel V. Puisque θ est un opérateur d'entrelacement, il commute avec les actions de $\mathbf{Rep}^{\mathrm{pol}}(\mathrm{GL})$ au départ et à l'arrivée. Ainsi l'action du groupe $\mathbf{Rep}^{\mathrm{pol}}(\mathrm{GL})$ se fait via des automorphismes d'anneaux de V. De plus, le monoïde V est supposé commutatif donc la loi d'algèbre donnée par θ est elle aussi commutative. □

Proposition III.11. *Une algèbre commutative tordue dans* $\mathbf{S}$ *est donc un foncteur polynômial qui associe à tout espace vectoriel un anneau commutatif unitaire.*

Démonstration. Dans $\mathbf{S}$ un monoïde commutatif est un foncteur polynômial $F : \mathbf{Vec}_\mathbb{C} \to Vec$ muni d'une transformation naturelle $\mu : F \otimes F \to F$. Alors pour tout espace vectoriel X, la transformation naturelle

$$\mu_X : \big(F \otimes F\big)(X) := F(X) \otimes F(X) \longrightarrow F(X)$$

fournit une multiplication, et donc une structure d'anneau sur $F(X)$. Enfin, puisque ce monoïde F est supposé commutatif, il s'en suit que l'anneau $F(X)$ est lui aussi commutatif pour tout espace vectoriel X. Enfin, F est aussi muni d'une loi $\eta : C_\mathbb{C} \to F$, on a alors une application $\eta_X : \mathbb{C} \to F(X)$, ce qui donne l'élément $\eta_X(1_\mathbb{C}) \in F(X)$. On vérifie aisément que cet élément est neutre pour la multiplication μ_X.

□

Définition. Si A est une algèbre commutative tordue, un A-module est un module à gauche sur le monoïde A de la catégorie $\mathcal{V}$ comme définit à la section I.4. C'est donc un objet V de $\mathcal{V}$ muni d'une action à gauche de A.

Remarque. Comme pour la définition précédente, on définit les A-modules dans la catégorie $\mathbf{Fonct}\big(\mathbf{\Sigma}\,,\ \mathbf{Vec}_\mathbb{C}\big)$ mais par le théorème II.17, lorsque le corps de base est de caractéristique nulle, la définition se transporte dans la catégorie $\mathcal{V}$ et les autres catégories équivalentes.

On peut alors ré-exprimer cette définition dans les quatre catégories équivalentes à $\mathcal{V}$:

Proposition III.12. *Dans* $\mathbf{Fonct}\big(\mathbf{\Sigma}\,,\ \boldsymbol{Vec}_\mathbb{C}\big)$ *un module sur l'algèbre commutative tordue* A *est un foncteur* $M : \mathbf{\Sigma} \to \boldsymbol{Vec}_\mathbb{C}$ *muni d'une loi (une transformation naturelle)* $\nu : A \otimes M \to M$ *telle que le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes M \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\nu"] \arrow[d, "\mu\otimes\mathrm{id}"'] & A \otimes M \arrow[d, "\nu"] \\ A \otimes M \arrow[r, "\nu"'] & M \end{tikzcd}.$$

Comme avant cette loi se restreint pour un couple d'ensembles finis (S, S') *en une application linéaire naturelle*

$$\nu_{S,S'} : A(S) \otimes M(S') \to M(S \sqcup S').$$

Proposition III.13. *Dans* $\boldsymbol{Rep}(S_*)$ *un module sur l'algèbre commutative* $V = \oplus V_n$ *est un* V*-module gradué au sens usuel muni d'une action de* S_n *sur* M_n *telle que l'application* $V_n \otimes M_m \to M_{n+m}$ *commute avec l'action de* $S_n \times S_m$ *au départ et à l'arrivée.*

Démonstration. Un module sur l'algèbre commutative tordue $V = \oplus V_n$ dans $\mathbf{Rep}(S_*)$ est une suite de représentation $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muni d'une suite de morphismes de représentations $\oplus_{i+j=n}\mathrm{Ind}\ V_i \otimes M_j \to M_n$. On peut alors poser $M = \oplus M_n$ et M est un V-module gradué au sens usuel muni d'une action des groupes symétriques. De plus, les opérateurs d'entrelacement se restreignent en des morphismes $V_n \otimes M_m \to M_{m+n}$ qui commutent avec l'action de $S_n \times S_m$ au départ et à l'arrivée. □

Proposition III.14. *Dans $\boldsymbol{Rep}^{\mathrm{pol}}(\mathrm{GL})$ un module sur l'algèbre commutative tordue V est un V-module M muni d'une structure de représentation polynômiale du groupe $\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{C})$ compatible avec la structure d'algèbre.*

Démonstration. En effet, M est un objet de $\mathbf{Rep}^{\mathrm{pol}}(\mathrm{GL})$, donc est une représentation polynômiale de $\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{C})$ et il est muni d'un morphisme $\mu : V \otimes M \to M$ dans $\mathbf{Rep}^{\mathrm{pol}}(\mathrm{GL})$, donc un opérateur d'entrelacement.

□

Proposition III.15. *Dans* **S** *un module sur l'algèbre commutative tordue F est un foncteur $M : \boldsymbol{Vec}_{\mathbb{C}} \to \boldsymbol{Vec}_{\mathbb{C}}$ qui envoie tout espace vectoriel X sur un $F(X)$-module $M(X)$ via un morphisme naturel*

$$\big(F \otimes M\big)(X) \coloneqq F(X) \otimes M(X) \longrightarrow M(X).$$

Exemple. Dans la catégorie $\mathbf{Fonct}\big(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\big)$, si $V : \boldsymbol{\Sigma} \to \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$ est un foncteur et A est une algèbre commutative tordue alors le foncteur $A \otimes V$ est un A-module via l'application

$$\mu \otimes id : A \otimes A \otimes M \to A \otimes M.$$

Proposition III.16. *Si A est une algèbre commutative tordue vu dans la catégorie $\mathbf{Fonct}\big(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{Vec}_{\mathbb{C}}\big)$, on note A-**Mod** la catégorie dont les objets sont les A-modules et les morphismes sont les transformations naturelles qui entrelacent les multiplication des modules. Alors la catégorie A-**Mod** est une catégorie abélienne.*

III.5 Un exemple : L'algèbre commutative tordue $\mathrm{Sym}(M^{(1)})$

On va détailler dans cette partie un exemple fondamental : l'algèbre commutative tordue $\mathrm{Sym}(M^{(1)})$ pour M un $\mathbb{C}$-module libre. On commence par construire sa définition dans la catégorie $\mathbf{Fonct}\big(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\big)$.

Lemme III.17. *Pour deux entiers n et k, l'objet $\big(M^{(k)}\big)^{\otimes n}$ de $\mathbf{Fonct}\big(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{Vec}_{\mathbb{C}}\big)$ est défini par*

$$\big(M^{(k)}\big)^{\otimes n}(S) = \bigoplus_{S = X_1 \uplus \cdots \uplus X_n} \big(M^{(k)}(X_1)\big) \otimes \cdots \otimes \big(M^{(k)}(X_n)\big),$$

où $M^{(k)}$ est l'objet de $\mathbf{Fonct}\big(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{Vec}_{\mathbb{C}}\big)$ défini page 25 associé à M pour l'entier k.

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur k avec la définition du produit tensoriel dans la catégorie $\mathbf{Fonct}\big(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\big)$. □

Remarque. En utilisant la définition du produit tensoriel de la catégorie $\mathbf{Fonct}\big(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\big)$, ainsi que la définition de $M^{(k)}$ donnée sur les objets par

$$\begin{array}{cccc} M^{(k)} & : & \boldsymbol{\Sigma} & \to & \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} \\ & & S & \mapsto & \begin{cases} M & \text{si } |S| = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array},$$

et qui envoie toute flèche sur l'identité, on obtient

$$\begin{aligned} \big(M^{(k)}\big)^{\otimes n}(S) &= \bigoplus_{S = X_1 \uplus \cdots \uplus X_n} \big(M^{(k)}(X_1)\big) \otimes \cdots \otimes \big(M^{(k)}(X_n)\big) \\ &= \begin{cases} \displaystyle\bigoplus_{S = X_1 \uplus \cdots \uplus X_n} M^{\otimes n} & \text{si } |X_1| = \cdots = |X_n| = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \big(M^{\otimes n}\big)^{\oplus \binom{k}{k} \cdot \binom{2k}{k} \cdot \binom{3k}{k} \cdots \binom{nk}{k} \cdot} & \text{si } |S| = nk \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \end{aligned}$$

Exemple. Pour $n = 2$, on utilise le produit tensoriel dans $\mathbf{Fonct}\big(\mathbf{\Sigma}\,,\,\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\big)$ pour passer de $M^{(k)}$ à $M^{(k)} \otimes M^{(k)}$:

$$\begin{array}{rcl} M^{(k)} \otimes M^{(k)} \ : \ \mathbf{\Sigma} & \to & \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} \\ S & \mapsto & \begin{cases} \big(M^{\otimes 2}\big)^{\oplus\binom{2k}{k}} & \text{si } |S| = 2k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

car par définition on a

$$\begin{aligned} \big(M^{(k)} \otimes M^{(k)}\big)(S) &= \bigoplus_{S = X \uplus Y} M^{(k)}(X) \otimes M^{(k)}(Y) \\ &= \begin{cases} \bigoplus_{S = X \uplus Y} M \otimes M & \text{si } |X| = |Y| = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \big(M^{\otimes 2}\big)^{\oplus\binom{2k}{k}} & \text{si } |S| = 2k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \end{aligned}$$

Une flèche $f : S \to S'$ s'envoie alors sur le morphisme

$$\big(M^{(k)} \otimes M^{(k)}\big)(f) \ : \ \bigoplus_{S = X \uplus Y} M^{(k)}(X) \otimes M^{(k)}(Y) \to \bigoplus_{S' = X' \uplus Y'} M^{(k)}(X') \otimes M^{(k)}(Y')$$

qui envoie $M^{(k)}(X) \otimes M^{(k)}(Y)$ sur $M^{(k)}\big(f(X)\big) \otimes M^{(k)}\big(f(Y)\big)$.

Pour $n = 3$, on itère le processus et on obtient un nouvel objet

$$\begin{array}{rcl} M^{(k)} \otimes M^{(k)} \otimes M^{(k)} \ : \ \mathbf{\Sigma} & \to & \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} \\ S & \mapsto & \begin{cases} \big(M^{\otimes 3}\big)^{\oplus\binom{2k}{k}\cdot\binom{3k}{k}} & \text{si } |S| = 3k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

car

$$\begin{aligned} \big(M^{(k)} \otimes M^{(k)} \otimes M^{(k)}\big)(S) &= \bigoplus_{S = X \uplus Y} \big(M^{(k)} \otimes M^{(k)}\big)(X) \otimes M^{(k)}(Y) \\ &= \bigoplus_{S = (Z \uplus T) \uplus Y} \big(M^{(k)}(Z) \otimes M^{(k)}(T)\big) \otimes M^{(k)}(Y) \\ &= \begin{cases} \bigoplus_{S = (Z \uplus T) \uplus Y} \big(M \otimes M\big) \otimes M & \text{si } |Z| = |T| = |Y| = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (\, M^{\otimes 3}\,)^{\oplus\binom{2k}{k}\cdot\binom{3k}{k}} & \text{si } |S| = 3k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \end{aligned}$$

Définition. Pour $k = 1$ on obtient alors l'objet $\big(M^{(1)}\big)^{\otimes n}$ défini par

$$\begin{array}{rcl} \big(M^{(1)}\big)^{\otimes n} \ : \ \mathbf{\Sigma} & \to & \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} \\ S & \mapsto & \begin{cases} \big(M^{\otimes n}\big)^{\oplus n!} = \bigoplus_{S = \{x_1\} \uplus \cdots \uplus \{x_n\}} M^{(1)}(\{x_1\}) \otimes \cdots \otimes M^{(1)}(\{x_n\}) & \text{si } |S| = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} .$$

Remarque. Par définition du produit tensoriel dans $\mathbf{Fonct}\big(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\big)$, si on a une bijection $f : S \to S'$ entre ensembles de cardinaux n, alors l'application obtenue par fonctorialité

$$\big(M^{(1)}\big)^{\otimes n}(f) : \bigoplus_{S = \{x_1\} \uplus \cdots \uplus \{x_n\}} M^{(1)}(\{x_1\}) \otimes \cdots \otimes M^{(1)}(\{x_n\}) \longrightarrow \bigoplus_{S' = \{x'_1\} \uplus \cdots \uplus \{x'_n\}} M^{(1)}(\{x'_1\}) \otimes \cdots \otimes M^{(1)}(\{x'_n\})$$

est définie, si on note $\alpha^{\{x_i\}}$ des éléments de base de $M^{(1)}(\{x_i\})$, par

$$\begin{array}{ccc} M^{(1)}(\{x_1\}) \otimes \cdots \otimes M^{(1)}(\{x_n\}) & \longrightarrow & M^{(1)}(\{f(x_1)\}) \otimes \cdots \otimes M^{(1)}(\{f(x_n)\}) \\ \alpha^{\{x_1\}} \otimes \cdots \otimes \alpha^{\{x_n\}} & \mapsto & \alpha^{\{f(x_1)\}} \otimes \cdots \otimes \alpha^{\{f(x_n)\}} \end{array} .$$

En particulier, pour $S' = S$ l'application $\big(M^{(1)}\big)^{\otimes n}(f)$ permute simplement les termes de la somme directe.

Remarque. Par ailleurs, on a vu dans la remarque page 40 que τ définit une action de S_n sur $\left(M^{(1)}\right)^{\otimes n}$ donnée, pour l'élément $\sigma \in S_n$ et pour un ensemble fini $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$, sur la composante

$$M^{(1)}(\{x_1\}) \otimes \cdots \otimes M^{(1)}(\{x_n\}) \qquad \text{du module } \left(M^{(1)}\right)^{\otimes n}(S)$$

par

$$\begin{array}{ccc} M^{(1)}(\{x_1\}) \otimes \cdots \otimes M^{(1)}(\{x_n\}) & \to & M^{(1)}(\{x_{\sigma(1)}\}) \otimes \cdots \otimes M^{(1)}(\{x_{\sigma(n)}\}) \\ w_{x_1} \otimes \cdots \otimes w_{x_n} & \mapsto & w_{x_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes w_{x_{\sigma(n)}} \end{array}.$$

On voit alors que l'application τ définit bien une action de S_n sur $\left(M^{(1)}\right)^{\otimes n}$ qui permute les facteurs de la somme directe en permutant les termes du produit tensoriel. Ceci nous permet alors de donner la définition suivante :

Définition. La n-ème puissance symétrique de $M^{(1)}$ est l'objet $\mathrm{Sym}^n\left(M^{(1)}\right)$ de la catégorie **Fonct** $(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}})$ défini par

$$\mathrm{Sym}^n\left(M^{(1)}\right) = \left(M^{(1)}\right)^{\otimes n} \Big/_{<\text{ action de } S_n \text{ via } \tau >}.$$

On peut développer cette définition de manière plus explicite :

Proposition III.18. *Soit M est un $\mathbb{C}$-module libre de base $(v_1, \ldots, v_d)$, si S est de cardinal différent de n on a*

$$\mathrm{Sym}^n\left(M^{(1)}\right)(S) = 0.$$

Mais si S est un ensemble de cardinal n, noté $S = S_1 \uplus \cdots \uplus S_n$ avec $|S_i| = 1$, alors la famille

$$\left(\overline{v_{i_1}^{S_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_n}^{S_n}} = \ldots = \overline{v_{i_{\sigma(1)}}^{S_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes v_{i_{\sigma'(n)}}^{S_{\sigma(n)}}} \right)_{1 \le i_1, \ldots, i_n \le d}$$

est une base du module $\mathrm{Sym}^n\left(M^{(1)}\right)(S)$ que l'on note $\mathscr{B}$.

Démonstration. On commence par ré-exprimer le foncteur $\left(M^{(1)}\right)^{\otimes n}$. Pour un ensemble fini S, s'il est de cardinal différent de n tout est nul, sinon on note ses éléments $S = \{y_1, \ldots, y_n\}$ et, en notant M^{S_i} pour $M^{(1)}(S_i) = M$, on peut alors écrire

$$\begin{aligned} \left(M^{(1)}\right)^{\otimes n}(S) &= \bigoplus_{S = S_1 \uplus \cdots \uplus S_n} M^{(1)}(S_1) \otimes \cdots \otimes M^{(1)}(S_n) \\ &= \bigoplus_{S = S_1 \uplus \cdots \uplus S_n} M^{S_1} \otimes \cdots \otimes M^{S_n} \end{aligned}$$

Il est clair qu'ici les sous-ensembles S_i sont de cardinal 1, on a donc $S_i = \{y\}$ pour y un élément de S. On note alors v^{S_i} pour l'élément $v \in M$ vu dans M^{S_i}, et si $(v_1, \ldots, v_d)$ est une base du $\mathbb{C}$-module libre M, alors la famille

$$\left(v_{i_1}^{S_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_n}^{S_n} \right)_{1 \le i_1, \ldots, i_n \le d}$$

forme une base du $\mathbb{C}$-module

$$M^{S_1} \otimes \cdots \otimes M^{S_n}.$$

Avec ces notations, l'action de S_n sur $\left(M^{(1)}\right)^{\otimes n}$ via τ s'exprime simplement. En effet, l'action de $\sigma' \in S_n$ sur la composante associée à la décomposition $S = S_1 \uplus \cdots \uplus S_n$ s'écrit

$$\begin{array}{ccc} M^{S_1} \otimes \cdots \otimes M^{S_n} & \longrightarrow & M^{S_{\sigma'(1)}} \otimes \cdots \otimes M^{S_{\sigma'(n)}} \\ v_{i_1}^{S_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_n}^{S_n} & \mapsto & v_{i_{\sigma'(1)}}^{S_{\sigma'(1)}} \otimes \ldots \otimes v_{i_{\sigma'(n)}}^{S_{\sigma'(n)}} \end{array}.$$

En revenant alors à la définition de $\mathrm{Sym}^n\left(M^{(1)}\right)$, on voit que dans le quotient

$$\mathrm{Sym}^n\left(M^{(1)}\right)(S) = \left(M^{(1)}\right)^{\otimes n}(S) \Big/_{<\tau>} = \bigoplus_{S = S_1 \uplus \cdots \uplus S_n} M^{S_1} \otimes \cdots \otimes M^{S_n} \Big/_{<\tau>}$$

les éléments de base

$$v_{i_1}^{S_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_n}^{S_n}$$

du facteur $M^{S_1} \otimes \cdots \otimes M^{S_n}$, associé à une décomposition $S = S_1 \uplus \cdots \uplus S_n$, sont identifiés aux éléments de base

$$v_{i_1}^{S_1'} \otimes \ldots \otimes v_{i_n}^{S_n'}$$

du facteur $M^{S_1'} \otimes \cdots \otimes M^{S_n'}$, associé à une autre décomposition $S = S_1' \uplus \cdots \uplus S_n'$, via la relation

$$\overline{v_{i_{\sigma^{-1}(1)}}^{S_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_{\sigma^{-1}(n)}}^{S_n}} = \overline{v_{i_1}^{S_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes v_{i_n}^{S_{\sigma(n)}}} = \overline{v_{i_1}^{S_1'} \otimes \ldots \otimes v_{i_n}^{S_n'}} \tag{5}$$

pour l'unique permutation $\sigma \in S_n$ telle que $S_{\sigma(i)} = S_i'$ pour $1 \leq i \leq n$. On voit alors bien, qu'en passant au quotient, les bases de tous les termes de la somme directe

$$\bigoplus_{S = S_1 \uplus \cdots \uplus S_n} M^{S_1} \otimes \cdots \otimes M^{S_n}$$

s'identifient entre elles, et fournissent la base du quotient annoncée. □

Remarque. On a alors un isomorphisme (en tant que $\mathbb{C}$-modules uniquement!) pour n'importe quelle décomposition $S = S_1 \uplus \cdots \uplus S_n$

$$M^{\otimes n} = M^{S_1} \otimes \cdots \otimes M^{S_n} \cong \mathrm{Sym}^n \left(M^{(1)} \right)(S)$$

donné par le passage au quotient de la base dans un sens, et dans l'autre sens, par le choix d'un représentant des vecteurs de base issu de la composante associé à la décomposition $S = S_1 \uplus \cdots \uplus S_n$.

Proposition III.19. *on a une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Set}} \left(S \,,\, [d] \right) \cong \mathscr{B}.$$

Démonstration. A l'application $g : S \to [d]$ correspond le vecteur de base

$$\overline{v_{g(y_1)}^{\{y_1\}} \otimes \cdots \otimes v_{g(y_n)}^{\{y_n\}}},$$

et inversement au vecteur

$$\overline{v_{i_1}^{\{y_1\}} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}^{\{y_n\}}}$$

on associe l'application $\tilde{g} : S \to [d]$ qui envoie y_k sur $\tilde{g}(y_k) = i_k$. □

Remarque. Il reste encore à décrire ce que fait le foncteur

$$\mathrm{Sym}^n \left(M^{(1)} \right) = \left(M^{(1)} \right)^{\otimes n} \Big/ _{< \text{ action de } S_n \text{ via } \tau >}$$

sur les flèches.

Or si $f : S \to S'$ est une bijection, on a vu que le foncteur $\left(M^{(1)} \right)^{\otimes n}$ envoie cette flèche de $\mathbf{\Sigma}$ sur l'isomorphisme définit par

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{S = \{x_1\} \uplus \cdots \uplus \{x_n\}} M^{(1)}(\{x_1\}) \otimes \cdots \otimes M^{(1)}(\{x_n\}) & \longrightarrow & \bigoplus_{S = \{x_1\} \uplus \cdots \uplus \{x_n\}} M^{(1)}(\{f(x_1)\}) \otimes \cdots \otimes M^{(1)}(\{f(x_n)\}) \\ \alpha^{\{x_1\}} \otimes \cdots \otimes \alpha^{\{x_n\}} & \mapsto & \alpha^{\{f(x_1)\}} \otimes \cdots \otimes \alpha^{\{f(x_n)\}} \end{array}.$$

Cette application passe au quotient, et l'application induite est exactement $\mathrm{Sym}^n \left(M^{(1)} \right)(f)$ qui est donc définie par

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{Sym}^n \left(M^{(1)} \right)(f) & : & \mathrm{Sym}^n \left(M^{(1)} \right)(S) & \to & \mathrm{Sym}^n \left(M^{(1)} \right)(S') \\ & & \overline{v_{i_1}^{\{y_1\}} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}^{\{y_n\}}} & \mapsto & \overline{v_{i_1}^{\{f(y_1)\}} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}^{\{f(y_n)\}}} \end{array}.$$

Proposition III.20. *On a une action de* $\mathrm{Aut}(S)$ *sur* $\mathrm{Sym}^n\big(M^{(1)}\big)\big(S\big)$ *décrite comme suit :*

Si $\sigma \in \mathrm{Aut}(S)$, *et si on note* $\tilde{\sigma} \in S_n$ *la permutation telle que* $\sigma(y_i) = y_{\tilde{\sigma}(i)}$, *alors l'action de* σ *envoie le vecteur de base*

$$\overline{v_{i_1}^{\{y_1\}} \otimes \ldots \otimes v_{i_n}^{\{y_n\}}}$$

sur le vecteur "permuté selon $\tilde{\sigma}^{-1}$*"*

$$\overline{v_{i_{\tilde{\sigma}^{-1}(1)}}^{\{y_1\}} \otimes \ldots \otimes v_{i_{\tilde{\sigma}^{-1}(n)}}^{\{y_n\}}}.$$

Démonstration. On applique la remarque précédente pour $\sigma : S \to S$, et alors l'application $\mathrm{Sym}^n\big(M^{(1)}\big)\big(\sigma\big)$ envoie l'élément de base

$$\overline{v_{i_1}^{\{y_1\}} \otimes \ldots \otimes v_{i_n}^{\{y_n\}}} \in \mathrm{Sym}^n\big(M^{(1)}\big)\big(S\big)$$

sur l'élément

$$\overline{v_{i_1}^{\{\sigma(y_1)\}} \otimes \ldots \otimes v_{i_n}^{\{\sigma(y_n)\}}} = \overline{v_{i_1}^{\{y_{\tilde{\sigma}(1)}\}} \otimes \ldots \otimes v_{i_n}^{\{y_{\tilde{\sigma}(n)}\}}} = \overline{v_{i_{\tilde{\sigma}^{-1}(1)}}^{\{y_1\}} \otimes \ldots \otimes v_{i_{\tilde{\sigma}^{-1}(n)}}^{\{y_n\}}},$$

où la dernière égalité est la relation (5) obtenue dans le quotient page 49. □

Lemme III.21. *Si le module* M *est de dimension* $d = 1$*, alors l'action de* $\mathrm{Aut}(S)$ *sur* $\mathrm{Sym}^n\big(M^{(1)}\big)\big(\sigma\big)$ *est triviale.*

Démonstration. On remarque aussi que, si le module M est de dimension d égale à 1 (*ie :* $M \cong \mathbb{C}$), alors pour tout ensemble S de dimension n le quotient $\mathrm{Sym}^n\big(M^{(1)}\big)\big(S\big)$ est de dimension 1, de base le vecteur

$$\overline{v_1^{\{y_1\}} \otimes \ldots \otimes v_1^{\{y_n\}}}.$$

On voit alors que l'action de $\mathrm{Aut}(S)$ sur $\mathrm{Sym}^n\big(M^{(1)}\big)\big(\sigma\big)$ est triviale dans ce cas car le vecteur de base s'envoie sur lui-même. □

Définition. La puissance symétrique de $M^{(1)}$ est l'objet de $\mathbf{Fonct}\big(\mathbf{\Sigma}\,,\,\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\big)$ décrit par

$$\mathrm{Sym}\big(M^{(1)}\big) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Sym}^n\big(M^{(1)}\big).$$

Proposition III.22. *Ce foncteur est alors donné par*

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{Sym}\big(M^{(1)}\big) & : & \mathbf{\Sigma} & \to & \boldsymbol{Vec}_{\mathbb{C}} \\ & & S & \mapsto & \mathrm{Sym}\big(M^{(1)}\big)(S) \cong M^{\otimes|S|} \end{array},$$

où l'isomorphisme est donné par le choix de représentants d'une base du quotient (cf. remarque page 49).

Démonstration. On a en effet les égalités

$$\mathrm{Sym}\big(M^{(1)}\big)(S) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Sym}^n\big(M^{(1)}\big)(S) = \mathrm{Sym}^{|S|}\big(M^{(1)}\big)(S),$$

□

Remarque. Le $\mathbb{C}$-module $\mathrm{Sym}\big(M^{(1)}\big)\big(S\big)$ est encore muni d'une action de $\mathrm{Aut}(S)$ qui est issue de celle sur $\mathrm{Sym}^n\big(M^{(1)}\big)\big(S\big)$ et est décrite de la même manière.

Définition. La transformation naturelle

$$\nu : \mathrm{Sym}\big(M^{(1)}\big) \otimes \mathrm{Sym}\big(M^{(1)}\big) \longrightarrow \mathrm{Sym}\big(M^{(1)}\big)$$

est définie pour un ensemble fini S par

$$\begin{array}{cccccc} \nu_S & : & \big(\mathrm{Sym}\big(M^{(1)}\big) \otimes \mathrm{Sym}\big(M^{(1)}\big)\big)(S) = \bigoplus_{S = X\cup Y} M^{\otimes|X|} \otimes M^{\otimes|Y|} & \to & M^{\otimes|S|} = \mathrm{Sym}\big(M^{(1)}\big)(S) \\ & & (\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{|X|}) \otimes (\beta_1 \otimes \cdots \otimes \beta_{|Y|}) & \mapsto & \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{|X|} \otimes \beta_1 \otimes \cdots \otimes \beta_{|Y|} \end{array}.$$

Définition. La transformation naturelle

$$\eta\,:\,\mathbb{C}^{(0)}\longrightarrow \mathrm{Sym}\left(M^{(1)}\right)$$

est définie par $\eta_\varnothing := \mathrm{id}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ et $\eta_S = 0$ si S n'est pas l'ensemble vide.

Lemme III.23. *Le foncteur* $\mathrm{Sym}\left(M^{(1)}\right)$ *muni des transformations naturelles* ν *et* η *est une algèbre commutative tordue dans la catégorie* $\mathbf{Fonct}\left(\,\mathbf{\Sigma}\,,\ \boldsymbol{Vec}_{\mathbb{C}}\,\right)$.

Proposition III.24. *Dans la catégorie* $\boldsymbol{Rep}(S_*)$, *l'algèbre commutative tordue* $\mathrm{Sym}\left(M^{(1)}\right)$ *correspond à l'algèbre tensorielle sur* M *:*

$$T(M) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M^{\otimes n},$$

avec l'action de $\sigma\in S_n$ *sur* $M^{\otimes n}$ *donnée par la permutation des termes du produit tensoriel selon la permutation* σ^{-1} *(si* $M\cong\mathbb{C}$ *on a donc que des actions triviales).*

Démonstration. Pour passer la définition d'une catégorie à une autre on utilise le théorème II.17, et en particulier le foncteur

$$\begin{array}{cccc} G & : & \mathbf{Fonct}\left(\,\mathbf{\Sigma}\,,\ \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\,\right) & \to & \mathbf{Rep}(S_*) \\ & & V & \mapsto & \left(\,V(\,[n]\,)\,\right)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}.$$

On a donc

$$G\big(\,\mathrm{Sym}\left(M^{(1)}\right)\big)\cong\left(M^{\otimes n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

De plus, via la bijection définie page 44 cela correspond à l'algèbre associative unitaire graduée

$$T(M) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M^{\otimes n},$$

où l'action de $\sigma\in S_n$ sur $M^{\otimes n}$ est donnée par la permutation des termes du produit tensoriel selon σ^{-1}. □

Proposition III.25. *Dans la catégorie* $\mathbf{S}$, *l'algèbre commutative tordue* $\mathrm{Sym}\left(M^{(1)}\right)$ *correspond au foncteur*

$$\mathrm{Sym}\left(M^{(1)}\right)=\bigoplus_{n\geq 0}\left(\,(-)^{\otimes n}\otimes\left(M^{\otimes n}\right)\,\right)_{S_n}.$$

Démonstration. On part de sa définition dans la catégorie $\mathbf{Rep}(S_*)$ qui est :

$$\mathrm{Sym}\left(M^{(1)}\right)=\left(M^{\otimes n}\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

puis on utilise le foncteurs du théorème II.17

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Rep}(S_*) & \to & \mathbf{S} \\ V=(V_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \bigoplus_{n\geq 0} F_{V_n}=\bigoplus_{n\geq 0}\left((-)^{\otimes n}\otimes V_n\right)_{S_n} \end{array}.$$

qui donne l'équivalence de catégories. Dans la catégorie $\mathbf{S}$ l'algèbre commutative tordue devient donc

$$\mathrm{Sym}\left(M^{(1)}\right)=\bigoplus_{n\geq 0}\left(\,(-)^{\otimes n}\otimes\left(M^{\otimes n}\right)\,\right)_{S_n}.$$

□

Proposition III.26. *Dans la catégorie* $\boldsymbol{Rep}^{\mathrm{pol}}(\mathrm{GL})$ *l'algèbre commutative tordue* $\mathrm{Sym}\left(M^{(1)}\right)$ *est la représentation du groupe* $\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{C})$ *donnée par*

$$\mathrm{Sym}\left(M^{(1)}\right)=\mathrm{Sym}\left(\mathbb{C}^\infty\otimes M\,\right).$$

Démonstration. On utilise encore le foncteurs du théorème II.17 et on obtient

$$\mathrm{Sym}\big(M^{(1)}\big) = \bigoplus_{n\geq 0} \big(\, (\mathbb{C}^{\infty})^{\otimes n} \otimes (M^{\otimes n})\,\big)_{S_n}.$$

Or on a des isomorphismes

$$\bigoplus_{n\geq 0} \big(\, (\mathbb{C}^{\infty})^{\otimes n} \otimes (M^{\otimes n})\,\big)_{S_n} = \bigoplus_{n\geq 0} {(\mathbb{C}^{\infty} \otimes M)^{\otimes n}}\big/_{< S_n >} =: \mathrm{Sym}\,(\mathbb{C}^{\infty} \otimes M\,)$$

car S_n agit par permutation des produits tensoriels, avec l'action de $\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{C})$ donnée par

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(\infty,\mathbb{C}) \times \big(\mathbb{C}^{\infty} \otimes M\big)^{\otimes n} & \to & \big(\mathbb{C}^{\infty} \otimes M\big)^{\otimes n} \\ \big(\, P\,,\, (x_1 \otimes m_1)\otimes, \ldots, \otimes(x_n \otimes m_n)\,\big) & \mapsto & \big(\,(P\cdot x_1) \otimes m_1\,\big)\otimes, \ldots, \otimes\big(\,(P\cdot x_n) \otimes m_n\,\big) \end{array}.$$

□

Exemple. Un cas particulier est pour $M = \mathbb{C}$: on obtient l'algèbre commutative tordue

$$\mathrm{Sym}\big(\,\mathbb{C}^{(1)}\,\big) = \mathrm{Sym}\big(\,\mathbb{C}^{\infty} \otimes \mathbb{C}\,\big) = \mathrm{Sym}\big(\,\mathbb{C}^{\infty}\,\big) = \bigoplus_{k\geq 0} {(\mathbb{C}^{\infty})^{\otimes k}}\big/_{< x\otimes y - y \otimes x >} \cong \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, \ldots]$$

où l'isomorphisme est donné par

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Sym}\big(\,\mathbb{C}^{\infty}\,\big) & = & {\bigoplus_{n\geq 0}\big(\bigoplus_{k\geq 0} \mathbb{C}\, e_k\big)^{\otimes n}}\Big/_{\langle x \otimes y - y \otimes x\rangle} & \to & \mathbb{C}\big[x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\big] \\ & & \sum_{n\geq 0}\big(\sum_{k\geq 0} \lambda_k^n e_k\big)^{\otimes n} & \mapsto & \sum_{n\geq 0}\big(\sum_{k\geq 0} \lambda_k^n x_k\big)^{n} \end{array}.$$

L'action de $\mathrm{GL}(\infty,\mathbb{C})$ est alors donnée par

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(\infty,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, \ldots] & \to & \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, \ldots] \\ \big(M, P(x_1, \ldots, x_n, \ldots)\big) & \mapsto & P\big(\,M \cdot (x_1, \ldots, x_n, \ldots)\big) \end{array}.$$

Remarque. On a vu que l'objet $\mathbb{C}_{<n>}$ (défini page 36) correspond, dans la catégorie $\mathbf{Rep}^{\mathrm{pol}}(\mathrm{GL})$, à la représentation $(\mathbb{C}^{\infty})^{\otimes n}$. On a alors pour $n = 1$:

$$\mathrm{Sym}(\mathbb{C}_{<1>}) = \mathrm{Sym}\big(\,(\mathbb{C}^{\infty})^{\otimes 1}\,\big) = \mathrm{Sym}\big(\,\mathbb{C}^{\infty}\,\big) = \mathrm{Sym}\big(\,\mathbb{C}^{(1)}\,\big).$$

En particulier, on voit dans la catégorie $\mathbf{Rep}^{\mathrm{pol}}(\mathrm{GL})$ que l'algèbre commutative tordue $\mathrm{Sym}\big(\,\mathbb{C}^{(1)}\,\big)$ correspond à la puissance symétrique de l'objet $\mathbb{C}_{<1>}$, ce qui justifie la notation.

III.6 Une équivalence de catégories

Remarque. On commence par faire quelques rappels et par poser quelques notations. Dans cette partie on considère d un entier et M un $\mathbb{C}$-module tel que $M \cong \mathbb{C}^d$ (un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension d), on regarde alors l'algèbre commutative tordue $\mathrm{Sym}\big(M^{(1)}\big)$ dans la catégorie $\mathbf{Fonct}\big(\,\mathbf{\Sigma}\,,\,\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\,\big)$ que l'on notera A pour simplifier. Elle correspond alors au foncteur

$$A = \mathrm{Sym}\big(M^{(1)}\big) : \quad \begin{tikzcd} \mathbf{\Sigma} \arrow[r] & \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} \\ S \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\sigma"'] & M^{\otimes |S|} \arrow[d, "\mathrm{Sym}\left(M^{(1)}\right)(\sigma)"] \\ S' \arrow[r, mapsto] & M^{\otimes |S|} \end{tikzcd}$$

avec $\mathrm{Sym}\big(M^{(1)}\big)(\sigma)$ définie page 49.

De plus, on rappelle que dans la catégorie $\mathbf{Fonct}\big(\,\mathbf{\Sigma}\,,\,\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}\,\big)$ un $\mathrm{Sym}(M^{(1)})$-module est un foncteur $F : \mathbf{\Sigma} \to \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$ muni d'une transformation naturelle $\mu : A \otimes F \to F$ telle que le diagramme usuel

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes F \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \mu"] \arrow[d, "\nu \otimes \mathrm{id}"'] & A \otimes F \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes F \arrow[r, "\mu"] & F \end{tikzcd}$$

commute pour ν la multiplication par concaténation définie page 50.

Enfin, on considère $(x_1, \dots, x_d)$ une base de M comme module qui donne un isomorphisme $M \cong \mathbb{C}^d$. Alors, pour un ensemble fini $S = \{y_1, \dots, y_{|S|}\}$, on a (*cf.* proposition III.18) une base

$$\left(\overline{x_{i_1}^{\{y_1\}} \otimes \cdots \otimes x_{i_{|S|}}^{\{y_{|S|}\}}}\right)_{1 \le i_1, \dots, i_{|S|} \le d} \qquad \text{du } \mathbb{C}\text{-module } \mathrm{Sym}\big(M^{(1)}\big)(S),$$

et pour simplifier on notera dans la suite cette famille

$$\left(w_j\right)_{j \in J^S} := \left(\overline{x_{i_1}^{\{y_1\}} \otimes \cdots \otimes x_{i_{|S|}}^{\{y_{|S|}\}}}\right)_{1 \le i_1, \dots, i_{|S|} \le d}.$$

Rigoureusement, on a donc posé

$$J^S = \{(i_1, \dots, i_{|S|}) \,|\, 1 \le i_1, \dots, i_{|S|} \le d\}$$

et pour $j = (i_1, \dots, i_{|S|}) \in J^S$ on a noté $w_j = \overline{x_{i_1}^{\{y_1\}} \otimes \cdots \otimes x_{i_{|S|}}^{\{y_{|S|}\}}}$.

Enfin, pour simplifier, on note $[d]$ pour l'ensemble $\{1, \dots, d\}$ et, par la proposition III.19, toute application ensembliste $g : S \to [d]$ détermine un unique vecteur de cette base que l'on note

$$v_g := \overline{x_{g(y_1)}^{\{y_1\}} \otimes \cdots \otimes x_{g(y_{|S|})}^{\{y_{|S|}\}}}.$$

Et si on a une application $F : S \to S'$, on notera

$$v_g \otimes f : S \to v_g \otimes S' \subset A(S) \otimes S'$$

pour l'application induite par cette dernière.

Définition. La catégorie FI a pour objets les ensembles finis et pour morphismes les injections entre ces ensembles.

Définition. La catégorie FI_n a pour objets les ensembles finis et pour morphismes les injections munies d'une application qui associe, à chaque élément de l'ensemble d'arrivée sans antécédent, une couleur parmi n possibles.

Remarque. Les flèches de X dans Y dans cette catégorie sont donc des couples que l'on note (f, g) avec $f : X \hookrightarrow Y$ une injection et $g : Y \smallsetminus f(X) \to \{1, \dots, n\}$ une application ensembliste. De plus, on a une équivalence de catégories

$$\mathrm{FI} \cong \mathrm{FI}_1.$$

Définition. On définit le foncteur

$$\begin{array}{ccccc} \chi & : & \mathrm{Sym}(M^{(1)})\textbf{-Mod} & \longrightarrow & \mathrm{FI}_d\textbf{-Mod} = \textbf{Fonct}\left(\mathrm{FI}_d, \mathbb{C}\textbf{-Mod}\right) \\ & & F : \mathbf{\Sigma} \to \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} & \mapsto & \chi(F) := N := \begin{pmatrix} \mathrm{FI}_d & \to & \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} \\ S & \mapsto & F(S) \end{pmatrix} \end{array}$$

comme suit :

— Si $F : \mathbf{\Sigma} \to \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$ est un $\mathrm{Sym}(M^{(1)})$-module, on définit le foncteur $\chi(F) = N$ sur les objets par

$$\big(\chi(F)\big)(S) := F(S)$$

et sur les flèches par

$$\big(\chi(F)\big)\big(f : S \hookrightarrow T,\, g : T \smallsetminus f(S) \to [d]\big) = \big(\chi(F)\big)(f, g) := N_{(f,g)}$$

avec le morphisme $N_{(f,g)}$ qu'il reste à définir. Cela se résume via le diagramme suivant

$$\chi(F) = N : \quad \begin{tikzcd} \mathrm{FI}_d \arrow[r] & \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} \\ S \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "{(f,g)}"'] & F(S) \arrow[d, "N_{(f,g)}"] \\ T \arrow[r, mapsto] & F(T) \end{tikzcd}.$$

Définissons le morphisme $N_{(f,g)}$: Pour cela, on considère la transformation naturelle $\mu : A\otimes F \to F$ associée au A-module F. On a alors pour l'ensemble T une application

$$\mu_T : \big(A\otimes F\big)(T) = \bigoplus_{T=T_1\uplus T_2} A(T_1)\otimes F(T_2) \longrightarrow F(T).$$

Pour l'ensemble $T_2 = f(S) \subset T$ on a alors $T_1 = T\smallsetminus T_2 = T\smallsetminus f(S)$ ce qui permet d'écrire $g : T_1 \to [d]$. De plus, f réalise alors une bijection $f : S \to T_2 = f(S)$, et en lui appliquant le foncteur F on obtient un isomorphisme

$$F(f) : F(S) \to F\big(f(S)\big) = F(T_2).$$

En notant v_g l'élément de $A(T_1)$ associé à g, on pose alors

$$N_{(f,g)} \coloneqq \mu_T|_{v_g\otimes F(f(S))} \circ v_g \otimes F\big(\, f : S \to f(S)\,\big)$$

ce qui correspond au diagramme

$$N_{(f,g)} : \quad F(S) \xrightarrow{v_g\otimes F(f)} v_g\otimes F(T_2) = v_g\otimes F\big(f(S)\big) \xrightarrow{\mu_T|_{v_g\otimes F(f(S))}} F(T)\ .$$

Il faut encore vérifier que N est bien un foncteur. Si $(f,g) = (\mathrm{id}, g_\varnothing)$ est l'application identité de S, on a clairement

$$N_{(\mathrm{id},g_\varnothing)} = \mu_T|_{v_{g_\varnothing}\otimes F(S)} \ \circ\ v_{g_\varnothing}\otimes F(\mathrm{id}) = \big(\ \mu_T : v_{g_\varnothing}\otimes F(S) \to F(S)\ \big) \circ v_g\otimes \mathrm{id} = \mathrm{id}_{F(S)}\,.$$

De même, pour deux flèches $(f,g) : S \to T$ et $(f',g') : S' \to S$, on a bien la relation

$$N_{(f,g)} \circ N_{(f',g')} = N_{(f,g)\circ(f',g')}.$$

En effet, on a

$$N_{(f,g)\circ(f',g')} = \mu_T|_{v_{g,f(g')}\otimes F(f\circ f'(S'))} \ \circ\ v_{g,f(g')}\otimes F\big(\, f\circ f' : S' \to f\circ f'(S')\,\big)$$

que l'on peut séparer en

$$N_{(f,g)\circ(f',g')} = \mu_T|_{v_g\otimes F(f(S))} \ \circ\ v_g\otimes \mu_T|_{v_{f(g')}\otimes F(f\circ f'(S'))} \ \circ\ v_{f(g')}\otimes F\big(\, f\circ f' : S' \to f\circ f'(S')\,\big),$$

car multiplier par $v_{g,f(g')}$ revient à multiplier successivement par $v_{f(g')}$, puis par v_g. On peut alors utiliser la fonctorialité de F :

$$\begin{aligned} v_{f(g')}\otimes F\big(\, f\circ f' : S' \to f\circ f'(S')\,\big) &= \big(v_{g'} \mapsto v_{f(g')}\big)\otimes F\big(f : S \to f(S)\big) \ \circ\ v_{g'}\otimes F\big(f' : S' \to f'(S')\big) \\ &= \big(A\otimes F\big)(f)|_{v_{g'}\otimes F(f'(S'))} \ \circ\ v_{g'}\otimes F\big(f' : S' \to f'(S')\big) \end{aligned}$$

ainsi que le diagramme suivant qui commute par naturalité de μ :

$$\begin{tikzcd} \big(A\otimes F\big)(S) \arrow[r, "\mu_S"] \arrow[d, "\big(A\otimes F\big)(f:S\to f(S))"'] & F(S) \arrow[d, "v_g\otimes F(f:S\to f(S))"] & \\ \big(A\otimes F\big)(S) \arrow[r, "v_g\otimes\mu_T"'] & v_g\otimes F(f(S)) & \subset v_g\otimes F(T) \end{tikzcd}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} &N_{(f,g)\circ(f',g')} \\ &= \mu_T|_{v_g\otimes F(f(S))} \ \circ\ v_g\otimes \mu_T|_{v_{f(g')}\otimes F(f\circ f'(S'))} \ \circ\ v_{f(g')}\otimes F\big(\, f\circ f' : S' \to f\circ f'(S')\,\big) \\ &= \mu_T|_{v_g\otimes F(f(S))} \ \circ\ v_g\otimes \mu_T|_{v_{f(g')}\otimes F(f\circ f'(S'))} \ \circ\ \big(A\otimes F\big)(f)|_{v_{g'}\otimes F(f'(S'))} \ \circ\ v_{g'}\otimes F\big(f' : S' \to f'(S')\big) \\ &= \mu_T|_{v_g\otimes F(f(S))} \ \circ\ v_g\otimes F\big(\, f : S \to f(S)\,\big) \ \circ\ \mu_S|_{v_{g'}\otimes F(f'(S'))} \ \circ\ v_{g'}\otimes F\big(\, f' : S' \to f'(S')\,\big) \\ &= N_{(f,g)}\circ N_{(f',g')}. \end{aligned}$$

— Si $\sigma : F \to F'$ est une flèche dans $\mathrm{Sym}(M^{(1)})$**-Mod** (*ie :* une transformation naturelle), on définit son image $\chi(\sigma) : \chi(F) \to \chi(F')$ comme étant la transformation naturelle qui associe à chaque ensemble fini S le morphisme

$$\big(\chi(\sigma)\big)_S := \sigma_S \ : \ \big(\chi(F)\big)(S) = F(S) \longrightarrow F'(S) = \big(\chi(F')\big)(S).$$

Définition. On définit un deuxième foncteur

$$\begin{array}{cccc} \Gamma & : & \mathbf{Fonct}\big(\mathrm{FI}_d, \mathbb{C}\text{-}\mathbf{Mod}\big) = \mathrm{FI}_d\text{-}\mathbf{Mod} & \longrightarrow & \mathrm{Sym}(M^{(1)})\text{-}\mathbf{Mod} \\ & & G : \mathrm{FI}_d \to \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} & \mapsto & \Gamma(G) := \left(\begin{array}{ccc} \mathbf{\Sigma} & \to & \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} \\ S & \mapsto & G(S) \end{array}\right) \end{array}$$

comme suit :

— Pour $G : \mathrm{FI}_d \to \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$ un FI_d-module, on définit le A-module $\Gamma(G)$ comme le foncteur

$$\begin{array}{cccc} \Gamma(G) : & \mathbf{\Sigma} & \longrightarrow & \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} \\ & S & \longmapsto & G(S) \\ & {\scriptstyle\sigma}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\Gamma(G)(\sigma)} \\ & S' & \longmapsto & G(S') \end{array},$$

mais il reste à définir l'image $\Gamma(G)(\sigma)$ d'une flèche σ ainsi que la loi $\eta : A \otimes \Gamma(G) \to \Gamma(G)$ qui fait de ce foncteur un A-module.

Pour $\Gamma(G)(\sigma)$ on commence par définir une flèche $(\sigma, g_\varnothing)$ dans FI_d par l'application injective $\sigma : S \hookrightarrow S'$ et par l'unique application $g_\varnothing : S' \setminus \sigma(S) = \varnothing \to [d]$ car σ est une bijection. On pose alors

$$\Gamma(G)(\sigma) := G(\sigma, g_\varnothing) : G(S) \to G(S').$$

Avec ceci $\Gamma(G)$ est bien défini, et il est facile de voir que c'est bien un foncteur car G en est un.

Définissons alors l'action de A sur ce foncteur : il nous faut définir pour tout ensemble fini S une application linéaire naturelle

$$\eta_S : \big(A \otimes \Gamma(G)\big)(S) = \bigoplus_{S = X \sqcup Y} \mathrm{Sym}\big(M^{(1)}\big)(X) \otimes G(Y) \longrightarrow (G)(S) = \Gamma(G)(S).$$

Pour cela on considère S un ensemble fini et $Y \subset S$ un sous-ensemble, on a alors une injection $i : Y \hookrightarrow S$. On pose ensuite $X = S \setminus Y$ et on veut définir une application linéaire

$$\varphi_{X,Y} : A(X) \otimes G(Y) \longrightarrow G(S).$$

On considère alors une application $g : X \to [d]$ qui fixe un vecteur v_g de base de $A(X)$, et on obtient une flèche $(i, g) : Y \to S$ dans FI_d. On peut ensuite lui appliquer le foncteur G ce qui donne une application linéaire $G(i,g) : G(Y) \to G(S)$. On définit alors l'application linéaire $\varphi_{X,Y}$ sur la composante $v_g \otimes G(Y)$ associée à l'application g par

$$\begin{array}{cccc} \varphi_{X,Y}|_{v_g \otimes G(y)} & : & v_g \otimes G(Y) & \to & G(S) \\ & & v_g \otimes x & \mapsto & G(i,g)(x) \end{array}.$$

Puisque les éléments v_g forment une base de $A(X)$, l'application $\varphi_{X,Y}$ est bien définie et est décrite par

$$\varphi_{X,Y} := \bigoplus_{g : X \to [d]} \varphi_{X,Y}|_{v_g \otimes G(y)} \simeq \bigoplus_{g : X \to [d]} G(i,g) : \bigoplus_{g : X \to [d]} \mathbb{C} \cdot v_g \otimes G(Y) = A(X) \otimes G(Y) \longrightarrow G(S).$$

On pose enfin

$$\eta_S \coloneqq \bigoplus_{S=X\uplus Y} \varphi_{X,Y} : \bigoplus_{S=X\uplus Y} A(X)\otimes G(Y) = \big(A\otimes\Gamma(G)\big)(S) \to G(S) = \Gamma(G)(S).$$

Il faut encore vérifier que cela définit bien une transformation naturelle, c'est-à-dire que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{\Sigma} \arrow[r, bend left, "A\otimes\Gamma(G)"] \arrow[rr, bend left, "\Gamma(G)"] & \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} & \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[d, "\sigma"'] & \big(A\otimes\Gamma(G)\big)(S) \arrow[r, "\eta_S"] \arrow[d, "\big(A\otimes\Gamma(G)\big)(\sigma)"'] & G(S) \arrow[d, "\Gamma(G)(\sigma)=G(\sigma,g_\varnothing)"] \\ S' & \big(A\otimes\Gamma(G)\big)(S') \arrow[r, "\eta_{S'}"] & G(S') \end{tikzcd}$$

où $\big(A\otimes\Gamma(G)\big)(\sigma)$ est définie comme étant la somme directe

$$\bigoplus_{S=X\uplus Y} A(\sigma : X\to\sigma(X))\otimes G(\sigma : Y\to\sigma(Y), g_\varnothing) : \bigoplus_{S=X\uplus Y} A(X)\otimes G(Y) \to \bigoplus_{S=X\uplus Y} A\big(\sigma(X)\big)\otimes G(\sigma(Y))$$

Cette dernière permute les termes de la somme directe selon σ en appliquant $G(\sigma|_Y, g_\varnothing)$ au terme associé au sous-ensemble Y. De plus, η_S et $\eta_{S'}$ sont les somme directes des applications du type $G(Y\hookrightarrow S)$ et $G(Y'\hookrightarrow S')$ mais selon l'ordre donné par σ. Ceci permet de vérifier que ce diagramme commute bien.

Enfin, pour que $\Gamma(G)$ soit bien un A-module, il faut encore vérifier que le diagramme suivant commute pour tout ensemble S :

$$\begin{tikzcd} \big(\, A\otimes A\otimes\Gamma(G)\,\big)(S) \arrow[r, "\bigoplus_{S=X\uplus Y}\mathrm{Id}_{A(X)}\otimes\mu_Y"] \arrow[d, "\psi\coloneqq\bigoplus_{S=X\uplus Y}\nu_X\otimes\mathrm{Id}_{\Gamma(G)(Y)}"'] & \big(\, A\otimes\Gamma(G)\,\big)(S) \arrow[d, "\mu_S"] \\ \big(\, A\otimes\Gamma(G)\,\big)(S) \arrow[r, "\mu_S"'] & \Gamma(G)(S) \end{tikzcd},$$

où ν est la loi de concaténation sur A définie page 50. On va vérifier que les deux chemins coïncident sur des éléments de base de l'espace de départ

$$\big(\, A\otimes A\otimes\Gamma(G)\,\big)(S) \coloneqq \bigoplus_{S=S_1\uplus S_2\uplus S_3} A(S_1)\otimes A(S_2)\otimes\Gamma(G)(S_3).$$

On considère $v_{g_{S_1}} = \alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_k$ un élément de base de $A(S_1)$ comme précédemment (pour $k = |S_1|$), ainsi que $v_{g_{S_2}} = \beta_1\otimes\cdots\otimes\beta_l$ un élément de base de $A(S_2)$ (pour $l = |S_2|$). Alors

$$\nu_{S_1\uplus S_2}(v_{g_{S_1}}\otimes v_{g_{S_2}}) = \alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_k\otimes\beta_1\otimes\cdots\otimes\beta_l$$

est un élément de base de $A(S_1\uplus S_2)$ que l'on note $v_{g_{(S_1,S_2)}}$. De plus, pour $x\in\Gamma(G)(S_2)$ un élément de base, les élément du type $v_{g_{S_1}}\otimes v_{g_{S_2}}\otimes x$ engendrent l'espace de départ. Les deux chemins donnent alors

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{S=S_1\uplus S_2\uplus S_3} A(S_1)\otimes A(S_2)\otimes G(S_3) \arrow[r, "\psi"] & \bigoplus_{S=X\uplus S_3} A(X)\otimes G(S_3) \arrow[r, "\mu_S"] & \Gamma(G)(S) \\ v_{g_{S_1}}\otimes v_{g_{S_2}}\otimes x \arrow[r, mapsto] & v_{g_{(S_1,S_2)}}\otimes x \arrow[r, mapsto] & G\big(\, i_{S_3}\,,\, g_{(S_1,S_2)}\,\big)(x) \end{tikzcd}$$

avec $i_{S_3} : S_3 \hookrightarrow S$, et

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus A(S_1)\otimes A(S_2)\otimes G(S_3) & \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes\mu} & \bigoplus\limits_{S=S_1\uplus Y} A(S_1)\otimes G(Y) & \xrightarrow{\quad\mu_S\quad} & \Gamma(G)(S) \\ v_{g_{S_1}}\otimes v_{g_{S_2}}\otimes x & \longmapsto & v_{g_{S_1}}\otimes G\big(j_{S_3}\,,\,g_{S_2}\big)(x) & \longmapsto & G\big(i_{S_2\uplus S_3}\,,\,g_{S_1}\big)\circ G\big(j_{S_3}\,,\,g_{S_2}\big)(x) \end{array}$$

avec

$$j_{S_3}: S_3 \hookrightarrow S_2\uplus S_3 \qquad \text{et} \qquad i_{S_2\uplus S_3}: S_2\uplus S_3 \hookrightarrow S.$$

Ces chemins coïncident bien, car par fonctorialité de G on a :

$$G\big(i_{S_2\uplus S_3}\,,\,g_{S_1}\big)\circ G\big(j_{S_3}\,,\,g_{S_2}\big)(x) = G\big(i_{S_2\uplus S_3}\circ j_{S_3}\,,\,g_{(S_1,S_2)}\big)(x) = G\big(i_{S_3}\,,\,g_{(S_1,S_2)}\big)(x).$$

— Pour $\varepsilon : G\to G'$ une flèche dans FI_d**-Mod** (*ie :* une transformation naturelle) on définit son image dans A**-Mod** comme la transformation naturelle

$$\Gamma(\varepsilon) : \big(\,\Gamma(G)\,,\,\eta\,\big) \to \big(\,\Gamma(G')\,,\,\eta'\,\big)$$

qui associe à un ensemble S le morphisme

$$\big(\Gamma(\varepsilon)\big)_S \coloneqq \varepsilon_S\ :\ \big(\Gamma(G)\big)(S) = G(S) \longrightarrow G'(S) = \big(\Gamma(G')\big)(S).$$

De plus, $\Gamma(\varepsilon)$ est compatible avec l'action de A car, pour tout ensemble fini S, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \big(\,A\otimes\Gamma(G)\,\big)(S) \arrow[r, "\bigoplus\limits_{S=S_1\uplus S_2}\mathrm{Id}_{A(S_1)}\otimes\Gamma(\varepsilon)_{S_2}"] \arrow[d, "\eta_S"'] & \big(\,A\otimes\Gamma(G')\,\big)(S) \arrow[d, "\eta'_S"] \\ \Gamma(G)(S) \arrow[r, "\left(\Gamma(\varepsilon)\right)_S=\varepsilon_S"'] & \Gamma(G')(S) \end{tikzcd}.$$

En effet, si on considère les éléments $v_{g_{S_1}}$ de base de $A(S_1)$ comme précédemment, ainsi que des éléments x de base de $\Gamma(G)(S_2)$, alors les éléments $v_{g_{S_1}}\otimes x$ engendrent l'espace de départ

$$\big(\,A\otimes\Gamma(G)\,\big)(S) \coloneqq \bigoplus_{S=S_1\uplus S_2} A(S_1)\otimes\Gamma(G)(S_2).$$

Les deux chemins appliqués à ces éléments donnent alors

$$\eta'_S\big(\,v_{g_{S_1}}\otimes\varepsilon_{S_2}(x)\,\big) = \varphi'_{S_1,S_2}\big(\,v_{g_{S_1}}\otimes\varepsilon_{S_2}(x)\,\big) = G'\big(i_{S_2}\,,\,g_{S_1}\big)\big(\varepsilon_{S_2}(x)\big)$$

d'une part, et

$$\varepsilon_S\big(\,\eta_S\,(v_{g_{S_1}}\otimes x)\,\big) = \varepsilon_S\big(\,\varphi_{S_1,S_2}\,(v_{g_{S_1}}\otimes x)\,\big) = \varepsilon_S\big(\,G\big(i_{S_2}\,,\,g_{S_1}\big)(x)\,\big)$$

d'autre part. Ces deux éléments sont égaux car ε est une transformation naturelle, ce qui donne le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} G(S_2) \arrow[r, "\varepsilon_{S_2}"] \arrow[d, "G\left(i_{S_2}\,,\,g_{S_1}\right)"'] & G'(S_2) \arrow[d, "G'\left(i_{S_2}\,,\,g_{S_1}\right)"] \\ G(S) \arrow[r, "\varepsilon_S"'] & G'(S) \end{tikzcd}.$$

Théoreme III.27. *Pour d un entier et M un $\mathbb{C}$-module tel que $M \cong \mathbb{C}^d$, les foncteurs précédents*

$$\begin{array}{cccc} \chi & : & \mathrm{Sym}(M^{(1)})\,\text{-}\boldsymbol{Mod} & \longrightarrow & \mathrm{FI}_d\,\text{-}\boldsymbol{Mod} = \mathbf{Fonct}\left(\mathrm{FI}_d, \mathbb{C}\,\text{-}\boldsymbol{Mod}\right) \\ & & F : \boldsymbol{\Sigma} \to \boldsymbol{Vec}_{\mathbb{C}} & \mapsto & \chi(F) := N := \begin{pmatrix} \mathrm{FI}_d & \to & \boldsymbol{Vec}_{\mathbb{C}} \\ S & \mapsto & F(S) \end{pmatrix} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{cccc} \Gamma & : & \mathrm{FI}_d\,\text{-}\boldsymbol{Mod} & \longrightarrow & \mathrm{Sym}(M^{(1)})\,\text{-}\boldsymbol{Mod} \\ & & G : \mathrm{FI}_d \to \boldsymbol{Vec}_{\mathbb{C}} & \mapsto & \Gamma(G) := \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & \to & \boldsymbol{Vec}_{\mathbb{C}} \\ S & \mapsto & G(S) \end{pmatrix} \end{array}$$

forment une équivalence de catégories.

Démonstration. La première étape consiste à montrer que l'on a un isomorphisme naturel

$$\chi \circ \Gamma \cong \mathrm{Id}_{\mathrm{FI}_d\text{-}\mathbf{Mod}}.$$

Si G est un objet de $\mathbf{Fonct}(\mathrm{FI}_d, \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}})$ donc un foncteur de FI_d dans $\mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$, on a

$$\left(\chi \circ \Gamma\right)(G) = \chi \left(\begin{array}{ccc} \boldsymbol{\Sigma} & \longrightarrow & \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} \\ S & \longrightarrow & G(S) \\ {\scriptstyle \sigma}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle G(\sigma, g_{\varnothing})} \\ S' & \longrightarrow & G(S') \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} \mathrm{FI}_d & \longrightarrow & \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} \\ S & \longrightarrow & G(S) \\ {\scriptstyle (f,g)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle N_{(f,g)}} \\ T & \longrightarrow & G(T) \end{array} \right).$$

L'égalité $\chi \circ \Gamma(G) = G$ est bien vérifiée sur les objets car pour un ensemble fini S on a $\chi \circ \Gamma(G)(S) = G(S)$, il reste à vérifier l'égalité sur les flèches. Montrons donc que l'identité suivante est vraie :

$$N_{(f,g)} = G(f,g).$$

Par définition on a

$$N_{(f,g)} := (\mu_T)|_{v_g \otimes F(f(S))} \circ v_g \otimes F\big(f : S \to f(S)\big)$$

que l'on applique ici pour le foncteur $F = \Gamma(G)$ et la multiplication associée comme A-module notée η. Cela donne

$$\begin{aligned} N_{(f,g)} &= (\eta_T)|_{v_g \otimes \Gamma(G)(f(S))} \circ v_g \otimes \big(\Gamma(G)\big)\big(f : S \to f(S)\big) \\ &= (\eta_T)|_{v_g \otimes G(f(S))} \circ v_g \otimes G\big(f : S \to f(S)\,,\, g_{\varnothing}\big) \\ &= (\varphi_{X,Y})|_{v_g \otimes G(Y)} \circ v_g \otimes G\big(f : S \to Y\,,\, g_{\varnothing}\big) \qquad \text{pour } Y = f(S) \text{ et } X = T \smallsetminus Y, \\ &= G(i,g) \circ G\big(f : S \to Y\,,\, g_{\varnothing}\big) \qquad \text{pour } i : Y \hookrightarrow S, \\ &= G\big(\,(i,g) \circ (f : S \to Y\,,\, g_{\varnothing})\,\big) \\ &= G\big(\,(f,g)\,\big). \end{aligned}$$

On a donc montré que l'égalité $\chi \circ \Gamma(G) = G$ est vérifiée non seulement sur les objets mais aussi sur les flèches, ce qui donne bien l'égalité entre les foncteurs $\chi \circ \Gamma(G)$ et G. Ceci montre alors l'égalité fonctorielle

$$\chi \circ \Gamma = \mathrm{Id}$$

sur les objets.

De plus, pour $\varepsilon : G \to G'$ une flèche dans $\mathrm{FI}_d\,\text{-}\mathbf{Mod}$, on a par définition l'égalité

$$\chi \circ \Gamma(\varepsilon) = \varepsilon$$

car pour tout ensemble fini S on a

$$\big(\,\chi \circ \Gamma(\varepsilon)\,\big)_S = \varepsilon_S.$$

Ceci montre que l'égalité fonctorielle

$$\chi \circ \Gamma = \mathrm{Id}$$

est aussi vraie pour les flèches.

La deuxième et dernière étape consiste à montrer l'isomorphisme naturel

$$\Gamma \circ \chi \cong \mathrm{Id}_{\mathrm{Sym}\left(M^{(1)}\right)\textbf{-Mod}}.$$

On considère pour cela un $\mathrm{Sym}\big(M^{(1)}\big)$-module, c'est-à-dire un foncteur $F : \mathbf{\Sigma} \to \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}}$ muni d'une transformation naturelle $\mu : A \otimes F \to F$. On a alors

$$\big(\Gamma \circ \chi\big)(F) = \Gamma \left(\begin{tikzcd} \mathrm{FI}_d \arrow[r] & \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} \\ S \arrow[r] \arrow[d, "{(f,g)}"'] & F(S) \arrow[d, "N_{(f,g)}"] \\ T \arrow[r] & F(T) \end{tikzcd} \right) = \left(\begin{tikzcd} \mathbf{\Sigma} \arrow[r] & \mathbf{Vec}_{\mathbb{C}} \\ S \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"'] & F(S) \arrow[d, "\chi(F)(\sigma,g_\varnothing)"', "=N_{(\sigma,g_\varnothing)}"] \\ S' \arrow[r] & F(S') \end{tikzcd} \right).$$

Pour montrer l'égalité de foncteurs $\Gamma \circ \chi(F) = F$ il faut encore montrer l'égalité $N_{(\sigma,g_\varnothing)} = F(\sigma)$. Or par définition, on a

$$\begin{aligned} N_{(\sigma,g_\varnothing)} &= (\,\mu_{S'}\,)|_{v_{g_\varnothing}\otimes F(\,\sigma(S)\,)} \circ v_{g_\varnothing} \otimes F\big(\sigma : S \to \sigma(S)\big) \\ &= (\,\mu_{S'}\,)|_{M^{\otimes\{\varnothing\}}\otimes F(S')} \circ v_{g_\varnothing} \otimes F\big(\sigma : S \to S'\big) \\ &= F(\sigma) \end{aligned}$$

car l'application $\mu_{S'}$ restreinte au sous-espace $M^{\otimes\{\varnothing\}} \otimes F(S')$ de $(A \otimes F)(S')$ correspond à l'isomorphisme

$$(\,\mu_{S'}\,)|_{M^{\otimes\{\varnothing\}}\otimes F(S')} \;:\; M^{\otimes\{\varnothing\}} \otimes F(S') = v_{g_\varnothing} \otimes F(S') \longrightarrow F(S').$$

Ceci montre bien que les foncteurs $\Gamma \circ \chi(F)$ et F sont égaux. Mais pour conclure que ce sont les mêmes objets de $\mathrm{Sym}\big(M^{(1)}\big)$**-Mod** il faut encore vérifier que l'action de A est la même. Par définition, l'action de A sur F est donnée par la transformation naturelle $\mu : A \otimes F \to F$ définie par

$$\mu_T : \bigoplus_{T = X \uplus Y} A(X) \otimes F(Y) \longrightarrow F(T).$$

D'un autre coté l'action de A sur $\Gamma \circ \chi(F)$ est donnée par la transformation naturelle

$$\eta_S := \bigoplus_{S = X \uplus Y} \varphi_{X,Y} \;:\; A \otimes (\Gamma \circ \chi(F))(S) = \bigoplus_{S = X \uplus Y} A(X) \otimes F(Y) \longrightarrow F(S) = \big(\Gamma \circ \chi(F)\big)(S).$$

Montrons donc que, pour un ensemble fini S, on a l'égalité

$$\eta_S = \mu_S.$$

Pour une décomposition $S = X \uplus Y$, et pour i l'inclusion $Y \subset S$, on a par définition

$$\varphi_{X,Y} \simeq \bigoplus_{\tilde{g} : X \to [d]} \chi(F)(i, \tilde{g}).$$

Mais $(i, \tilde{g})$ est une flèche entre Y et S dans FI_d, ce qui donne $\chi(F)(i, \tilde{g}) = N_{(i,\tilde{g})}$. D'où

$$\varphi_{X,Y} \simeq \bigoplus_{\tilde{g} : X \to [d]} N_{(i,\tilde{g})} = \bigoplus_{\tilde{g} : X \to [d]} (\mu_S)|_{v_{\tilde{g}}\otimes F(i(Y))} \circ v_{\tilde{g}} \otimes F\big(i : Y \to i(Y)\big).$$

Or $i(Y)$ est juste l'ensemble Y vu comme sous-ensemble de S donc on a $i(Y) = Y$, et par fonctorialité

$$F\big(i : Y \to i(Y)\big) = F(\mathrm{id}) = \mathrm{id}\,.$$

On obtient alors

$$\varphi_{X,Y} = \bigoplus_{\tilde{g}:X\to[d]} (\mu_S)|_{v_{\tilde{g}}\otimes F(Y)} = (\mu_S)|_{\underset{\tilde{g}:X\to[d]}{\oplus} \mathbb{C}\cdot v_{\tilde{g}}\otimes F(Y)} = (\mu_S)|_{\underset{j\in J^X}{\oplus} \mathbb{C}\cdot w_j\otimes F(Y)} = (\mu_S)|_{A(X)\otimes F(Y)}.$$

En prenant la somme directe on obtient enfin

$$\eta_S = \bigoplus_{S=X\cup Y} \varphi_{X,Y} = \bigoplus_{S=X\cup Y} (\mu_S)|_{A(X)\otimes F(Y)} = \mu_S.$$

On a donc bien montré l'égalité $\eta_S = \mu_S$, et donc que $\Gamma \circ \chi(F)$ et F sont les mêmes objets de $\mathrm{Sym}\left(M^{(1)}\right)$**-Mod**. Ceci montre bien que l'égalité fonctorielle

$$\Gamma \circ \chi = \mathrm{Id}_{\mathrm{Sym}\left(M^{(1)}\right)\textbf{-Mod}}$$

est vraie sur les objets.

De plus, pour $\sigma : F \to F'$ une flèche dans $\mathrm{Sym}\left(M^{(1)}\right)$**-Mod**, on a par définition l'égalité

$$\Gamma \circ \chi(\sigma) = \sigma$$

car pour tout ensemble fini S on a

$$\big(\,\Gamma \circ \chi(\sigma)\,\big)_S = \sigma_S.$$

Ceci montre que l'égalité

$$\Gamma \circ \chi = \mathrm{Id}_{\mathrm{Sym}\left(M^{(1)}\right)\textbf{-Mod}}$$

est aussi vraie pour les flèches, ce qui achève donc de montrer l'équivalence de catégories car les foncteurs sont bien inverses l'un de l'autre. ☐

Corollaire III.28. *Pour $d = 1$, on a alors $M \cong \mathbb{C}$ et on obtient l'équivalence de catégories*

$$\mathrm{Sym}(\mathbb{C}^{(1)})\,\textbf{-}\boldsymbol{Mod} \cong \textbf{Fonct}\big(\,\mathrm{FI}, \mathbb{C}\,\textbf{-}\boldsymbol{Mod}\,\big) = \mathrm{FI}\,\textbf{-}\boldsymbol{Mod}.$$

Ce corollaire est intéressant car la catégorie des FI-modules est plus simple à étudier que les catégories des FI_d-modules en général. En particulier, certains résultats ont déjà été démontrés dans cette catégorie, et peut alors essayer de transporter ces résultats via cette équivalence de catégories.

Références

[DV17] A. Djament and C. Vespa. *Foncteurs faiblement polynomiaux.* International Mathematics Research Notices, 2017.

[Mac98] S. MacLane. *Categories for the Working Mathematician.* Springer, second edition, 1998.

[Sam14] S. Sam. Mini-course on twisted commutative algebras. *Notes de cours à l'Institut Henri Poincaré*, 2014.

[SS12] S. Sam and A. Snowden. Introduction to twisted commutative algebras. 2012.

[SS17] S. Sam and A. Snowden. *Gröbner methods for representations of combinatorial categories.* Journal of the American mathematical society, 2017.