Mémoire de M2 Agrégation

Rédigé par Antoine Feltz et encadré par Mme C.Huyghe

Le but de ce mémoire était d'étudier certains espaces et groupes de matrices, en particulier les décompositions d'Iwasawa et de Bruhat. Pour cela je me suis appuyé sur le livre Groupes de Lie classiques par R. Mneimné et F. Testard. Je fais ici un résumé des théorèmes importants ou intéressants que j'ai remontré durant ce mémoire.

On commence par rappeler une proposition importante qui sert régulièrement :

Proposition. *Soit $n \geq 1$ fixé pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension $n^2 < \infty$ donc toutes ses normes sont équivalentes. Si N est un norme sur $\mathbb{K}^n$ on définit sa norme subordonnée par $|||A|||_N = \sup\limits_{X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{N(AX)}{N(X)}$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et cette norme est sous-multiplicative.*

I Rayon spectral

La première partie a été consacrée à l'étude des groupes de matrices, et en particulier aux propriétés du rayon spectral dont je donne les plus intéressantes ici.

Définition. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\rho(A)$ et on appelle rayon spectral de A la plus grande valeur propre complexe de A en module :*

$$\rho(A) = \max(\ |\lambda_i|\ )$$

Proposition (Propriétés du rayon spectral).

- *Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, alors $|||A|||_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$*
- *Pour toute norme $\|\cdot\|$ sous-multiplicative on a $\rho(A) \leq \|A\|$*
- *On a l'équivalence :*

$$A^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1 \Leftrightarrow \sum_{k \geq 0} A^k \textit{converge}$$

- *(Househölder) Soit N une norme quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors*

$$\rho(A) = \lim_{m\to\infty} (N(A^m))^{1/m}$$

II Décomposition polaire

Un autre résultat intéressant sur les espaces de matrices est la décomposition polaire que je présente ici suivie d'une application.

Lemme.

- *Le groupe $O_n(\mathbb{R})$ est compact dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*
- *Le groupe des matrices symétriques définies positives $\mathscr{S}_n^{++}$ est connexe par arc*

Théorème (Décomposition polaire). *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ il existe un unique couple $(O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}$ tel que $M = OS$. De plus, l'application*

$$\begin{array}{ccc} O_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++} & \to & GL_n(\mathbb{R}) \\ (O,S) & \mapsto & M = OS \end{array}$$

est un homéomorphisme.

Corollaire. *Les groupes $GL_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R})$ ont le même type de composantes connexes. Or le groupe $O_n(R)$ possède deux composante connexes $O_n^+(\mathbb{R})$ et $O_n^-(\mathbb{R})$. Donc $GL_n(\mathbb{R})$ possède aussi deux composantes connexes qui sont $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$.*

III Groupes topologiques

Une seconde partie de mon mémoire était consacrée à l'étude des premières propriétés des groupes topologiques et des action de groupes continues. En particulier je me suis intéressé à la bijection ${}^{G}\!/\!_{G_x} \simeq G \cdot x$ et à décrire les cas où elle devient un homéomorphisme.

Proposition. *Si un groupe G agit sur un ensemble E alors $\forall x \in E$, l'application*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_x : & {}^{G}\!/\!_{G_x} & \to & G \cdot x \\ & \bar{h} & \mapsto & h \cdot x \end{array} \quad \textit{est bien définie et est une bijection ensembliste.}$$

Définition. *Un groupe G est dit topologique s'il est muni d'une topologie séparée telle que les applications $g \mapsto g^{-1}$ et $(g, h) \mapsto g \cdot h$ soient continues. De plus si E est un espace topologique séparé, on dit qu'un groupe topologique G agit continûment sur E s'il agit comme groupe et si l'application*

$$\begin{array}{ccc} G \times E & \to & E \\ (g, x) & \mapsto & g \cdot x \end{array} \quad \textit{est continue.}$$

Théorème. *Soient G un groupe topologique localement compact et E un espace topologique localement compact. Si G est une réunion dénombrable de compacts et s'il agit continûment et transitivement sur E, alors pour chaque $x \in E$ la bijection $\varphi_x : {}^{G}\!/\!_{G_x} \to E$ est un homéomorphisme (pour la topologique quotient, c'est-à-dire la plus fine rendant la surjection $G \to {}^{G}\!/\!_{G_x}$ continue).*

Corollaire. *On applique ce théorème à l'action de $GL_n^+(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ qui vérifie toutes les hypothèses, et en prenant pour x le premier vecteur de la base canonique on obtient l'homéomorphisme*

$${}^{GL_n^+(\mathbb{R})}\!/\!_{GL_{n-1}^+(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-1}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

On peut ensuite redémontrer par récurrence que $GL_n^+(\mathbb{R})$ est connexe.

IV Décompositions d'Iwasawa et de Bruhat

Enfin dans un dernière partie j'ai étudié deux décompositions d'ensembles de matrices et une application de ces décompositions.

Notations. On note

- $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures inversibles
- $\mathcal{U}$ celui des matrices unipotentes (c'est-à-dire triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale)
- $\mathcal{SD}_+$ celui des matrices diagonales, de déterminant 1, avec des coefficients positifs.
- Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ on note P_σ la matrice associée à la permutation.

Théorème (Décomposition d'Iwasawa).

$$\textit{L'application} \quad \begin{array}{ccc} SO_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{SD}_+ \times \mathcal{U} & \to & SL_n(\mathbb{R}) \\ (k, a, u) & \mapsto & k \cdot a \cdot u \end{array} \quad \textit{est un homéomorphisme}$$

Théorème (Décomposition de Bruhat)**.** *Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe $(U, T) \in \mathcal{U} \times \mathcal{T}$ et une unique permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tels que $A = UP_\sigma T$. De manière équivalente on peut écrire*

$$GL_n(\mathbb{R}) = \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathcal{U} \cdot P_\sigma \cdot \mathcal{T}$$

Définition. *On appelle drapeau (complet) de $\mathbb{R}^n$ une suite de sous-espaces vectoriels vérifiant $\{0\} \subsetneq E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq \cdots \subsetneq E_n = \mathbb{R}^n$. On note $\mathfrak{D}_n$ l'ensemble des drapeaux de $\mathbb{R}^n$.*

Théorème. *Il existe une action naturelle de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $\mathfrak{D}_n$ notée $(A, D) \mapsto A \cdot D$ qui est transitive. De plus, il existe une action de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $\mathfrak{D}_n \times \mathfrak{D}_n$ donnée par $A \cdot (D_1, D_2) = (A \cdot D_1, A \cdot D_2)$. Alors l'ensemble des orbites de cette action est en bijection avec $\mathcal{S}_n$.*