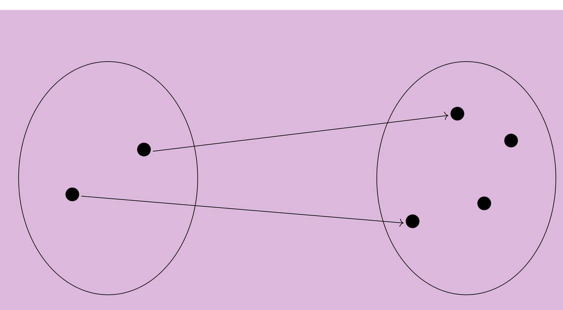
Foncteurs polynomiaux sur les ensembles finis avec injections

Antoine Feltz

Résultats sur la catégorie FI et généralisation à FI_d

La catégorie FI :



Objets : les ensembles finis
Morphismes : les injections

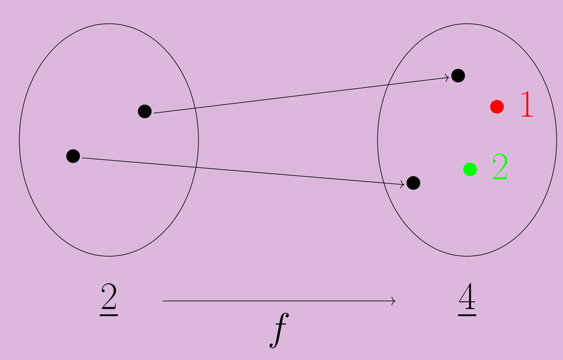
L'objet $\varnothing$ de FI est initial (*ie* : $\forall x \in \mathrm{FI},\ \exists! \varnothing \to x$). On a une équivalence de catégories

$$\mathrm{FI} \cong \mathrm{FI}_1$$

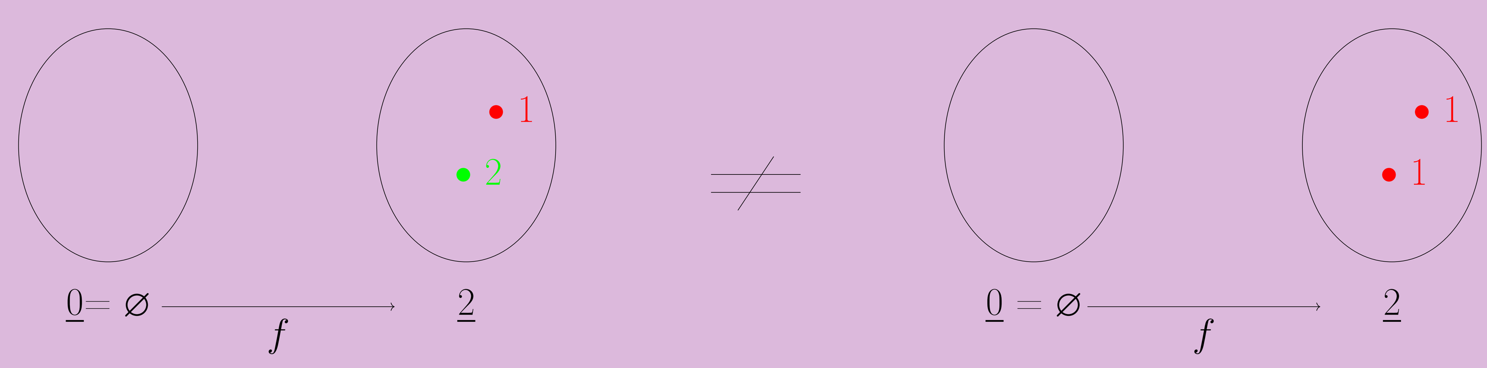
La catégorie FI_d :

Objets : les ensembles finis
Morphismes : les injections $f : X \to Y$, avec un choix de couleur $Y \setminus \mathrm{Im}(f) \to \{1,\dots,d\}$

Exemple : Pour $\underline{n} := \{1,\dots,n\}$ un morphisme dans FI_2 est :



Pour $d > 1$, l'objet $\varnothing$ n'est pas initial dans FI_d car on a plusieurs choix de couleur :



Foncteurs polynomiaux (Généralise Eilenberg-MacLane, 1953) :

Pour FI, on définit un endofoncteur différence :

$$\delta : \mathbf{Fonct}\Big(\mathrm{FI},\ \mathrm{R-Mod}\Big) \longrightarrow \mathbf{Fonct}\Big(\mathrm{FI},\ \mathrm{R-Mod}\Big).$$

Un foncteur $F : \mathrm{FI} \to \mathrm{R-Mod}$ appartient à $Pol_n^f(\mathrm{FI}, \mathrm{R-Mod})$ si $\boldsymbol{\delta^{n+1} F = 0}$. On a ainsi une filtration

$$0 = Pol_{-1}^f(\mathrm{FI}, \mathrm{R-Mod}) \subset Pol_0^f(\mathrm{FI}, \mathrm{R-Mod}) \subset \dots \subset Pol_n^f(\mathrm{FI}, \mathrm{R-Mod}) \subset \dots \subset \mathbf{Fonct}\Big(\mathrm{FI},\ \mathrm{R-Mod}\Big).$$

On généralise pour FI_d en définissant d foncteurs différences δ_c pour $c \in \{1,\dots,d\}$.

Proposition (F.) : Pour $c_1, c_2 \in \{1,\dots,d\}$ on a la relation $\delta_{c_1} \circ \delta_{c_2} = \delta_{c_2} \circ \delta_{c_1}$.

Les foncteurs projectifs standards :

Pour $\underline{n} := \{1,\dots,n\} \in \mathrm{FI}_d$, on définit le foncteur projectif standard associé $P_n^{\mathrm{FI}_d} : \mathrm{FI}_d \to \mathrm{R-Mod}$ par :

$$P_n^{\mathrm{FI}_d}(-) := \mathrm{R}\Big[\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{FI}_d}(\underline{n}, -)\ \Big]$$

Proposition (Djament, 2015) : Sur FI on a la relation

$$\delta\left(P_n^{\mathrm{FI}}\right) = \left(P_{n-1}^{\mathrm{FI}}\right)^{\oplus n}$$

Corollaire (Djament, 2015) : Le foncteur P_n^{FI} est polynomial de degré n.

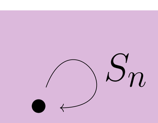
Proposition (F.) : Sur FI_d, pour $c \in \{1,\dots,d\}$ on a la relation

$$\delta_c\left(P_n^{\mathrm{FI}_d}\right) = \left(P_{n-1}^{\mathrm{FI}_d}\right)^{\oplus n} \bigoplus \left(P_n^{\mathrm{FI}_d}\right)^{\oplus d-1}$$

Corollaire (F.) : Pour $d > 1$, le foncteur $P_n^{\mathrm{FI}_d}$ n'est pas polynomial.

Résultats sur les foncteurs polynomiaux (Djament-Vespa, 2017) :

Pour Σ_n la catégorie associée au groupe S_n (un objet, une flèche par élément) :



On définit de manière similaire les foncteurs faiblement polynomiaux $Pol_n\left(\mathrm{FI}, \mathrm{R-Mod}\right)$ dans une catégorie quotient de $\mathbf{Fonct}\left(\mathrm{FI}, \mathrm{R-Mod}\right)$.

Théorème (Djament-Vespa, 2017) : Sur FI on a une équivalence de catégories :

$$Pol_n\left(\mathrm{FI}, \mathrm{R-Mod}\right) \big/ Pol_{n-1}\left(\mathrm{FI}, \mathrm{R-Mod}\right) \cong \mathbf{Fonct}\left(\Sigma_n, \mathrm{R-Mod}\right)$$

Question : Y-a-t-il un résultat similaire pour FI_d qui donnerait une équivalence :

$$Pol_n\left(\mathrm{FI}_d, \mathrm{R-Mod}\right) \big/ Pol_{n-1}\left(\mathrm{FI}_d, \mathrm{R-Mod}\right) \cong \mathbf{Fonct}\left(\,??\,, \mathrm{R-Mod}\right).$$

Motivation : Algèbres commutatives tordues et foncteurs sur FI_d

Algèbre commutative tordue (TCA) :

Une TCA est une algèbre associative unitaire graduée $A = \bigoplus A_n$ telle que S_n agisse sur A_n en vérifiant

$$\tau_{n,m}(x \cdot y) = y \cdot x,$$

pour $x \in A_n,\ y \in A_m$ et $\tau_{n,m} \in S_{n+m}$ qui échange les blocs de taille n et m.

Exemple : Pour V un espace vectoriel, l'algèbre tensorielle

$$T^*(V) := \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$$

munie de la concaténation

$$V^{\otimes n} \otimes V^{\otimes m} \to V^{\otimes(n+m)}$$

est une TCA.

Lien entre les deux notions (Sam-Snowden, 2012) :

$A - \underline{\mathrm{Mod}}$: la catégorie des modules sur la TCA A.

Théorème (Sam-Snowden, 2012) : On a une équivalence de catégories :

$$\mathbf{Fonct}\left(\mathrm{FI}_d, \mathbb{C}-\mathrm{Mod}\right) \cong T^*(\mathbb{C}^d) - \underline{\mathrm{Mod}}$$

Question : On a défini la sous catégorie

$$Pol_n\left(\mathrm{FI}_d, \mathrm{R-Mod}\right) \subset \mathbf{Fonct}\left(\mathrm{FI}_d, \mathbb{C}-\mathrm{Mod}\right),$$

quelle est la sous catégorie de $T^*(\mathbb{C}^d) - \underline{\mathrm{Mod}}$ correspondante ?