Université de Strasbourg

Rapport de stage à l'IPHC

Deuxième année de Magistère

Deux théorèmes de physique des particules :

Le théorème de Coleman et Mandula, et le théorème de Haag, Sohnius et Lopuszanski

Antoine Feltz

supervisé par

M. Rausch De Traubenberg

01/08/2018

Table des matières

Introduction

Dans le cadre de ma deuxième année de magistère à l'université de Strasbourg j'ai effectué un stage dans le département de physique théorique de l'Institut Pluridisciplinaire Hubert Curien (IPHC). Ce stage était dirigé par M. Rausch de Traubenberg que je remercie pour sa patience et ses conseils avisés. En allant toujours plus loin que nécessaire dans ses réponses à mes nombreuses questions il m'a permit de comprendre bien des concepts.

Mon travail à consisté pendant six semaines en une étude bibliographique. Le but était, dans un premier temps, de bien comprendre la structure mathématique et de me familiariser avec les nouvelles notations qu'utilisent la relativité restreinte et la supersymétrie. Puis dans un second temps j'ai démontré deux théorèmes classiques de physique des particules. Il décrivent chacun la structure mathématique la plus générale que l'on puisse considérer pour une théorie : le théorème de Coleman et Mandula pour la relativité restreinte et celui de Haag, Sohnius et Lopuszanski pour la supersymétrie.

J'ai fait ce stage avec deux camarades du magistère que je remercie pour ces moments, parfois décourageants mais souvent drôles, à s'arracher les cheveux en essayant de déchiffrer les mystères de la physique : Joris Castiglione et Guillaume Woessner. Nous avons étudié les bases de la relativité et de la supersymétrie ensemble avant de prendre des chemins différents.

Mon stage étant théorique j'ai choisit de faire mon rapport sous forme d'un mémoire qui retranscrit tout ce que j'ai appris et dont la structure suit celle de mon stage.

Chapitre 1

Relativité Restreinte

I Cadre de la relativité

I.1 Notations d'Einstein

On assimilera dans tout le document l'espace-temps à $\mathbb{R}^{1,3}$. Ses éléments seront notés $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)^t$ avec $x^0 = ct$. On choisira de prendre la convention $c = 1$.

Définition I.1.1. *Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, (e_i) une base de V, W son dual, et (e^i) sa base duale associée. Un tenseur de variance (n, m) sur V est une application multilinéaire de $W^n \times V^m \to \mathbb{K}$. En dimension finie, un tenseur T de variance (n, m) est alors noté $T^{a_1 \dots a_n}{}_{b_1 \dots b_m}$ où a_i et b_j varient dans $\{0, 1, \dots, \dim(V) - 1\}$.*

Par exemple les vecteurs sont des tenseurs de variance $(1, 0)$ et les formes linéaires des tenseurs $(0, 1)$. Le quadri-vecteur $A \in \mathbb{R}^{1,3}$ est alors vu comme tenseur et est noté A^μ où μ est l'unique indice correspondant à la variance $(1, 0)$. Alors μ varie de 0 à 3 car A à quatre composantes et $\dim(\mathbb{R}^{1,3}) = 4$.

Définition I.1.2. *Soit la matrice $\eta_{\mu\nu} = I_{1,3} = diag(1, -1, -1, -1)$. C'est un tenseur de variance $(0, 2)$. On nomme métrique de Minkowski la métrique engendrée par le produit scalaire :*

$$x \cdot y = x^t \eta y$$

Pour alléger les notations des opérations sur les tenseurs on utilisera les notations d'Einstein qui permettent d'enlever les signes sommes :

$$A^\mu B_\mu = B_\mu A^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} A^\mu B_\mu$$

On note de plus, avec un indice en bas les éléments appartenant au dual (pour la métrique de Minkowski) de ceux avec un indice en haut. On voit que la matrice η permet de descendre (ou monter) les indices

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$$

Comme $\eta^{-1} = \eta$, on a aussi
$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu.$$
On peut alors ré-écrire le produit scalaire $x \cdot y = x^\mu y^\nu \eta_{\mu\nu} = x^\mu y_\mu$.
On obtient enfin que
$$x = \sum_\mu x^\mu e^\mu = \sum_{\mu,\nu} x_\mu \eta_{\mu\nu} e^\nu \quad \text{se note} \quad x = x^\mu e_\mu.$$

Définition I.1.3. *Pour un quadri-vecteur on défini une pseudo-norme par $\|A\|^2 = A^\mu A^\nu \eta_{\mu\nu}$. On peut alors distinguer trois cas :*
- *Si $\|A\|^2 > 0$ on dit que le quadri-vecteur est du genre temps,*
- *Si $\|A\|^2 < 0$ on dit qu'il est du genre espace,*
- *Si $\|A\|^2 = 0$ on dit qu'il est du genre lumière.*

I.2 Groupe et algèbre de Lorentz, et leurs propriétés

Définition I.2.1. *Le groupe de Lorentz est défini par l'ensemble des transformations linéaires Λ préservant le produit scalaire, c'est-à-dire telles que*
$$\Lambda x \cdot \Lambda y = x \cdot y.$$
Ses éléments sont appelés les transformations de Lorentz.

Proposition I.2.1. *Les éléments du groupe de Lorentz vérifient*
$$\Lambda^t \eta \Lambda = \eta \quad \big(ou \quad \Lambda^\rho{}_\mu \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma{}_\nu = \eta_{\mu\nu} \quad avec\ les\ notations\ d'Einstein\big)$$

Démonstration. On a, d'après la définition du produit scalaire, $\forall x, y \in \mathbb{R}^{1,3}$:
$$\begin{aligned} \Lambda x \cdot \Lambda y = x \cdot y &\Leftrightarrow (\Lambda x)^t \eta (\Lambda y) = x^t \eta y \\ &\Leftrightarrow x^t (\Lambda^t \eta \Lambda) y = x^t \eta y \end{aligned}$$
Donc on a bien $\Lambda^t \eta \Lambda = \eta$ □

Remarque. On voit alors que le groupe de Lorentz est $O(1,3)$. Comme $\det(\Lambda^t \eta \Lambda) = \det(\eta)$ on a $\det(\Lambda) = \pm 1$. On appelle les transformations de Lorentz propres celles de déterminant 1, c'est donc $SO(1,3)$.
Dans la suite on s'intéressera uniquement au groupe de Lorentz restreint, c'est-à-dire les transformations de Lorentz propres telles que $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ (appelées orthochrones car elles préserves l'orientation globale de l'espace-temps).

Notation. Par abus de langage on désignera par groupe de Lorentz ce groupe restreint. On peut facilement montrer qu'il est engendré par les rotations dans l'espace et les boosts de Lorentz, et on le note $SO_0(1,3)$.
Les boosts de Lorentz sont des transformations de l'espace temps de paramètre v et par exemple le boost selon la première dimension d'espace est de la forme
$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Proposition I.2.2. *Soit à présent une transformation de Lorentz infinitésimale $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \varepsilon^{\mu}{}_{\nu}$ où $\delta^{\mu}{}_{\nu}$ est le symbole de Kronecker et $\varepsilon^{\mu}{}_{\nu} \sim 0$. On a alors*

$$\varepsilon^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}(J^{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu}$$

$$(J^{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu} = \eta^{\alpha\mu}\delta^{\beta}{}_{\nu} - \eta^{\beta\mu}\delta^{\alpha}{}_{\nu}$$

où les $(J^{\alpha\beta})_{\mu\nu}$ forment une famille génératrice des opérateurs antisymétriques.

Démonstration. Comme Λ est une transformation de Lorentz elle vérifie

$$(\delta^{\alpha}{}_{\mu} + \varepsilon^{\alpha}{}_{\mu})\ \eta_{\alpha\beta}\ (\delta^{\beta}{}_{\nu} + \varepsilon^{\beta}{}_{\nu}) = \eta_{\mu\nu}$$

En développant et en négligeant le terme d'ordre 2 on obtient

$$\eta_{\nu\mu} + \varepsilon^{\alpha}{}_{\mu}\eta_{\alpha\nu} + \eta_{\mu\beta}\varepsilon^{\beta}{}_{\nu} = \eta_{\mu\nu}$$

D'où

$$\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu} \quad \text{pour} \quad \varepsilon_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha}\varepsilon^{\alpha}{}_{\nu}$$

Donc $\varepsilon_{\mu\nu}$ est un opérateur antisymétrique, on définit alors une famille génératrice des opérateurs antisymétriques sur $\mathbb{R}^{1,3}$ par

$$(J^{\alpha\beta})_{\mu\nu} = \delta^{\alpha}{}_{\mu}\delta^{\beta}{}_{\nu} - \delta^{\beta}{}_{\mu}\delta^{\alpha}{}_{\nu}$$

On peut donc écrire $\varepsilon_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}(J^{\alpha\beta})_{\mu\nu}$ avec $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$ car il s'agit de l'union des deux bases canoniques de cet espace, opposées l'une de l'autre.
On a alors par définition $(J^{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu} = \eta^{\mu\delta}(J^{\alpha\beta})_{\delta\nu} = \eta^{\alpha\mu}\delta^{\beta}{}_{\nu} - \eta^{\beta\mu}\delta^{\alpha}{}_{\nu}$, d'où le résultat. □

Notation. On note à présent $J^{\alpha\beta}$ pour parler de l'opérateur dont les coefficients sont $(J^{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu}$. On a de plus, $(J^{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu} = -(J^{\beta\alpha})^{\mu}{}_{\nu}$

Définition I.2.2. *Une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni d'une application bilinéaire de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$, notée $(x, y) \mapsto [x, y]$ et appelée crochet de Lie, qui vérifie les propriétés :*

— *Anticommutativité :*

$$\forall x, y \in \mathfrak{g}, \quad [y, x] = -[x, y]$$

— *Identité de Jacobi :*

$$\forall x, y, z \in \mathfrak{g}, \quad [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

Notation. L'espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ muni du crochet $[X, Y] = XY - YX$ est une algèbre de Lie qu'on notera $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$.
Pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel V, l'ensemble des endomorphisme de V, $End(V)$ muni du crochet $[x, y] = x \circ y - y \circ x$ est une algèbre de Lie que nous notons $\mathfrak{gl}(V)$.
De plus, si V et de dimension n alors $\mathfrak{gl}(V)$ et $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ sont isomorphes.

Proposition I.2.3. *Les opérateurs $J^{\alpha\beta}$ satisfont les relations de commutation suivantes avec le crochet de Lie standard sur les opérateurs :*

$$\left[J^{\alpha\beta}, J^{\gamma\delta}\right] = \eta^{\beta\gamma}J^{\alpha\delta} - \eta^{\alpha\gamma}J^{\beta\delta} + \eta^{\delta\beta}J^{\gamma\alpha} - \eta^{\delta\alpha}J^{\gamma\beta}$$

Démonstration. On calcule d'abord :

$$\begin{aligned}
(J^{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\rho}(J^{\gamma\delta})^{\rho}{}_{\nu} &= \left(\eta^{\alpha\mu}\delta^{\beta}{}_{\rho} - \eta^{\beta\mu}\delta^{\alpha}{}_{\rho}\right)\left(\eta^{\gamma\rho}\delta^{\delta}{}_{\nu} - \eta^{\delta\rho}\delta^{\gamma}{}_{\nu}\right) \\
&= \eta^{\alpha\mu}\delta^{\beta}{}_{\rho}\eta^{\gamma\rho}\delta^{\delta}{}_{\nu} - \eta^{\alpha\mu}\delta^{\beta}{}_{\rho}\eta^{\delta\rho}\delta^{\gamma}{}_{\nu} - \eta^{\beta\mu}\delta^{\alpha}{}_{\rho}\eta^{\gamma\rho}\delta^{\delta}{}_{\nu} + \eta^{\beta\mu}\delta^{\alpha}{}_{\rho}\eta^{\delta\rho}\delta^{\gamma}{}_{\nu} \\
&= \eta^{\alpha\mu}\eta^{\gamma\beta}\delta^{\delta}{}_{\nu} - \eta^{\alpha\mu}\eta^{\delta\beta}\delta^{\gamma}{}_{\nu} - \eta^{\beta\mu}\eta^{\gamma\alpha}\delta^{\delta}{}_{\nu} + \eta^{\beta\mu}\eta^{\delta\alpha}\delta^{\gamma}{}_{\nu}
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\left[J^{\alpha\beta}, J^{\gamma\delta}\right] &= (J^{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\rho}(J^{\gamma\delta})^{\rho}{}_{\nu} - (J^{\gamma\delta})^{\mu}{}_{\rho}(J^{\alpha\beta})^{\rho}{}_{\nu} \\
&= \eta^{\alpha\mu}\eta^{\gamma\beta}\delta^{\delta}{}_{\nu} - \eta^{\alpha\mu}\eta^{\delta\beta}\delta^{\gamma}{}_{\nu} - \eta^{\beta\mu}\eta^{\gamma\alpha}\delta^{\delta}{}_{\nu} + \eta^{\beta\mu}\eta^{\delta\alpha}\delta^{\gamma}{}_{\nu} \\
&\quad - \eta^{\gamma\mu}\eta^{\alpha\delta}\delta^{\beta}{}_{\nu} + \eta^{\gamma\mu}\eta^{\beta\delta}\delta^{\alpha}{}_{\nu} + \eta^{\delta\mu}\eta^{\alpha\gamma}\delta^{\beta}{}_{\nu} - \eta^{\delta\mu}\eta^{\beta\gamma}\delta^{\alpha}{}_{\nu} \\
&= \eta^{\beta\gamma}\left(\eta^{\alpha\mu}\delta^{\delta}{}_{\nu} - \eta^{\delta\mu}\delta^{\alpha}{}_{\nu}\right) - \eta^{\alpha\gamma}\left(\eta^{\beta\mu}\delta^{\delta}{}_{\nu} - \eta^{\delta\mu}\delta^{\beta}{}_{\nu}\right) \\
&\quad + \eta^{\beta\delta}\left(\eta^{\gamma\mu}\delta^{\alpha}{}_{\nu} - \eta^{\alpha\mu}\delta^{\gamma}{}_{\nu}\right) - \eta^{\alpha\delta}\left(\eta^{\gamma\mu}\delta^{\beta}{}_{\nu} - \eta^{\beta\mu}\delta^{\gamma}{}_{\nu}\right) \\
&= \eta^{\beta\gamma}\left(J^{\alpha\delta}\right)^{\mu}{}_{\nu} - \eta^{\alpha\gamma}\left(J^{\beta\delta}\right)^{\mu}{}_{\nu} + \eta^{\beta\delta}\left(J^{\gamma\alpha}\right)^{\mu}{}_{\nu} - \eta^{\alpha\delta}\left(J^{\gamma\beta}\right)^{\mu}{}_{\nu}
\end{aligned}$$

D'où l'égalité

$$\left[J^{\alpha\beta}, J^{\gamma\delta}\right] = \eta^{\beta\gamma}J^{\alpha\delta} - \eta^{\alpha\gamma}J^{\beta\delta} + \eta^{\beta\delta}J^{\gamma\alpha} - \eta^{\alpha\delta}J^{\gamma\beta}$$

$\square$

Définition I.2.3. *On voit donc que les $J^{\alpha\beta}$ sont stables par crochet de Lie. On peut alors définir l'algèbre de Lorentz par la sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^{1,3})$ engendrée par les opérateurs $(J^{\alpha\beta})$.*
On remarque que l'algèbre de Lorentz est $\mathfrak{so}(1,3)$.

Proposition I.2.4. *Il existe une application, nommé exponentielle, qui permet de passer d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ à un groupe de Lie G. Si G est compact et connexe, alors $\exp : \mathfrak{g} \to G$ est surjective.*

On remarque qu'elle n'est jamais injective.

Proposition I.2.5. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie associé à un groupe de Lie G, et E un espace vectoriel. Soit (E,ρ) une représentation de $\mathfrak{g}$, et (E,π) une représentation de G, on a alors le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "Exp"] \arrow[d, "\rho"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\
End(E) \arrow[r, "exp"'] & End(E)
\end{tikzcd}$$

Dans les cas que nous étudierons, ce diagramme commute.

Proposition I.2.6. *La fonction exponentielle définit une fonction continue entre l'algèbre de Lorentz et le groupe de Lorentz, et l'image de l'algèbre de Lorentz engendre le groupe de Lorentz.*

Démonstration. On considère les matrices $B_1(\varphi) = \exp(\varphi J^{01})$ et $R_3(\theta) = \exp(\theta J^{12})$. On calcule alors

$$B_1(\varphi) = \exp\begin{pmatrix} 0 & \varphi & 0 & 0 \\ \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\varphi) & \sinh(\varphi) & 0 & 0 \\ \sinh(\varphi) & \cosh(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et

$$R_3(\theta) = \exp\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & 0 \\ 0 & -\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a directement que $R_3(\theta)$ correspond à une rotation d'angle θ autour de l'axe z, et on va maintenant montrer que $B_1(\varphi)$ est un boost de Lorentz dans la direction Ox.
On cherche v tel que :

$$\left| \begin{array}{ccc} \cosh(\varphi) & = & \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-1} \\ \sinh(\varphi) & = & -\frac{v}{c}\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-1} \end{array} \right.$$

Et on a directement que $v = -c\tanh(\varphi)$. On dit que la transformation se fait à la rapidité φ
On a donc, par des raisonnements similaires, que l'image de $\mathfrak{so}(1,3)$ contient les 3 rotations et les trois boosts de Lorentz principaux, l'image de $\mathfrak{so}(1,3)$ engendre donc $SO_0(1,3)$.
Enfin, la fonction exp étant continue sur l'ensemble des opérateurs linéaires, on a bien que sa restriction à l'algèbre de Lorentz est continue. $\square$

Proposition I.2.7. ***Loi de composition des vitesses***
Soit $\mathcal{R}$ un référentiel galiléen et $\mathcal{R}'$ un référentiel en translation rectiligne et uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ selon l'axe Ox à la vitesse u. Alors si u' est la vitesse d'une particule selon l'axe Ox dans le référentiel $\mathcal{R}'$, sa vitesse dans le référentiel $\mathcal{R}$ sera

$$v = \frac{u + u'}{1 + \frac{uu'}{c^2}}$$

Démonstration. On note $B_1(\varphi)$ est la transformation de Lorentz reliant le référentiel $\mathcal{R}$ au référentiel $\mathcal{R}'$ pour $u = -c\tanh(\varphi)$. De même, on note $B_1(\varphi')$ est la transformation reliant le référentiel $\mathcal{R}'$ au référentiel propre de la particule. Alors celle reliant $\mathcal{R}$ au référentiel propre est

$$B_1(\phi) = B_1(\varphi)B_1(\varphi')$$

On a les égalités :

$$\cosh(\phi) = \cosh(\varphi)\cosh(\varphi') + \sinh(\varphi)\sinh(\varphi') = \cosh(\varphi + \varphi')$$

et

$$\sinh(\phi) = \cosh(\varphi)\sinh(\varphi') + \sinh(\varphi)\cosh(\varphi') = \sinh(\varphi + \varphi')$$

On en déduit que $B_1(\varphi).B_1(\varphi') = B_1(\varphi+\varphi')$, et donc :

$$v = -c\tanh(\varphi+\varphi') = -c\frac{\tanh(\varphi)+\tanh(\varphi')}{1+\tanh(\varphi)\tanh(\varphi')} = \frac{u+u'}{1+\frac{uu'}{c^2}}$$

On trouve bien la formule de composition des vitesses voulue. □

Proposition I.2.8. *On note $J^i = J^{jk}$ avec i, j, k en permutation circulaire et $K^i = J^{0i}$, on a alors les relations :*
— $\left[J^i, J^j\right] = J^k$
— $\left[J^i, K^j\right] = K^k$
— $\left[K^i, K^j\right] = -J^k$

Démonstration. Montrons une des égalités, les autres se montrant de manière analogue.

$$\begin{aligned}\left[J^i, J^j\right] &= \eta^{kk}J^{ji} - \eta^{jk}J^{ki} + \eta^{ik}J^{kj} - \eta^{ij}J^{kk} \\ &= -\eta^{kk}J^k - \eta^{jk}J^j - \eta^{ik}J^i - \eta^{ij}J^{kk} \\ &= J^k\end{aligned}$$

□

On va maintenant complexifier l'algèbre, mais on gardera en tête que notre algèbre est en réalité réelle.

Proposition I.2.9. *Notons les matrices*

$$N^j = \frac{1}{2}(J^j + iK^j) \quad \textit{et} \quad \bar{N}^j = \frac{1}{2}(J^j - iK^j).$$

On peut facilement retrouver l'algèbre réelle en gardant en tête que les deux sont conjuguées complexes l'une de l'autre. Pour i, j, k en permutation circulaire, obtient les relations :
— $\left[N^i, N^j\right] = N^k$
— $\left[\bar{N}^i, \bar{N}^j\right] = \bar{N}^k$
— $\left[N^i, \bar{N}^j\right] = 0$

Démonstration. On calcule

$$\begin{aligned}\left[N^i, N^j\right] &= \frac{1}{4}\left(\left[J^i, J^j\right] - \left[K^i, K^j\right] + i\left[J^i, K^j\right] + i\left[K^i, J^j\right]\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(J^k + J^k + iK^k + iK^k\right) \\ &= N^k\end{aligned}$$

Et de même

$$\left[\bar{N}^i, \bar{N}^j\right] = \frac{1}{4}\left(J^k + J^k - iK^k - iK^k\right) = \bar{N}^k$$

$$\left[N^i, \bar{N}^j\right] = \frac{1}{4}\left(J^k - J^k + iK^k - iK^k\right) = 0$$

□

On a donc trouvé deux manières de représenter l'algèbre de Lorentz, et en posant M (resp. $\bar{M}$) l'algèbre de Lie engendrée par les N^i (resp. $\bar{N}^i$), on voit que $\mathfrak{so}(1,3) \sim M \oplus \bar{M}$ en tant que algèbre de Lie.
Enfin, on montre (par exemple en prenant la base canonique de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$) que M et $\bar{M}$ sont tous deux isomorphes à $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ en tant qu'algèbre de Lie.

Définition I.2.4. *Le tenseur de Levi-Civita, noté ε est le seul tenseur antisymétrique de l'espace de Minkowski tel que $\varepsilon_{0123} = 1$.*
De manière plus explicite,

$$\varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta} = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\sigma), \text{ avec } \sigma \text{ la permutation } \mu\nu\gamma\delta & \text{si} \quad \mu \neq \nu \neq \gamma \neq \delta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition I.2.5. *Un opérateur de Casimir d'une algèbre est un opérateur qui commute avec tous ses éléments.*

Proposition I.2.10. *Les opérateurs Q_1 et Q_2 sont des opérateurs de Casimir de l'algèbre de Lorentz pour*

— $Q_1 = \frac{1}{2} J_{\mu\nu} J^{\mu\nu} = (J^1)^2 + (J^2)^2 + (J^3)^2 - (K^1)^2 - (K^2)^2 - (K^3)^2$

— $Q_2 = \frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\mu\nu} J^{\rho\sigma} = 2\left(J^1K^1 + J^2K^2 + J^3K^3\right)$

Démonstration. Il suffit de le montrer pour les générateurs de l'algèbre de Lorentz, et on ne démontre pas toutes les égalités, les calculs étant similaires. En utilisant la formule $[AB, C] = A[B,C] + [A,C]B$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left[Q_1, J^2\right] &= \left[J^1J^1, J^2\right] + \left[J^3J^3, J^2\right] + \left[K^1K^1, J^2\right] + \left[K^3K^3, J^2\right] \\
&= J^1J^3 + J^3J^1 - J^3J^1 - J^1J^3 - K^1K^3 - K^3K^1 + K^3K^1 + K^1K^3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[Q_2, J^2\right] &= \left[J^1K^1, J^2\right] + \left[J^3K^3, J^2\right] \\
&= -J^1\left[J^2, K^1\right] + \left[J^1, J^2\right]K^1 - J^3\left[J^2, K^3\right] + \left[J^3, J^2\right]K^3 \\
&= +J^1K^3 + J^3K^1 - J^3K^1 - J^1K^3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

I.3 Groupe et algèbre de Poincaré

Lemme I.3.1. *Les transformations linéaires préservant une forme bilinéaire préservent aussi la forme quadratique associée, et inversement.*

Démonstration. La première affirmation est immédiate, pour la seconde on a :
Soient $x, y \in \mathbb{R}^{1,3}$, b une forme bilinéaire, q sa forme quadratique associée, et Λ une transformation linéaire de $\mathbb{R}^{1,3}$ préservant q, alors sachant que

$$q(x+y) = q(x) + 2b(x,y) + q(y)$$

Si Λ préserve q, Λ préserve également $b(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)$ □

Définition I.3.1. *Le groupe de Poincaré est défini par l'ensemble des transformations affines de l'espace-temps $\mathbb{R}^{1,3}$ qui préservent la norme au carré associée au produit scalaire :*

$$\|x-y\|^2 = (x-y)\cdot(x-y)$$

Il correspond aux transformations Λ telles que $\|\Lambda x - \Lambda y\|^2 = \|x-y\|^2$, et on le note $ISO(1,3)$.

Remarque. Comme pour le groupe de Lorentz on considérera dans la suite que les transformations propres orthochrones (telles que $\det(\Lambda) = 1$ et ${\Lambda^0}_0 \geq 1$). On obtient alors le groupe de Poincaré restreint $ISO_0(1,3)$.
Par abus de langage on désignera encore par groupe de Poincaré le groupe restreint.

Théorème I.3.2. *Le groupe de Poincaré est bien un groupe, engendré par le groupe de Lorentz et les translations. On remarque alors que le groupe (restreint) de Poincaré est $ISO_0(1,3) = SO_0(1,3) \rtimes \mathbb{R}^{1,3}$.*
Ses éléments seront notés (Λ, a) où Λ est une transformation de Lorentz et a le quadri-vecteur directeur d'une translation. La transformation s'écrit alors pour X dans $\mathbb{R}^{1,3}$, $(\Lambda, a)(X) = \Lambda X + a$.

Démonstration. On voit clairement que $ISO_0(1,3)$ contient le groupe de Lorentz et les translations. On va montrer que $(\Lambda, a) \circ (\Lambda', a')$ reste de la forme (Γ, b).
Soit $X \in \mathbb{R}^{1,3}$, alors

$$\begin{aligned}(\Lambda, a)\circ(\Lambda', a')(X) &= (\Lambda, a)(\Lambda' X + a')\\ &= \Lambda(\Lambda' X + a') + a\\ &= (\Lambda\Lambda')X + (\Lambda a' + a) = (\Lambda\Lambda', \Lambda a' + a)(X)\end{aligned}$$

D'où le résultat pour $\Gamma = \Lambda\Lambda'$ et $b = \Lambda a' + a$. Donc le groupe de Lorentz et les translations engendrent bien un sous-groupe de celui de Poincaré.
Il reste à montrer que ces transformations sont les seules. Soit Λ une transformation affine qui préserve d, on va montrer que $\Lambda = (\Lambda', a)$ avec Λ' une transformation de Lorentz et a une translation.
On pose $a = \Lambda\, 0$ et $\Lambda' = \Lambda - (Id, a)$, alors $\Lambda = (\Lambda', a)$. On voit que a est la partie translation de Λ et que donc Λ' est une transformation linéaire. On calcule ensuite

$$q(\Lambda' x) = \|\Lambda' x - 0\|^2 = \|\Lambda x - a\|^2 = \|\Lambda x - \Lambda 0\|^2 = \|x - 0\|^2 = q(x)$$

Donc Λ' préserve la forme quadratique associée au produit scalaire, et d'après le lemme I.3.1, Λ' (qui est linéaire) préserve également le produit scalaire. Donc Λ' est bien une transformation de Lorentz ce qui achève de prouver le théorème. $\square$

Définition I.3.2. *On définit ensuite l'algèbre de Poincaré comme l'algèbre engendrée par les générateurs de l'algèbre de Lorentz $\mathfrak{so}(1,3)$ notés $J^{\mu\nu}$ et les générateurs des translations notés P^ρ. Les crochets de Lie sont donnés par*

$$\left[J^{\alpha\beta}, J^{\gamma\delta}\right] = \eta^{\beta\gamma}J^{\alpha\delta} - \eta^{\alpha\gamma}J^{\beta\delta} + \eta^{\delta\beta}J^{\gamma\alpha} - \eta^{\delta\alpha}J^{\gamma\beta}$$

$$[J^{\mu\nu}, P^\rho] = \eta^{\nu\rho}P^\mu - \eta^{\mu\rho}P^\nu,$$

$$[P^\mu, P^\nu] = 0.$$

II Représentations des algèbres de Lorentz et Poincaré

II.1 Représentation différentielle

Définition II.1.1. *Une représentation de groupe ou d'algèbre est la donnée pour un groupe ou une algèbre G, d'un espace vectoriel V et d'une application $\pi : G \to GL(V)$ qui est un homomorphisme de groupes ou d'algèbres.*

Remarque. Représentation vectorielle de l'algèbre de Lorentz
On a vu sans le dire que les matrices qui donnent l'action d'un boost de Lorentz ou d'une rotation sur un quadri-vecteur de l'espace-temps engendrent une représentation matricielle de l'algèbre de Lorentz.

Proposition II.1.1. *On considère le couple (π, E) où $E = C^2(\mathbb{R}^{1,3}, \mathbb{R})$ et π est l'application de l'algèbre de Poincaré dans $GL(E)$ définie par :*

$$\pi(J_{\mu\nu}) = L_{\mu\nu} = x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu$$
$$\pi(P_\rho) = -\partial_\rho.$$

C'est une représentation de l'algèbre de Poincaré appelée représentation différentielle.

Démonstration. On montre que π est bien un morphisme d'algèbres de Lie, donc qu'il préserve le crochet de Lie. Pour cela on montre que les générateurs $L_{\mu\nu}$ et $-\partial_\rho$ vérifient les relations de l'algèbre de Poincaré. Le premier crochet est simple à vérifier d'après le théorème de Schwartz :

$$[\pi(P^\mu), \pi(P^\nu)] = [-\eta^{\mu\alpha}\partial_\alpha, -\eta^{\nu\beta}\partial_\beta] = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}[\partial_\alpha, \partial_\beta] = 0$$

Le deuxième se montre aussi avec le théorème de Schwartz :

$$\begin{aligned}
[L^{\mu\nu}, \pi(P^\rho)] &= -\eta^{\rho\sigma}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\beta\nu}(x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha)\cdot\partial_\sigma + \eta^{\rho\sigma}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\beta\nu}\partial_\sigma\cdot(x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha) \\
&= +\eta^{\rho\sigma}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\beta\nu}\left[-x_\alpha\partial_\beta\partial_\sigma + x_\beta\partial_\alpha\partial_\sigma + \delta_{\sigma\alpha}\partial_\beta + x_\alpha\partial_\sigma\partial_\beta - \delta_{\sigma\beta}\partial_\alpha - x_\beta\partial_\sigma\partial_\alpha\right] \\
&= +\eta^{\mu}{}_{\sigma}\eta^{\beta\nu}\eta^{\rho\sigma}\partial_\beta - \eta^{\rho\sigma}\eta^{\mu\alpha}\eta_\sigma{}^{\nu}\partial_\alpha \\
&= -\eta^{\mu}{}_{\sigma}\eta^{\rho\sigma}\pi(P^\nu) + \eta^{\rho\sigma}\eta_\sigma{}^{\nu}\pi(P^\mu) \\
&= \eta^{\rho\nu}\pi(P^\mu) - \eta^{\mu\rho}\pi(P^\nu)
\end{aligned}$$

Pour le dernier on utilise le calcul intermédiaire :

$$[x_\alpha\partial_\beta, x_\gamma\partial_\delta] = x_\alpha\delta_{\beta\gamma}\partial_\delta + x_\alpha x_\gamma\partial_\beta\partial_\delta - x_\gamma\delta_{\alpha\delta}\partial_\beta - x_\gamma x_\alpha\partial_\delta\partial_\beta = x_\alpha\delta_{\beta\gamma}\partial_\delta - x_\gamma\delta_{\alpha\delta}\partial_\beta$$

On a alors

$$\begin{aligned}
[L^{\mu\nu}, L^{\rho\sigma}] &= \eta^{\mu\alpha}\eta^{\beta\nu}\eta^{\rho\gamma}\eta^{\delta\sigma}\left[x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha, x_\gamma\partial_\delta - x_\delta\partial_\gamma\right] \\
&= \eta^{\mu\alpha}\eta^{\beta\nu}\eta^{\rho\gamma}\eta^{\delta\sigma}(x_\alpha\delta_{\beta\gamma}\partial_\delta - x_\gamma\delta_{\alpha\delta}\partial_\beta - x_\beta\delta_{\alpha\gamma}\partial_\delta + x_\gamma\delta_{\beta\delta}\partial_\alpha \\
&\qquad - x_\alpha\delta_{\beta\delta}\partial_\gamma + x_\delta\delta_{\alpha\gamma}\partial_\beta + x_\beta\delta_{\alpha\delta}\partial_\gamma - x_\delta\delta_{\beta\gamma}\partial_\alpha) \\
&= \eta^{\mu\alpha}\eta^{\beta\nu}\eta^{\rho\gamma}\eta^{\delta\sigma}(\ \delta_{\beta\gamma}(x_\alpha\partial_\delta - x_\delta\partial_\alpha) + \delta_{\alpha\delta}(x_\beta\partial_\gamma - x_\gamma\partial_\beta) \\
&\qquad + \delta_{\alpha\gamma}(x_\delta\partial_\beta - x_\beta\partial_\delta) + \delta_{\beta\delta}(x_\gamma\partial_\alpha - x_\alpha\partial_\gamma)\ ) \\
&= \eta^{\mu\alpha}\eta^{\delta\sigma}\eta^{\rho\nu}L_{\alpha\delta} + \eta^{\beta\nu}\eta^{\rho\gamma}\eta^{\mu\sigma}L_{\beta\gamma} + \eta^{\beta\nu}\eta^{\delta\sigma}\eta^{\mu\rho}L_{\delta\beta} + \eta^{\mu\alpha}\eta^{\rho\gamma}\eta^{\nu\sigma}L_{\gamma\alpha} \\
&= \eta^{\rho\nu}L^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}L^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\sigma}L^{\rho\mu} - \eta^{\mu\sigma}L^{\rho\nu}
\end{aligned}$$

On retrouve bien la relation

$$\left[J^{\alpha\beta}, J^{\gamma\delta}\right] = \eta^{\beta\gamma}J^{\alpha\delta} - \eta^{\alpha\gamma}J^{\beta\delta} + \eta^{\delta\beta}J^{\gamma\alpha} - \eta^{\delta\alpha}J^{\gamma\beta}$$

□

Proposition II.1.2. *En composant par la fonction exponentielle, les $\pi(P^\rho)$ engendrent les translations de fonctions, c'est-à-dire que*

$$\forall a \in \mathbb{R}^{1,3} \qquad \exp(a^\rho \pi(P_\rho))(f)(x) = T_a f(x) := f(\cdot + a)(x)$$

De même, les $L^{\mu\nu}$ engendrent les rotations et boost de Lorentz de fonctions. C'est-à-dire que si Λ est la transformation de Lorentz associé à L on a

$$\exp(L)(f)(x) = f(\Lambda x)$$

Démonstration. On ne montre que le premier résultat, les autres étant analogues, mais avec des calculs plus compliqués. Soit $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^{1,3}$, en supposant que f est égale à sa série entière on a

$$\begin{aligned}
\exp(a\pi(P_\rho))(f)(x) &= \exp(-a\,\partial_{x^\rho})(f)(x) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-a\,\partial_{x^\rho})^n}{n!}(f)(x) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-a)^n}{n!}(\partial_{x^\rho}^n f)(x) \\
&= f(\cdot + a)(x)
\end{aligned}$$

□

II.2 Représentation spinorielle de Dirac

Définition II.2.1. *Une algèbre de Clifford réelle $\mathcal{C}l_{p,q}(\mathbb{R})$ est l'algèbre associative unitaire engendrée sur $\mathbb{R}$ par $p+q$ éléments a^μ qui vérifient :*

$$\{a^\mu, a^\nu\} = 2I_{(p,q)}$$

L'algèbre de Clifford complexe $\mathcal{C}l_{p,q}(\mathbb{C})$ n'est autre que $\mathcal{C}l_{p,q}(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$.

On va définir des matrices γ^μ qui engendrent une algèbre de Clifford puis des matrices $\gamma^{\mu\nu}$ qui engendrent une représentation de l'algèbre de Lorentz.

Définition II.2.2. *Les matrices de Pauli sont les matrices σ^μ avec :*

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Définition II.2.3. *On utilise les notations $\bar\sigma^0 = \sigma^0$ et $\bar\sigma^i = -\sigma^i$ et on appelle matrices de Dirac les matrices*

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar\sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin on définit aussi

$$\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\left[\,\gamma^\mu, \gamma^\nu\,\right]$$

Proposition II.2.1. *Les matrices γ^μ engendrent une représentation d'algèbre de Clifford, avec la relation $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$. De plus, les matrices $\gamma^{\mu\nu}$ vérifient les relations de l'algèbre de Lorentz.*

Démonstration. Pour l'algèbre de Clifford on a

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \begin{pmatrix} \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu \end{pmatrix}$$

Or un calcul montre que

$$\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu = \begin{cases} Id_2 & si \quad \mu = \nu = 0 \\ -Id_2 & si \quad \mu = \nu \neq 0 \\ -\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu & si \quad \mu \neq \nu \end{cases}$$

Donc on a bien $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$.
Pour l'algèbre de Lorentz, on calcule déjà

$$\begin{aligned} 4[\gamma^{\mu\nu}, \gamma^\alpha] &= [\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu, \gamma^\alpha] \\ &= \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\alpha - \gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\mu \\ &= \gamma^\mu\{\gamma^\nu, \gamma^\alpha\} - \gamma^\nu\{\gamma^\mu, \gamma^\alpha\} - \{\gamma^\alpha, \gamma^\mu\}\gamma^\nu + \{\gamma^\alpha, \gamma^\nu\}\gamma^\mu \\ &\quad - \gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\mu \\ &= 2\gamma^\mu\eta^{\alpha\nu} - 2\gamma^\nu\eta^{\alpha\mu} - 2\eta^{\alpha\mu}\gamma^\nu + 2\eta^{\alpha\nu}\gamma^\mu \\ &= 4(\eta^{\alpha\nu}\gamma^\mu - \eta^{\alpha\mu}\gamma^\nu) \end{aligned}$$

Donc $[\gamma^{\mu\nu}, \gamma^\alpha] = \eta^{\alpha\nu}\gamma^\mu - \eta^{\alpha\mu}\gamma^\nu$. On en déduis alors

$$\begin{aligned} \left[\gamma^{\mu\nu}, \gamma^{\alpha\beta}\right] &= \frac{1}{4}\left[\gamma^{\mu\nu}, \left[\gamma^\alpha, \gamma^\beta\right]\right] \\ &= -\frac{1}{4}\left(\left[\gamma^\alpha, \left[\gamma^\beta, \gamma^{\mu\nu}\right]\right] + \left[\gamma^\beta, \left[\gamma^{\mu\nu}, \gamma^\alpha\right]\right]\right) \\ &= -\frac{1}{4}\left(\left[\gamma^\alpha, -\eta^{\beta\nu}\gamma^\mu + \eta^{\beta\mu}\gamma^\nu\right] - \left[\gamma^\beta, \eta^{\alpha\nu}\gamma^\mu - \eta^{\alpha\mu}\gamma^\nu\right]\right) \\ &= \eta^{\beta\nu}\gamma^{\alpha\mu} - \eta^{\beta\mu}\gamma^{\alpha\nu} - \eta^{\alpha\nu}\gamma^{\beta\mu} + \eta^{\alpha\mu}\gamma^{\beta\nu} \end{aligned}$$

Ce qui est bien la relation définissant l'algèbre de Lorentz vue dans la proposition I.2.3. □

Définition II.2.4. *Les spineurs sont des éléments du revêtement double de l'algèbre (ici de Lorentz) sur lesquels on va définir une action de l'algèbre $\mathfrak{so}(1,3)$.*

Définition II.2.5. *La représentation spinorielle de Dirac de l'algèbre de Lorentz est le couple (ρ, F) où F est l'espace des spineurs, et ρ est l'application de l'algèbre de Lorentz dans $\mathrm{End}(F)$ définie par $\rho(J^{\mu\nu}) = \gamma^{\mu\nu}$.*

Dit de manière plus concrète, dans cette représentation l'algèbre de Lorentz agit sur les spineurs par la matrice $\gamma^{\mu\nu}$.

Notation. Notons la matrice

$$\gamma_5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -\sigma^0 & 0 \\ 0 & \sigma^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Id & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix}$$

Proposition II.2.2. *La représentation spinorielle de Dirac est réductible.*

Démonstration. On va, en effet, montrer que les sous-espace

$$F = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{et} \quad G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

sont stables par l'action de $\gamma^{\alpha\beta}$. La preuve sera faite uniquement pour F, celle pour G étant clairement similaire. Tout d'abord notons que γ_5 anticommute avec tout les γ^μ car on a

$$\gamma_5 \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \gamma^\mu \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ -\bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

En utilisant la formule

$$\big[[A, B], C\big] = \big\{A, \{B, C\}\big\} - \big\{B, \{A, C\}\big\}$$

On en déduit que γ_5 et $\gamma^{\mu\nu}$ commutent :

$$4[\gamma^{\mu\nu}, \gamma_5] = \big[[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \gamma_5\big] = \{\gamma^\mu, \{\gamma^\nu, \gamma_5\}\} - \{\gamma^\nu, \{\gamma^\mu, \gamma_5\}\} = 0$$

On prends alors un spineur quelconque de F : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ et on note $\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \\ g \end{pmatrix} := \gamma^{\alpha\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$

Alors on a à la fois

$$\gamma_5 \gamma^{\alpha\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \gamma_5 \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d \\ -e \\ f \\ g \end{pmatrix}$$

et

$$\gamma_5 \gamma^{\alpha\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \gamma^{\alpha\beta} \gamma_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \gamma^{\alpha\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \\ g \end{pmatrix}$$

Donc $d = e = 0$, d'où $\gamma^{\alpha\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \\ g \end{pmatrix}$ et l'espace F est bien stable. $\square$

II.3 Représentation spinorielle de Weyl

Nous allons alors construire une représentation irréductible : la représentation spinorielle de Weyl.

Définition II.3.1. *On définit les spineurs de Weyl λ_L et $\bar{\chi}_R$ à partir des spineurs de Dirac ψ_D de la manière suivante :*

$$\begin{pmatrix} \lambda_L \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi_D \; \textit{et} \; \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\chi}_R \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi_D$$

De manière concrète, il s'agit de la projection du spineur de Dirac sur ses deux premières (resp. dernières) composantes.

Remarque. λ_L (resp. $\bar{\chi}_R$) se transforme sous l'algèbre de Lorentz à partir des matrices

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu) \quad (\text{resp. } \bar{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu)\ ).$$

En effet on peut calculer :

$$\begin{aligned}
\gamma^{\mu\nu} &= \frac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) \\
&= \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\nu \\ \bar{\sigma}^\nu & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\nu \\ \bar{\sigma}^\nu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Notation. On considères les matrices $M = \exp(\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu})$ et $\bar{M} = \exp(\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\bar{\sigma}^{\mu\nu})$. De plus pour i allant de 1 à 3, on note $\theta_i = \omega_{jk}$ (en permutation circulaire) et $\varphi_i = \omega_{0i}$

Proposition II.3.1. *On a les relations*

$$M = \exp\left(-\frac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma} - \frac{1}{2}\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}\right) \ \text{et}\ \bar{M} = \exp\left(-\frac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma} + \frac{1}{2}\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}\right)$$

Démonstration. La preuve est faite pour M, les calculs étant analogues pour $\bar{M}$. On commence par calculer $\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}$ (pour $\mu \neq \nu$ car sinon c'est trivialement nul) :

— Si $\mu = 0$, alors $\nu \neq 0$ et on a

$$\sigma^{0\nu} = \frac{1}{4}(\sigma^0\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^0) = \frac{1}{4}(\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu) = \frac{1}{2}\bar{\sigma}^\nu = -\frac{1}{2}\sigma^\nu$$

— Si $\nu = 0$ on a directement

$$\sigma^{\mu 0} = -\sigma^{0\mu} = +\frac{1}{2}\sigma^\mu$$

— Si $\mu \neq 0 \neq \mu$, comme $\sigma^j\sigma^i - \sigma^i\sigma^j = 2i\sigma^k$ on a

$$\sigma^{ij} = \frac{1}{4}(\sigma^i\bar{\sigma}^j - \sigma^j\bar{\sigma}^i) = -\frac{1}{4}(-\sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i) = -\frac{i}{2}\sigma^k$$

On peut alors calculer

$$\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} = \omega_{0i}\sigma^{0i} + \omega_{ij}\sigma^{ij} = -\frac{1}{2}\sigma^i\omega_{0i} - \frac{i}{2}\sigma^k\omega_{ij} = -\frac{1}{2}\sigma^i\varphi_i - \frac{i}{2}\sigma^k\theta_k$$

D'où le résultat

$$\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} = -\frac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma} - \frac{1}{2}\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}$$

□

Ainsi, $M \in SL_2(\mathbb{C})$ agira sur les spineurs gauchers λ_L et $\bar{M} \in SL_2(\mathbb{C})$ agira sur les spineurs droitiers $\bar{\chi}_R$.

Proposition II.3.2. *Les matrices M^* et $\bar{M}$ sont équivalentes :*

$$\sigma^2 M^*(\sigma^2)^{-1} = \bar{M}$$

Démonstration. On remarque déjà que

$$\sigma^2\sigma^i(\sigma^2)^{-1} = -{\sigma^i}^*$$

On peut alors calculer

$$\begin{aligned}
\sigma^2 M^*(\sigma^2)^{-1} &= \sigma^2 \exp\left(+\frac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}^* - \frac{1}{2}\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}^*\right)\sigma^2 \\
&= \exp\left(\sigma^2\left(+\frac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}^* - \frac{1}{2}\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}^*\right)\sigma^2\right) \\
&= \exp\left(-\frac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma} + \frac{1}{2}\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}\right) \\
&= \bar{M}
\end{aligned}$$

□

On en conclut que les spineurs gauchers sont dans la représentation complexe conjuguée de celle des spineurs droitiers , et inversement.

Définition II.3.2. *On définit maintenant les matrices*

$$N^i = \frac{1}{2}(\sigma^{jk} + i\sigma^{0i}) \quad \textit{et} \quad \bar{N}^i = \frac{1}{2}(\sigma^{jk} - i\sigma^{0i})$$

Proposition II.3.3. *On a alors les égalités*

$$N^i = -\frac{i}{2}\sigma^i \quad \textit{et} \quad \bar{N}^i = 0$$

Démonstration. On a montré que $\sigma^{jk} = -\frac{i}{2}\sigma^i$ et $\sigma^{0i} = -\frac{1}{2}\sigma^i$. Il s'en suit que $N^i = \frac{1}{2}\left(-\frac{i}{2}\sigma^i - \frac{i}{2}\sigma^i\right) = -\frac{i}{2}\sigma^i$.
Et de même $\bar{N}^i = \frac{1}{2}\left(-\frac{i}{2}\sigma^i + \frac{i}{2}\sigma^i\right) = 0$ □

Remarque. Si on avait défini les matrices N et $\bar{N}$ à partir des $\bar{\sigma}^{\mu\nu}$, on aurait obtenu $N^i = 0$ et $\bar{N}^i = -\frac{i}{2}\sigma^i$. On voit donc que les spineurs droitiers et gauchers donnent chacun une matrice parmi N^i et $\bar{N}^i$ ce qui redonne bien la décomposition de l'algèbre de Lorentz que l'on avait trouvé dans la représentation vectorielle.

II.4 Représentation spinorielle de Majorana

Définition II.4.1. *Un spineur de Majorana ψ_M est un spineur de Dirac tel que*

$$\psi_M^* = B\psi_M, \textit{ avec } B = i\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition II.4.1. *Il existe de tels spineurs et ils sont de la forme*

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \bar{\psi}_R = -i\sigma^2\psi_L^* \end{pmatrix}$$

Démonstration. On calcul d'abord

$$\psi_M^* = B\psi_M = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \bar{\psi}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma^2\psi_L \\ i\sigma^2\bar{\psi}_R \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\psi_M = B^*\psi_M^* = B^*B\psi_M$$

Donc les spineurs de Majorana existent si et seulement si $B^*B = 1$, ce qui est le cas. On peut donc calculer

$$\begin{pmatrix} \psi_L \\ \bar{\psi}_R \end{pmatrix} = \psi_M = B^*\psi_M^* = \begin{pmatrix} i\sigma^2(\bar{\psi}_R)^* \\ -i\sigma^2(\psi_L)^* \end{pmatrix}$$

D'où l'égalité

$$\bar{\psi}_R = -i\sigma^2(\psi_L)^*$$

□

Proposition II.4.2. *Le spineur conjugué de charge d'un spineur de Dirac ψ_D est $\psi_D^c = -i\gamma^0\gamma^2(\psi_D^\dagger\gamma_0)^t$. Alors un spineur de Majorana est égal a son conjugué de charge : $\psi_M^c = \psi_M$*

Démonstration. On calcule

$$\begin{aligned} \psi_M^c &= -i\gamma^0\gamma^2(\psi_M^\dagger\gamma_0)^t \\ &= -i\gamma^0\gamma^2(\gamma_0)^t\psi_M^* \\ &= \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\psi_L)^* \\ -i\sigma^2\psi_L^{**} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\psi_L)^* \\ -i\sigma^2\psi_L \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \psi_L \\ -i\sigma^2(\psi_L)^* \end{pmatrix} \\ &= \psi_M \end{aligned}$$

□

Notation. On utilisera à présent la notation de van der Waerden pour les spineurs droitiers et gauchers :

$$\psi_D = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \bar{\psi}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \text{ avec } (\chi^\alpha)^* = \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$$

Proposition II.4.3. *Pour un spineur de Majorana cela donne $\psi_M = \begin{pmatrix} \lambda_\alpha \\ \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$*

Démonstration. Un calcul montre que

$$-i\sigma^2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

On a donc, comme $i\sigma^2$ est réelle

$$\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = -i\sigma^2(\lambda_\alpha)^* = (-i\sigma^2\lambda_\alpha)^* = (\varepsilon^{\alpha\beta}\lambda_\beta)^* = (\lambda^\alpha)^* = \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}$$

Ce qui donne la proposition. □

Pour rester cohérent il faut que les notations des matrices deviennent

$$\sigma^{\mu}{}_{\alpha\dot{\alpha}}\ , \quad \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}\ , \quad \sigma^{\mu\nu}{}_{\alpha}{}^{\beta}\ , \quad \bar{\sigma}^{\mu\nu\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}$$

En effet, pour un spineur de Majorana on a l'égalité $\lambda_\alpha = i\sigma^2(\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}})^*$ qui donne pour les indices $\lambda_\alpha \simeq \sigma^2{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}$; d'où la première notation. La deuxième vient de l'analogue pour les spineurs droitiers. On a aussi

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu) = \frac{1}{4}(\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\sigma}^{\nu\dot{\beta}\gamma} - \sigma^\nu{}_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\beta}\gamma}) = \sigma^{\mu\nu}{}_{\alpha}{}^{\gamma}.$$

On obtient alors la troisième notations et la quatrième est analogue. Ceci est cohérent car les spineurs gauchers se transforment par les matrices $\sigma^{\mu\nu}{}_{\alpha}{}^{\gamma}$ qui ne contiennent donc pas d'indices pointés, et inversement pour les spineurs droitiers.

Chapitre 2

Théorème de Coleman et Mandula

Jusqu'à présent on a utilisé les conventions des mathématiciens, dans cet section on utilisera les conventions physiciennes. On a fait ce choix car on utilise maintenant des opérateurs hermitiens qui agissent sur un espace de Hilbert, et les conventions sont alors plus adaptées. Voici les principales différences :

Conventions mathématiciennes	Conventions physiciennes
On définit une $\mathbb{R}$-algèbre par $\mathfrak{g} := \langle T_1, \dots T_n \rangle$ avec des coefficients réels ${f_{ab}}^c$ tels que $[T_a, T_b] = {f_{ab}}^c T_c$ et par l'identité de Jacobi.	On définit une $\mathbb{R}$-algèbre par $\mathfrak{g} := \langle T'_1, \dots T'_n \rangle$ avec des coefficients réels ${f_{ab}}^c$ tels que $[T'_a, T'_b] = i{f_{ab}}^c T'_c$ et par l'identité de Jacobi.
$g \in \mathfrak{g} \Leftrightarrow \exists \theta^\alpha \in \mathbb{R}^n$ tel que $g = \theta^\alpha T_\alpha$	$g \in \mathfrak{g} \Leftrightarrow \exists \theta^\alpha \in \mathbb{R}^n$ tel que $g = i\theta^\alpha T'_\alpha$
Le groupe de lie est donné (ici) par $G = exp(\mathfrak{g})$	Le groupe de lie est donné (ici) par $G = exp(\mathfrak{g})$
Si on veut que G soit unitaire on a :	Si on veut que G soit unitaire on a :
$G^\dagger G = Id \Rightarrow \mathfrak{g}^\dagger = -\mathfrak{g} \Rightarrow T_a^\dagger = -T_a$	$G^\dagger G = Id \Rightarrow \mathfrak{g}^\dagger = -\mathfrak{g} \Rightarrow T_a'^\dagger = +T'_a$

Avec les conventions physiciennes l'opérateur impulsion est $P^\mu = -i\partial_\mu$. Sa valeur propre est p^μ le quadri-vecteur impulsion, donc la valeur propre de l'opérateur $P_\mu P^\mu$ est $p_\mu p^\mu$. On remarque que pour une particule massive de vitesse v, on a

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(v)mc \\ \gamma(v)m\vec{v} \end{pmatrix}$$

Et donc dans le référentiel propre (où $v = 0$) on a $p_\mu p^\mu = m^2$. Donc pour une particule massive la valeur propre de l'opérateur $P_\mu P^\mu$ est m^2.

Notation. On utilisera dans la suite la convention physicienne : on notera P^μ l'opérateur impulsion de valeur propre p^μ, le quadri-vecteur impulsion. Et donc la valeur propre de l'opérateur $\sqrt{P_\mu P^\mu}$ est $\sqrt{p_\mu p^\mu}$ qui vaut la masse de la particule dans le cas massif.

Définition .0.1. *On appelle couche de masse l'ensemble des quadri-vecteurs impulsions dont la masse une valeur donnée. Par exemple la couche de masse m est l'ensemble des quadri-vecteurs impulsion p tels que $\sqrt{p_\mu p^\mu} = m$. De même deux impulsions p et q appartiennent à la même couche de masse si $\sqrt{p_\mu p^\mu} = \sqrt{q_\mu q^\mu}$.*

Nous allons maintenant énoncer et démontrer le théorème de Coleman Mandula valable dans les conditions générales de la mécanique quantique relativiste.

I Énoncé du théorème

Définition I.0.1. *La matrice S est la matrice unitaire qui relie deux ensembles d'états de particules asymptotiquement libres dans l'espace des états physiques ; ou de manière équivalente, qui donne l'évolution d'un état du passé distant $(-\infty)$ au futur distant $(+\infty)$*

Définition I.0.2. *Un générateur de symétrie est un opérateur hermitique tel que*

- *Il commute avec la matrice S*
- *Il envoie les états d'une particule sur les états d'une particule*
- *Son action sur les états d'un ensemble de particule est la somme directe de son action sur les états de chacune des particules*

Remarque. Le commutateur de deux générateurs de symétrie est un générateur de symétrie.

Proposition I.0.1. *Les opérateurs P^μ et $J^{\mu\nu}$ sont des générateurs de symétrie.*

Définition I.0.3. *Un générateur de symétrie interne est un générateur de symétrie qui n'est pas une symétrie de l'espace temps. Il commute avec les P^μ et les $J^{\mu\nu}$ et qui agit sur tout état physique par une matrice hermitienne indépendante de l'impulsion ou du spin.*

Théorème I.0.2. ***Théorème de Coleman Mandula***
On suppose que :

1) *La structure mathématique sous-jacente est une algèbre de Lie d'opérateurs qui agissent sur l'espace temps $\mathbb{R}^{1,3}$,*
2) *Pour tout entier M il existe un nombre fini de types de particules de masse inférieure à M,*
3) *Tout état d'un couple de particules subit des réactions à toutes les énergies, sauf éventuellement un ensemble isolé d'énergies,*
4) *Les amplitudes de toute diffusion élastique d'un couple de particules, sont des fonctions analytiques de l'angle de diffusion, pour presque toutes les énergies et tous les angles (sauf un ensemble isolé),*
5) *Les générateurs de l'algèbre agissent sur les états physiques par des matrices dont les coefficients sont des distributions.*

Alors les seules algèbres de Lie composées de générateurs de symétrie possibles sont celles engendrées par les P^μ, les $J^{\mu\nu}$ et d'éventuels générateurs de symétrie interne.

II Structure de la démonstration

La démonstration sera faite par étapes :

Dans une première partie on s'intéresse au cas où tous les éléments de l'algèbre commutent avec l'opérateur impulsion P^μ. On veut utiliser un théorème classique de décomposition d'algèbres de Lie, et pour cela on construit un isomorphisme entre les générateur de l'algèbre et la partie de trace nulle de leur action sur les états d'un couple de particules. On déduis de cet isomorphisme que l'algèbre est toujours de dimension finie, puis on obtient une décomposition de l'algèbre en somme directe de plusieurs algèbres $u(1)$ et d'une algèbre semi-simple compacte.

Dans une deuxième partie on décrit tous les opérateurs de l'algèbre, toujours dans le cas où elle commute avec l'opérateur P^μ. On commence par décrire les générateurs des algèbres $u(1)$ puis on résonne de manière analogue pour les autres.

Enfin dans un dernière partie on considère le cas général où des opérateurs peuvent ne pas commuter avec l'opérateur P^μ. On décrit d'abord l'action de ces opérateurs, et on regarde dans quels cas elle n'est pas triviale. On conclut en décrivant ces actions, donc les opérateurs, d'abord dans le cas où la théorie comporte des particules de masse non nulle, puis dans le cas non massif.

III Cas où l'algèbre commute avec l'opérateur impulsion

On suppose dans un premier temps que l'algèbre de Lie considérée $\mathcal{L}$ ne contient que des éléments qui commutent avec les opérateurs impulsion P_μ. On note B_α des générateurs de cette algèbre.

Notation. Un état d'un ensemble de particules est ici noté

$$|pm, qn, \dots\rangle \,,$$

où p est le quadri-vecteur impulsion de la première particule dans cet état, q celui de la deuxième... Et de même $m, n \dots$ sont des indices qui représentent d'autres nombres quantiques ou le type des particules (de masse $\sqrt{p^\mu p_\mu}$), qui sont donc discrets.

Notation. On désigne par $b_\alpha(p)$ la matrice hermitienne finie (car d'après la hypothèse 2) du théorème il y a un nombre fini d'états, on le note t) qui définit l'action de B_α sur un état d'une particule d'impulsion p :

$$B_\alpha\,|pm\rangle = \sum_{m'} (\ b_\alpha(p)\ )_{m',m}\ \ |pm'\rangle$$

Pour un ensemble de particules on obtient alors

$$\begin{aligned} B_\alpha \left|pm, qn, \dots\right\rangle = & \sum_{m'} (\ b_\alpha(p)\ )_{m',m}\ \left|pm', qn, \dots\right\rangle \\ & + \sum_{n'} (\ b_\alpha(q)\ )_{n',n}\ \left|pm, qn', \dots\right\rangle \\ & + \dots \end{aligned}$$

Proposition III.0.1. *Pour une impulsion p fixée, l'application π qui à B_α associe la matrice $b_\alpha(p)$ définit un homomorphisme d'algèbres de Lie. Alors le couple constitué de l'espace des états physique et du morphisme π est une représentation de l'algèbre $\mathcal{L}$.*

Démonstration. Si on note

$$[B_\alpha, B_\beta] = i C_{\alpha\beta}{}^{\gamma} B_\gamma,$$

alors on a aussi

$$[b_\alpha(p), b_\beta(p)] = i C_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\ b_\gamma(p).$$

Et on obtient bien

$$\pi([B_\alpha, B_\beta]) = \pi(i C_{\alpha\beta}{}^{\gamma} B_\gamma) = i C_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\ b_\gamma(p) = [b_\alpha(p), b_\beta(p)] = [\pi(B_\alpha), \pi(B_\beta)]$$

□

III.1 Théorème de décomposition

Le but de cette première partie est de trouver une manière d'utiliser le théorème de décomposition suivant. On rappelle que $u(1)$ est une algèbre de dimension 1 correspondant aux imaginaires purs.

Théorème III.1.1. *Toute algèbre de Lie L composée de matrices hermitiennes finies se décompose au maximum ainsi :*

$$L = u(1) \oplus \cdots \oplus u(1) \oplus C$$

avec C une algèbre de Lie semi-simple compacte (définitions en annexe).

Remarque. On admet ce théorème assez connu.

On aurait alors intuitivement envie d'appliquer le théorème III.1.1 à l'algèbre engendrée par les $b_\alpha(p)$. Mais on ne pourra rien en retirer car le morphisme π n'est pas nécessairement un isomorphisme. En effet, si π avait été un isomorphisme, on aurait eut l'implication suivante :

S'il existe des coefficients c^α et une impulsion p tels que $\sum_\alpha c^\alpha b_\alpha(p) = 0$ alors pour toutes les impulsions k on a $\sum_\alpha c^\alpha b_\alpha(k) = 0$. Ce qui est équivalent à $\sum_\alpha c^\alpha B_\alpha = 0$, et donc les B_α sont liés.

Or il arrive que l'hypothèse : il existe des coefficients c^α et une impulsion p tels que $\sum_\alpha c^\alpha b_\alpha(p) = 0$, soit vérifiée sans que les B_α ne soient liés. Par exemple on peut prendre un quadri-vecteur p donc la composante spatiale est nulle, et des coefficients nuls sauf pour deux rotations de l'espaces (qui appartiennent à l'algèbre de Lorentz). On prends alors des coefficients opposés pour ces rotations et on obtient l'égalité sans qu'elles soient liées.

L'application π n'est donc pas un isomorphisme, et appliquer le théorème à l'algèbre engendrée par les $b_\alpha(p)$ ne nous sert à rien.

III.2 Construction d'un autre morphisme

Définition III.2.1. *Pour des impulsions p et q fixées, on défini l'application*

$$\begin{array}{rccc} \rho: & \mathcal{L} & \to & M_t(\mathbb{C}) \\ & B_\alpha & \mapsto & b_\alpha(p,q) \end{array}$$

où $b_\alpha(p,q)$ est la matrice qui défini l'action de B_α sur les états d'un couple de particules d'impulsions p et q.

D'après la définition de générateur de symétrie l'action de B_α sur un couple de particule est la somme directe de son action sur chacune des particules. On a donc le formule

$$\rho(B_\alpha) = \big(b_\alpha(p,q)\big)_{m'n',mn} = \big(b_\alpha(p)\big)_{m'm}\delta_{n'n} + \big(b_\alpha(q)\big)_{n'n}\delta_{m'm}$$

On montre comme précédemment que ψ est un homomorphisme d'algèbre de Lie, il définit donc une autre représentation de l'algèbre $\mathcal{L}$.

Proposition III.2.1. *La matrice S est invariante par diffusion élastique (ou quasi-élastique) d'un couple de particules d'impulsions p et q en un couple de particules d'impulsions p' et q' dans la même couche de masses, c'est-à-dire telles que $\sqrt{p^\mu p_\mu} = \sqrt{p'^\mu p'_\mu}$ et $\sqrt{q^\mu q_\mu} = \sqrt{q'^\mu q'_\mu}$.*

Notation. On remarque ensuite que la matrice S, $S(pm, qn \to p'm', q'n')$ est de taille t (la même que $b(p,q)$ et $b(p',q')$) et qu'elle conserve la somme des impulsions. Elle s'écrit donc :

$$S(pm, qn \to p'm', q'n') = \delta^4(p'+q'-p-q)\big(S(p',q';p,q)\big)_{m'n',mn} \tag{2.1}$$

avec $\delta^4(p'+q'-p-q)$ la distribution de Dirac.

La proposition implique alors l'égalité

$$b_\alpha(p',q')S(p',q';p,q) = S(p',q';p,q)b_\alpha(p,q)$$

Lemme III.2.2. *Pour presque toutes les impulsions p' et q' dans la même couche de masse que p et q et telles que $p'+q'=p+q$, la matrice $S(p',q';p,q)$ est inversible et donc les matrices $b_\alpha(p',q')$ et $b_\alpha(p,q)$ sont équivalentes.*

Démonstration. On admet que les hypothèse 3 et 4 du théorème de Coleman et Mandula et le théorème optique assurent que pour presque toutes les impulsions p,q et p',q' dans la même couche de masse et telles que $p+q=p'+q'$, la matrice $S(p',q';p,q)$ n'a pas de singularité. Elle est donc inversible.

Sous ces hypothèses on peut alors écrire

$$b_\alpha(p',q') = S(p',q';p,q)b_\alpha(p,q)S(p',q';p,q)^{-1}$$

et on voit $b_\alpha(p',q')$ et $b_\alpha(p,q)$ sont des matrices équivalentes. □

Corollaire. *Si pour des impulsions p et q fixées on a $\sum_\alpha c^\alpha b_\alpha(p,q) = 0$ alors on aura $\sum_\alpha c^\alpha b_\alpha(p',q') = 0$ pour presque toutes les impulsions p' et q' dans la même couche de masse que p et q et telles que $p' + q' = p + q$.*

Le corollaire découle immédiatement du lemme, et on a alors pour tous entiers m, m', n et n' l'égalité :

$$\sum_\alpha c^\alpha \big(b_\alpha(p',q')\big)_{m'n',mn} = \sum_\alpha c^\alpha \big((b_\alpha(p'))_{m'm}\delta_{n'n} + (b_\alpha(q'))_{n'n}\delta_{m'm}\big) = 0$$

Comme les coefficients de $b_\alpha(p')$ sont différents de ceux du delta associé, et de même pour $b_\alpha(q')$, cette égalité implique la propriété suivante :

Proposition III.2.3. *Si pour des impulsions p et q fixées on a $\sum_\alpha c^\alpha b_\alpha(p,q) = 0$ alors les matrices $\sum_\alpha c^\alpha b_\alpha(p')$ et $\sum_\alpha c^\alpha b_\alpha(q')$ sont des multiples de la matrice identité. De plus, les coefficients de proportionnalités sont opposés.*

Cependant ces deux sommes ne sont pas nulles pour autant, or c'est de ce résultat dont nous aurions besoin. Pour contourner ce problème on va observer la partie de trace nulle de ces matrices.

III.3 Partie de trace nulle

Sous l'hypothèse que p' et q' appartiennent à la même couche de masse que p et q, et que $p' + q' = p + q$ on a montré que $b_\alpha(p,q)$ et $b_\alpha(p,q)$ sont équivalentes. Elles ont donc même trace. On a alors

$$\mathrm{Tr}\big(\ (b_\alpha(p'))_{m'm}\delta_{n'n} + (b_\alpha(q'))_{n'n}\delta_{m'm}\ \big) = \mathrm{Tr}\big(\ (b_\alpha(p))_{m'm}\delta_{n'n} + (b_\alpha(q))_{n'n}\delta_{m'm}\ \big)$$

D'où

$$\begin{aligned} &N\big(\sqrt{q_\mu q^\mu}\big)\mathrm{Tr}(b_\alpha(p')) + N\big(\sqrt{p_\mu p^\mu}\big)\mathrm{Tr}(b_\alpha(q')) \\ &= N\big(\sqrt{q_\mu q^\mu}\big)\mathrm{Tr}(b_\alpha(p)) + N\big(\sqrt{p_\mu p^\mu}\big)\mathrm{Tr}(b_\alpha(q)) \end{aligned}$$

Avec $N\big(\sqrt{q_\mu q^\mu}\big)$ la multiplicité des types de particules de masse $\sqrt{q_\mu q^\mu}$. Ceci donne alors

$$\frac{\mathrm{Tr}(b_\alpha(p'))}{N\big(\sqrt{p_\mu p^\mu}\big)} + \frac{\mathrm{Tr}(b_\alpha(q'))}{N\big(\sqrt{q_\mu q^\mu}\big)} = \frac{\mathrm{Tr}(b_\alpha(p))}{N\big(\sqrt{p_\mu p^\mu}\big)} + \frac{\mathrm{Tr}(b_\alpha(q))}{N\big(\sqrt{q_\mu q^\mu}\big)}$$

Pour que ceci soit vérifié dès que $p' + q' = p + q$ il faut que la fonction $\mathrm{Tr}(b_\alpha(p))/N\big(\sqrt{p_\mu p^\mu}\big)$ soit du premier degré en p. Donc il faut qu'il existe des coefficients (réels) a^μ_α indépendants de p et un terme constant K tels que :

$$\frac{\mathrm{Tr}(b_\alpha(p))}{N\big(\sqrt{p_\mu p^\mu}\big)} = a^\mu_\alpha p_\mu + K \tag{2.2}$$

On va supposer que le terme constant K est nul, car dès que le modèle physique contient des transformations où le nombre de particules n'est pas conservé ce terme doit disparaitre. Or cette situation est très courante, et de plus, laisser ce terme constant ne changerait au final que l'action de générateurs de symétrie internes, et non pas la structure de la démonstration.

Définition III.3.1. *On défini de nouveaux générateurs de symétrie par :*

$$B_\alpha^\# := B_\alpha - a_\alpha^\mu P_\mu$$

On défini aussi, pour une impulsion p fixée, l'homomorphisme d'algèbres de Lie

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathcal{L} & \to & M_t(\mathbb{C}) \\ & B_\alpha & \mapsto & b_\alpha^\#(p) \end{array} \tag{2.3}$$

où $b_\alpha^\#(p)$ est la matrice qui donne l'action de $B_\alpha^\#$ sur une particule d'impulsion p.

Remarque. On devrait normalement montrer que $B_\alpha^\#$ est bien un générateur de symétrie, mais c'est clair car B_α et P_μ en sont. Et ψ est bien un homomorphisme d'algèbre de lie pour les mêmes raisons que précédemment, il définit donc aussi une représentation de l'algèbre $\mathcal{L}$.

On a alors l'égalité suivante :

$$\left(b_\alpha^\#(p)\right)_{n'n} = \left(b_\alpha(p)\right)_{n'n} - \frac{\mathrm{Tr} b_\alpha(p)}{N\left(\sqrt{p_\mu p^\mu}\right)}\delta_{n'n}$$

Celle-ci implique que la matrice $b_\alpha^\#$ est de trace nulle, et que donc ψ est un homomorphisme de $\mathcal{L}$ dans l'algèbre des matrices de trace nulle $\mathfrak{sl}_t(\mathbb{C})$.

Proposition III.3.1. *Les opérateurs $B_\alpha^\#$ satisfont les mêmes relations de commutations que les B_α :*

$$\left[B_\alpha^\#, B_\beta^\#\right] = iC_{\alpha\beta}{}^\gamma B_\gamma^\#$$

Démonstration. Comme, par hypothèse, B_α commute avec les P_μ on peut calculer :

$$\begin{aligned} \left[B_\alpha^\#, B_\beta^\#\right] &= \left[B_\alpha - a_\alpha^\mu P_\mu, B_\beta - a_\beta^\nu P_\nu\right] \\ &= \left[B_\alpha, B_\beta\right] - a_\beta^\nu\left[B_\alpha, P_\nu\right] - a_\alpha^\mu\left[P_\mu, B_\beta\right] + a_\alpha^\mu a_\beta^\nu\left[P_\mu, P_\nu\right] \\ &= \left[B_\alpha, B_\beta\right] \\ &= iC_{\alpha\beta}{}^\gamma B_\gamma \\ &= iC_{\alpha\beta}{}^\gamma\left(B_\gamma^\# + a_\gamma^\mu P_\mu\right) \end{aligned}$$

Et de même

$$\begin{aligned} \left[b_\alpha^\#(p), b_\beta^\#(p)\right] &= \left[b_\alpha(p) - \frac{\mathrm{Tr} b_\alpha(p)}{N\left(\sqrt{p_\mu p^\mu}\right)}I, b_\beta(p) - \frac{\mathrm{Tr} b_\beta(p)}{N\left(\sqrt{p_\mu p^\mu}\right)}I\right] \\ &= \left[b_\alpha(p), b_\beta(p)\right] \\ &= iC_{\alpha\beta}{}^\gamma b_\gamma(p) \\ &= iC_{\alpha\beta}{}^\gamma\left(b_\gamma^\#(p) + a_\gamma^\mu p_\mu\right) \\ &= iC_{\alpha\beta}{}^\gamma b_\gamma^\#(p) + iC_{\alpha\beta}{}^\gamma a_\gamma^\mu p_\mu I \end{aligned}$$

Mais $\left[b_\alpha^\#(p), b_\beta^\#(p)\right]$ est une matrice de trace nulle car $b_\alpha^\#(p)$ et $b_\beta^\#(p)$ le sont. Ceci force donc $C_{\alpha\beta}{}^\gamma a_\gamma^\mu p_\mu = 0$ pour toute impulsion p, d'où $C_{\alpha\beta}{}^\gamma a_\gamma^\mu = 0$. Et en appliquant ceci à la première égalité on obtient bien le résultat. □

Définition III.3.2. *Pour p et q fixés, on définit l'homomorphisme*

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \mathcal{L} & \to & \mathfrak{sl}_t(\mathbb{C}) \\ & B_\alpha & \mapsto & b_\alpha^\#(p,q) \end{array}$$

où $b_\alpha^\#(p,q)$ est la matrice qui définit l'action de $B_\alpha^\#$ sur les états d'un couple de particules d'impulsions p et q.

Le couple constitué de l'espace des états physique et du morphisme φ est alors une représentation de l'algèbre $\mathcal{L}$ pour des impulsions p et q fixées.
Par ailleurs, d'après la définition de générateur de symétrie l'action de $B_\alpha^\#$ sur les états d'un couple de particules est la somme directe de son action les états de chaque particule. On peut alors écrire

$$\left(b_\alpha^\#(p,q)\right)_{m'n',mn} = \left(b_\alpha^\#(p)\right)_{m'm}\delta_{n'n} + \left(b_\alpha^\#(q)\right)_{n'n}\delta_{m'm}$$

Lemme III.3.2. *Les matrices $b_\alpha^\#(p,q)$ vérifient la même relation de commutation que les $B_\alpha^\#$*

$$\left[b_\alpha^\#(p,q), b_\beta^\#(p,q)\right] = iC_{\alpha\beta}{}^\gamma b_\gamma^\#(p,q)$$

et l'amplitude de diffusion élastique vérifie

$$b_\alpha^\#(p',q')S(p',q';p,q) = S(p',q';p,q)b_\alpha^\#(p,q)$$

Démonstration. La première égalité viens des propriétés d'une représentation : les matrices $b_\alpha^\#(p,q)$ définissent l'action des opérateurs $B_\alpha^\#$ sur les états d'un couple de particules, ils ont donc nécessairement les mêmes relations de commutations. Et la deuxième égalité découle directement du fait que $B_\alpha^\#$ est un générateur de symétrie. □

Proposition III.3.3. *Si pour des impulsions p et q fixées on a $\sum_\alpha c^\alpha b_\alpha^\#(p,q) = 0$ alors pour presque toutes les impulsions p' et q' dans la même couche de masse que p et q et telles que $p'+q' = p+q$, on a l'égalité*

$$\sum_\alpha c^\alpha b_\alpha^\#(p') = \sum_\alpha c^\alpha b_\alpha^\#(q') = 0$$

Démonstration. Le même raisonnement que dans la partie précédente nous montre, pour commencer, que ces deux sommes de matrices sont des multiples de l'identité :

On rappelle que pour cela on montre que la matrice $S(p',q';p,q)$ est inversible, que donc les matrices $b_\alpha^\#(p',q')$ et $b_\alpha^\#(p,q)$ sont semblables. On en déduis ensuite l'égalité

$$\sum_\alpha c^\alpha \left((b_\alpha^\#(p'))_{m'm}\delta_{n'n} + (b_\alpha^\#(q'))_{n'n}\delta_{m'm}\right) = 0$$

qui implique ce premier résultat.

Ensuite on remarque que $\sum\limits_\alpha c^\alpha b_\alpha^\#(p')$ est une matrice multiple de l'identité et de trace nulle, c'est donc le matrice nulle (et de même pour l'autre). □

On aimerai pouvoir conclure que $\sum_{\alpha} c^{\alpha} b_{\alpha}^{\#}(k) = 0$ pour toutes les impulsions k, mais pour l'instant on l'a seulement montré sous les hypothèses de la proposition. Pour se ramener au cas général, Coleman et Mandula utilisent une astuce :

Proposition III.3.4. *Si pour des impulsions p et q fixées on a*

$$\sum_{\alpha} c^{\alpha} b_{\alpha}^{\#}(p, q) = 0$$

Alors pour presque toute impulsion k on a l'égalité

$$\sum_{\alpha} c^{\alpha} b_{\alpha}^{\#}(k) = 0$$

Démonstration. On rappelle que l'hypothèse implique que pour presque toutes les impulsions p' et q' dans la même couche de masse que p et q et telles que $p' + q' = p + q$, on a

$$\sum_{\alpha} c^{\alpha} b_{\alpha}^{\#}(p') = \sum_{\alpha} c^{\alpha} b_{\alpha}^{\#}(q') = 0$$

Cette égalité est vrai en particulier pour p et q. Mise en relation avec la définition

$$\left(b_{\alpha}^{\#}(p, q)\right)_{m'n',mn} := \left(b_{\alpha}^{\#}(p)\right)_{m'm} \delta_{n'n} + \left(b_{\alpha}^{\#}(q)\right)_{n'n} \delta_{m'm}$$

On obtient alors

$$\sum_{\alpha} c^{\alpha} b_{\alpha}^{\#}(p, q') = 0$$

On peut alors déduire pour presque toutes les impulsions k telles que $p + q' - k$ est dans la même couche de masse la relation

$$\sum_{\alpha} c^{\alpha} b_{\alpha}^{\#}(k, p + q' - k) = 0$$

Et donc en ré-appliquant la proposition précédente on obtient

$$\sum_{\alpha} c^{\alpha} b_{\alpha}^{\#}(k) = 0$$

Mais finalement par un argument de degré de liberté on montre que l'on peut choisir n'importe quelle impulsion k dans un volume de l'espace des impulsions décrit par p et q, et elle vérifiera toujours la condition que $p + q' - k$ est dans la même couche de masse.

En effet, le fait que q' et $p + q + q'$ soient dans la même couche de masse donne deux équations ce qui laisse deux paramètres libres pour le choix de q'. Si on choisit un k on peut alors prendre le q' qui permet que $p + q' - k$ soit dans la couche de masse.

Donc pour un k fixé, il suffit au départ de prendre un p et un q assez grands et alors $p + q' - k$ et k seront dans la même couche de masse. On aura alors bien

$$\sum_{\alpha} c^{\alpha} b_{\alpha}^{\#}(k) = 0$$

$\square$

Corollaire. *Si pour des impulsions p et q fixées on a*

$$\sum_\alpha c^\alpha b_\alpha^\#(p,q) = 0$$

Alors pour toute impulsion k on a

$$\sum_\alpha c^\alpha b_\alpha^\#(k) = 0$$

et donc l'opérateur $\sum_\alpha c^\alpha B_\alpha^\#$ est l'opérateur nul.

Démonstration. On a déjà montré le résultat pour presque toutes les impulsions k. Supposons maintenant par l'absurde, que pour une impulsion k_0 la somme ne soit pas nulle.
Alors le générateur de symétrie $\sum_\alpha c^\alpha B_\alpha^\#$ interdit pour presque toutes les impulsions k, k' et k'' une diffusion élastique d'un couple de particules d'impulsions k_0 et k vers un couples de particules d'impulsions k' et k''.
Mais comme l'amplitude de la diffusion est supposée être une fonction analytique, cette transformation est toujours possible pour certaines impulsions k' et k'' ; d'où la contradiction. □

Théorème III.3.5. *Pour des impulsions p et q fixées, l'homomorphisme d'algèbres de Lie*

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathcal{L} & \to & \mathfrak{sl}_t(\mathbb{C}) \\ & B_\alpha^\# & \mapsto & b_\alpha^\#(p,q) \end{array} \quad \textit{se restreint à isomorphisme sur son image.}$$

Démonstration. On a montré l'implication

$$\sum_\alpha c^\alpha b_\alpha^\#(p,q) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_\alpha c^\alpha B_\alpha^\# = 0$$

Donc l'application qui envoie $B_\alpha^\#$ sur $b_\alpha^\#(p,q)$ est injective. On utilise pour cela l'équivalence

$$\left(\sum_i \lambda_i \varphi(x_i) = 0 \Rightarrow \sum_i \lambda_i x_i = 0 \right) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \text{ est injectif}$$

□

III.4 Corollaire : l'algèbre est toujours de dimension finie

On peut déduire de cette proposition un corollaire intéressant :

Corollaire. *Il y a un nombre fini de générateurs de symétrie B_α indépendants, et donc l'algèbre de Lie de symétrie est nécessairement de dimension finie.*

Démonstration. Ce résultat découle de l'hypothèse 2) du théorème de Coleman et Mandula.
En effet de le nombre de matrices $b_\alpha^\#$ indépendantes est inférieur au nombre $N\left(\sqrt{p_\mu p^\mu}\right) N\left(\sqrt{q_\mu q^\mu}\right)$, qui est fini par hypothèse. Comme φ est un isomorphisme on en conclut qu'il y a un nombre fini de générateurs de symétrie B_α indépendants. □

III.5 Application du théorème de décomposition

On peut finalement appliquer le théorème de décomposition III.1.1 à l'algèbre engendrée par les matrices $b_\alpha^\#(p,q)$. On rappelle le théorème :

Théorème III.5.1. *Toute algèbre de Lie L composée de matrices hermitiennes finies se décompose au maximum ainsi :*

$$L = u(1) \oplus \cdots \oplus u(1) \oplus C$$

avec C une algèbre de Lie semi-simple compacte.

D'après l'isomorphisme φ il en découle donc le théorème de décomposition de notre algèbre :

Théorème III.5.2. *L'algèbre engendrée par les générateurs de symétrie $B_\alpha^\#$ de trace nulle qui commutent avec l'opérateur impulsion P^μ, est au plus une somme directe d'une algèbre de Lie semi-simple compacte, et de plusieurs algèbres de Lie $u(1)$.*

IV Description de l'algèbre dans le cas où elle commute avec P^μ

IV.1 Opérateurs de Lorentz

On va commencer par s'intéresser aux algèbres $u(1)$.

Proposition IV.1.1. *Pour toutes impulsions p et q correspondants à des particules réelles (donc de genre temps ou lumière) on peut trouver un générateur de l'algèbre de Lorentz J qui laisse les couches de masses correspondant à p et q invariantes.*

Démonstration. Si les quadri-vecteurs impulsions p et q sont du genre temps, et parallèles on peut prendre on peut prendre pour J un rotation de l'espace, d'axe principal donné par la direction commune de p et q.
Sinon $p+q$ sera un quadri-vecteur du genre temps. On peut alors se placer dans un référentiel un translation rectiligne et uniforme d'impulsion $p+q$ par rapport au précédent, et donc $p+q=0$, c'est-à-dire $p=-q$. Il suffit alors de prendre pour J une rotation de l'espace autour de l'axe commun à p et q et de la conjuguer par la transformation qui permet de revenir au premier référentiel. □

Si l'opérateur J agit sur les états d'un couple de particules d'impulsions p et q, il possède donc deux sous espaces stables complémentaires, et on peut choisir un base qui diagonalise J :

$$J\,|pm, qn\rangle = \sigma(m,n)\,|pm, qn\rangle$$

IV.2 Description des algèbres $u(1)$

Lemme IV.2.1. *L'opérateur hermitien $\left[J, B_\alpha^\#\right]$ est une combinaison linéaire des opérateurs $B_\beta^\#$.*

Démonstration. Comme $[P_\mu, J]$ est une combinaison linéaire des P_μ, qui commutent avec $B_\alpha^\#$ on a

$$[P_\mu, [J, B_\alpha^\#]] = -[B_\alpha^\#, [P_\mu, J]] - [J, [B_\alpha^\#, P_\mu]] = 0$$

Donc $\left[J, B_\alpha^\#\right]$ commute avec tous les P_μ et s'exprime alors par définition comme combinaison linéaire des B_β. De plus un commutateur de générateurs de symétrie est nécessairement de trace nulle ; d'où le résultat. □

On note $B_i^\#$ l'opérateur hermitien qui engendre la i-ème algèbre $u(1)$ parmi les $B_\beta^\#$. Alors nécessairement il commute avec tous les autres $B_\beta^\#$ par définition de la somme directe d'algèbres de Lie. Donc d'après le lemme on obtient l'égalité :

$$\left[B_i^\#, \left[J, B_i^\#\right]\right] = 0$$

Proposition IV.2.2. *Chacun des générateurs $B_i^\#$ des algèbres $u(1)$ commute avec l'opérateur J.*

Démonstration. On a vu que pour les états qui diagonalisent l'opérateur J on a

$$\left[B_i^\#, \left[J, B_i^\#\right]\right] |pm, qn\rangle = 0$$

Mais en calculant la valeur attendue de cet opérateur sur l'état $|pm, qn\rangle = 0$ (voir le livre [2] de Weinberg) on en conclut pour tout m et n, l'égalité :

$$\sum_{m',n'} (\sigma(m', n') - \sigma(m, n)) \left| \left(b_i^\#(p, q)\right)_{m'n',mn} \right|^2 = 0$$

On remarque déjà que comme il y a un nombre fini d'états (d'après la hypothèse 2) du théorème de Coleman et Mandula) la somme est finie. On va ensuite montrer l'implication :

Si $\sigma(m', n') \neq \sigma(m, n)$ alors le coefficient $\left(b_i^\#(p, q)\right)_{m'n',mn}$ est nul pour ces entiers m, n, m' et n'.

Pour cela on suppose par l'absurde qu'il existe m, n, m' et n' tels que $\sigma(m, n) \neq \sigma(m', n')$ et $\left(b_i^\#(p, q)\right)_{m'n',mn} \neq 0$. Alors il existerai un valeur de $\sigma(m, n)$ plus petite qui vérifie les mêmes conditions. Et les termes résultants de la somme non nuls seraient alors positifs ; d'où la contradiction.

Pour conclure on observe que

$$B_i^\# J |pm, qn\rangle = \sum_{m',n'} \sigma(m, n)\, b_i^\#(p, q)_{m'n',mn} |pm', qn'\rangle$$

et que

$$J B_i^\# |pm, qn\rangle = \sum_{m',n'} \sigma(m', n')\, b_i^\#(p, q)_{m'n',mn} |pm', qn'\rangle$$

Donc si $\sigma(m, n) = \sigma(m', n')$ alors l'action de $B_i^\#$ commute avec celle de J sur cet état. Et si $\sigma(m, n) \neq \sigma(m', n')$ alors on a montré que $\left(b_i^\#(p, q)\right)_{m'n',mn} = 0$ et l'action commute aussi ; d'où le résultat. □

Comme on peut choisir les quadri-vecteurs impulsions p et q sans restriction, on en conclut que les générateurs $B_i^{\#}$ des algèbres $u(1)$ commutent avec tous les générateurs $J_{\mu\nu}$ de l'algèbre de Lorentz

IV.3 Expression des générateurs de symétrie B_α

Lemme IV.3.1. *Les B_α qui engendrent une algèbre de Lie semi-simple compacte commutent avec toutes les transformations de Lorentz Λ.*

Démonstration. On note $U(\Lambda)$ l'opérateur unitaire qui agit sur un espace de Hilbert représentant la transformation de Lorentz Λ. Alors $U(\Lambda)B_a U^{-1}(\Lambda)$ est un générateur de symétrie hermitien qui commute clairement avec ${\Lambda_\mu}^\nu P_\nu$. Comme ${\Lambda_\mu}^\nu$ n'a pas de singularité, il commute aussi avec P_ν et s'écrit donc comme combinaison des B_α avec des coefficients réels ${D(\Lambda)_\alpha}^\beta$:

$$U(\Lambda)B_a U^{-1}(\Lambda) = {D(\Lambda)_\alpha}^\beta B_\beta$$

Les coefficients ${D(\Lambda)_\alpha}^\beta$ vérifient la relation

$$D(\Lambda_1)D(\Lambda_2) = D(\Lambda_1\Lambda_2)$$

De plus, l'opérateur $U(\Lambda)B_a U^{-1}(\Lambda)$ vérifie clairement les mêmes relations de commutations que B_α, on a donc l'égalité pour les constantes de structures :

$$C^\gamma_{\alpha\beta} = {D(\Lambda)_\alpha}^{\alpha'} {D(\Lambda)_\beta}^{\beta'} {D(\Lambda^{-1})_\gamma}^{\gamma'} C^{\gamma'}_{\alpha'\beta'}$$

On défini ensuite les matrices

$$G_{\beta\delta} = C^\gamma_{\alpha\beta} C^\alpha_{\gamma\delta}$$

Comme on a supposé que les B_α engendrent une algèbre de Lie semisimple compacte, cette matrice est définie positive. On a alors

$$G_{\beta\delta} = {D(\Lambda)_\beta}^{\beta'} {D(\Lambda)_\delta}^{\delta'} G_{\beta'\gamma'}$$

Et dans ce cas, $G^{1/2}D(\Lambda)G^{-1/2}$ donnent des représentations orthogonales donc unitaires du groupe de Lorentz, de dimension finie. Mais ce groupe n'est pas compact donc sa seule représentatoin de ce type est la représentation triviale, donc $G^{1/2}D(\Lambda)G^{-1/2} = Id$ et $D(\Lambda) = Id$. En remplaçant dans la définition on obtient bien

$$U(\Lambda)B_\alpha = B_\beta U(\Lambda)$$

□

Théorème IV.3.2. *Les générateurs de symétrie B_α qui commutent avec les opérateurs P_μ sont*

- *soit des générateurs de symétrie interne*
- *soit des combinaisons linéaires des P_μ.*

Démonstration. On a montré que les générateurs $B_i^{\#}$ des algèbres $u(1)$ commutent avec les générateurs de l'algèbre de Lorentz. En particulier, ils commutent avec les boost de Lorentz et donc les matrices $(b_i^{\#}(p))_{n',n}$ sont indépendante du tri-vecteur impulsion. De même comme les $B_i^{\#}$ commutent avec les rotations, on en déduis que les matrices agissent comme des matrices unitaires sur les nombres quantiques. Ceci signifie exactement que les $B_i^{\#}$ engendrent des symétries internes.

Le lemme précédent montre que les $B_\alpha^{\#}$ qui engendrent une algèbre de Lie semi-simple compacte commutent avec toutes les transformations de Lorentz. On en conclut de la même manière que précédemment qu'ils engendrent aussi des symétries internes.

On a alors montré que tous les générateurs $B_\alpha^{\#}$ sont en fait des générateurs de symétrie interne. Avec la définition

$$B_\alpha = B_\alpha^{\#} + a_\alpha^\mu P_\mu$$

on remarque que si les coefficients a sont tous nuls B_α est un générateur de symétrie interne, et sinon c'est une combinaison linéaire des P_μ ; d'où la proposition. $\square$

V Cas général

On se place maintenant dans le cas général et on ne suppose plus que les générateurs de l'algèbre commutent avec les opérateurs P_μ. L'action d'un tel générateur A_α sur une particule est donnée par

$$A_\alpha \left|p, n\right\rangle = \int \sum_{n'} \left(\mathcal{A}_\alpha(p', p)\right)_{n'n} \left|p', n'\right\rangle d^4p'$$

avec p et p' désignant les quadri-vecteurs impulsions et n et n' désignant les types de particules pour ces impulsions.

V.1 Cas non triviaux

Proposition V.1.1. *Si $p' \neq p$, la résultante de l'action selon p' est nulle, c'est-à-dire que le coefficient $\mathcal{A}_\alpha(p', p)$ est nul.*

Démonstration. Clairement, si p et p' n'appartiennent pas à la même couche de masse (on rappelle que cela signifie que $\sqrt{p_\mu p^\mu} = \sqrt{p'_\mu p'^\mu}$) alors le coefficient $\mathcal{A}_\alpha(p', p)$ est nul, l'opérateur doit conserver la masse. Ensuite pour une fonction f quelconque on définit l'opérateur

$$A_\alpha^f := \int e^{ix^\mu P_\mu}\, A_\alpha\, e^{-ix^\mu P_\mu}\, f(x^\mu)\, d^4x^\mu$$

On pose ensuite la transformée de Fourrier de f :

$$\tilde{f}(k_\mu) := \int e^{ik_\mu x^\mu} f(x^\mu) d^4x^\mu$$

Et alors l'action de A_α^f, qui est aussi un opérateur de symétrie, s'exprime

$$\begin{aligned}
A_\alpha^f \left|p,n\right\rangle &= \int e^{ix^\mu p'_\mu} \left(\int \sum_{n'} \left(\mathcal{A}_\alpha(p',p)\right)_{n'n} \left|p',n'\right\rangle d^4p' \right) e^{-ix^\mu p_\mu} f(x^\mu) d^4x^\mu \\
&= \int \sum_{n'} \left(\int e^{ix^\mu p'_\mu} e^{-ix^\mu p_\mu} f(x^\mu) d^4x^\mu \right) \left(\mathcal{A}_\alpha(p',p)\right)_{n'n} \left|p',n'\right\rangle d^4p' \\
&= \int \sum_{n'} \tilde{f}(p'-p) \left(\mathcal{A}_\alpha(p',p)\right)_{n'n} \left|p',n'\right\rangle d^4p'
\end{aligned}$$

Supposons alors par l'absurde qu'il existe deux quadri-vecteurs impulsion dans la même couche de masse p et $p+\Delta$ avec $\Delta \neq 0$ tels que $\mathcal{A}(p+\Delta,p) \neq 0$.
On prend ensuite des quadri-vecteurs quelconques q, p' et q' tels que $p+q = p'+q'$. En général aucun des trois quadri-vecteurs $q+\Delta$, $p'+\Delta$ et $q'+\Delta$ ne sera sur ma même couche de masse que p.
On choisit alors $\tilde{f}$ à support dans une région suffisamment petite autour de Δ. Dans ce cas $\tilde{f}(k-p+\Delta)$ est nul sauf pour k assez proche de p. Donc A_α^f annihile tout état des particules de quadri-vecteur impulsion q, p' et q' mais pas ceux de p.
Cette asymétrie interdit toute diffusion d'un couple de particules d'impulsions p et q en des particules d'impulsions p' et q' pour des impulsions q, p' et q' générales. Or ceci devrait être possible car d'après les hypothèses 3 et 4 du théorème de Coleman et Mandula il y a une diffusion élastique à presque toutes les énergies et tous les angles ; d'où la contradiction. $\square$

On pourrait croire que l'intégrale

$$A_\alpha \left|p,n\right\rangle = \int \sum_{n'} \left(\mathcal{A}_\alpha(p',p)\right)_{n'n} \left|p',n'\right\rangle d^4p'$$

est nulle car la fonction dans l'intégrale s'annule presque partout. Mais ce n'est pas toujours le cas car les coefficients $\mathcal{A}_\alpha(p',p)$ peuvent inclure des termes proportionnels au dérivées de $\delta^4(p'-p)$.

La hypothèse 5) du théorème de Coleman et Mandula donne que les coefficients $\mathcal{A}_\alpha(p',p)$ sont des distributions, ce qui implique en particulier qu'ils contiennent chacun un nombre fini, noté D_α, de dérivées de $\delta^4(p'-p)$.

De manière équivalente le générateur de symétrie A_α agit sur un état d'une particule en un polynôme de degré D_α en les dérivées ∂_μ. On suppose toujours que les coefficients de la matrice peuvent dépendre de l'impulsion et du spin.

Définition V.1.1. *On définit un opérateur par répétition du crochet :*

$$B_\alpha{}^{\mu_1 \dots \mu_{D_\alpha}} := [P^{\mu_1}, [P^{\mu_2}, \dots [P^{\mu_{D_\alpha}}, A_\alpha] \dots]]$$

Proposition V.1.2. *Cet opérateur agit sur un état d'une particule par une matrice de la forme*

$$b_\alpha{}^{\mu_1 \dots \mu_{D_\alpha}}(p) = b_\alpha^{\#\mu_1 \dots \mu_{D_\alpha}} + a_\alpha^{\mu\mu_1 \dots \mu_{D_\alpha}} p_\mu Id$$

avec $a_\alpha^{\mu\mu_1\ldots\mu_{D_\alpha}}$ une constante numérique indépendante de l'impulsion, $b_\alpha^{\#\mu_1\ldots\mu_{D_\alpha}}$ une matrice hermitienne de trace nulle indépendante de l'impulsion qui engendre une algèbre de symétrie interne et tels que a et $b^\#$ soient symétriques pour les indices $\mu_1\ldots\mu_{D_\alpha}$.

Démonstration. On considère l'action du commutateur de $B_\alpha^{\mu_1\ldots\mu_{D_\alpha}}$ et de P^μ sur un état de particule d'impulsion p. Les éléments de la matrice correspondants à une impulsion p' sont alors proportionnels à $D_\alpha+1$ facteurs de $p'-p$ fois un polynôme de degré D_α en des dérivées de $\delta^4(p'-p)$ et sont donc nuls.

Donc l'action du commutateur est nulle sur touts les états d'impulsion p'. L'opérateur $B_\alpha^{\mu_1\ldots\mu_{D_\alpha}}$ commute alors avec P^μ et on se ramène à la première partie de la démonstration. On a alors déjà montré que l'action de $B_\alpha^{\mu_1\ldots\mu_{D_\alpha}}$ sur un état d'une particule est bien celle de la proposition. □

Proposition V.1.3. *On obtient alors pour tous les générateurs de symétrie A_α et pour toute impulsion p l'égalité*

$$p_{\mu_1}b_\alpha^{\mu_1\ldots\mu_{D_\alpha}}(p)=0$$

Démonstration. Bien que A_α ne commute pas avec P_μ, son action sur un état d'une particule ne peut pas sortir de la couche de masse. En effet, d'après l'hypothèse 2) du théorème de coleman et Mandula l'opérateur $-P_\mu P^\mu$ n'a qu'un nombre discret de valeurs propres. Or si A_α ne commute pas avec $-P^\mu P_\mu$ son action change la masse. Mais comme on a une algèbre de lie, cette variation doit être continue ce qui est interdit par hypothèse. Donc l'opérateur $-P_\mu P^\mu$ commute avec A_α.

En particulier pour $D\geq 1$ on a l'égalité

$$0=[P^{\mu_1}P_{\mu_1},[P^{\mu_2},\ldots[P^{\mu_{D_\alpha}},A_\alpha]\ldots]]=2P_{\mu_1}B_\alpha^{\mu_1\ldots\mu_{D_\alpha}}$$

En évaluant l'action de ce dernier opérateur sur un état d'impulsion p, on obtient bien le résultat voulu. □

V.2 Cas massif

On s'intéresse maintenant au cas ou la théorie comporte au moins une particule massive.

Théorème V.2.1. *Les seuls générateurs de symétrie qui ne sont pas nuls sont ceux pour*

- *$D_\alpha=0$, et dans ce cas le générateur A_α commute avec P_μ et est donc soit un générateur de symétrie interne, soit une combinaison linéaire des P_μ,*
- *$D_\alpha=1$, et dans ce cas on a*

$$A_\alpha=-\frac{i}{2}a_\alpha^{\mu\nu}J_{\mu\nu}+B_\alpha$$

avec $J_{\mu\nu}$ un générateur des transformations de Lorentz et $B_\alpha:=A_\alpha+\frac{i}{2}a_\alpha^{\mu\nu}J_{\mu\nu}$ un opérateur qui commute avec P_μ.

Démonstration. Dans un premier temps on va montrer que $D_\alpha < 2$. La proposition V.1.3 est vérifiée pour toute impulsion p du genre temps, donc si $D_\alpha \geq 1$ on a

$$p_{\mu_1} b_\alpha^{\#\mu_1 \cdots \mu_{D_\alpha}} + p_{\mu_1} p_\mu a_\alpha^{\mu\mu_1 \cdots \mu_{D_\alpha}} Id = 0$$

Or le premier terme correspond à une matrice de trace nulle et le deuxième à un multiple de l'identité, ils sont donc tous les deux nuls. En appliquant la caractérisation des matrices antisymétriques

$$M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est antisymétrique} \quad \Leftrightarrow \quad \forall X \in \mathbb{R}^n, \quad X^t M X = 0$$

à l'équation

$$p_{\mu_1} p_\mu a_\alpha^{\mu\mu_1 \cdots \mu_{D_\alpha}} Id = \sum_\mu \sum_{\mu_1} p_{\mu_1} p_\mu a_\alpha^{\mu\mu_1 \cdots \mu_{D_\alpha}} Id = P^t \, (a_\alpha^{\mu_2 \cdots \mu_{D_\alpha}} Id) P = 0, \quad \forall P$$

on obtient

$$a_\alpha^{\mu\mu_1 \cdots \mu_{D_\alpha}} Id = -a_\alpha^{\mu_1 \mu \cdots \mu_{D_\alpha}} Id$$

Pour résumer, on a montré que si $D_\alpha \geq 1$ alors

$$b_\alpha^{\#\mu_1 \cdots \mu_{D_\alpha}} = 0 \qquad \text{et} \qquad a_\alpha^{\mu\mu_1 \cdots \mu_{D_\alpha}} = -a_\alpha^{\mu_1 \mu \cdots \mu_{D_\alpha}}$$

Mais si $D_\alpha \geq 2$ alors d'après la symétrie des indices $\mu_1 \ldots \mu_{D_\alpha}$ on a

$$\begin{aligned} a_\alpha^{\mu\mu_1\mu_2 \cdots \mu_{D_\alpha}} &= a_\alpha^{\mu\mu_2\mu_1 \cdots \mu_{D_\alpha}} \\ &= -a_\alpha^{\mu_2\mu\mu_1 \cdots \mu_{D_\alpha}} \\ &= -a_\alpha^{\mu_2\mu_1\mu \cdots \mu_{D_\alpha}} \\ &= a_\alpha^{\mu_1\mu_2\mu \cdots \mu_{D_\alpha}} \\ &= a_\alpha^{\mu_1\mu\mu_2 \cdots \mu_{D_\alpha}} \\ &= -a_\alpha^{\mu\mu_1\mu_2 \cdots \mu_{D_\alpha}} \end{aligned}$$

On a donc $a_\alpha^{\mu\mu_1\mu_2 \cdots \mu_{D_\alpha}} = -a_\alpha^{\mu\mu_1\mu_2 \cdots \mu_{D_\alpha}} = 0$, d'où pour toute impulsion p :

$$b_\alpha^{\mu_1 \cdots \mu_{D_\alpha}}(p) = b_\alpha^{\#\mu_1 \cdots \mu_{D_\alpha}} + a_\alpha^{\mu\mu_1 \cdots \mu_{D_\alpha}} p_\mu \, Id = 0 + 0 \, Id = 0$$

Donc si $D_\alpha \geq 2$ on a

$$B_\alpha^{\mu_1 \cdots \mu_{D_\alpha}} = 0$$

Les seuls opérateurs à considérer sont alors :
— $B_\alpha^{(0)} = A_\alpha$ si $D_\alpha = 0$
— et $B_\alpha^\mu = [P^\mu, A_\alpha]$ si $D_\alpha = 1$
car pour $D_\alpha = 2$, on a montré que $[P^{\mu_2}, [P^{\mu_1}, A_\alpha]] = 0$.

Dans le premier cas, cela signifie que A_α commute avec P^μ d'où le résultat. Dans le deuxième cas on a montré que B_α^μ commute avec P^μ. Donc d'après la première partie de la démonstration, et comme $b_\alpha^{\#\mu}$ est nul, on a

$$[P^\mu, A_\alpha] = B_\alpha^\mu = b_\alpha^{\#\mu} + a_\alpha^{\nu\mu} P_\nu = a_\alpha^{\nu\mu} P_\nu$$

avec des coefficients $a_\alpha^{\mu\nu}$ antisymétriques en μ et ν. Ceci implique bien que $A_\alpha = -\frac{i}{2} a_\alpha^{\mu\nu} J_{\mu\nu} + B_\alpha$:

En effet, on commence par calculer

$$\begin{aligned}\left[P^\rho, +\frac{i}{2}a_\alpha^{\mu\nu}J_{\mu\nu}\right] &= \frac{i}{2}a_\alpha^{\mu\nu}\big(-i\eta^\rho{}_\mu P_\nu + i\eta^\rho{}_\nu P_\mu\big)\\ &= \frac{1}{2}a_\alpha^{\mu\nu}\eta^\rho{}_\mu P_\nu - \frac{1}{2}a_\alpha^{\mu\nu}\eta^\rho{}_\nu P_\mu\\ &= -\frac{1}{2}a_\alpha^{\nu\mu}\eta^\rho{}_\mu P_\nu - \frac{1}{2}a_\alpha^{\mu\nu}\eta^\rho{}_\nu P_\mu\\ &= -a_\alpha^{\nu\rho}P_\nu\end{aligned}$$

On voit donc que si on note B_α l'opérateur $A_\alpha + \frac{i}{2}a_\alpha^{\mu\nu}J_{\mu\nu}$ on obtient

$$[P^\mu, B_\alpha] = 0$$

Ce qui achève de démontrer le théorème. $\square$

Dans le deuxième cas on remarque que comme A_α et $J_{\mu\nu}$ sont des générateurs de symétrie alors B_α en est un aussi. Donc d'après la première partie de la démonstration il est soit un générateur de symétrie interne, soit une combinaisons linéaire des P_μ.

Résumé. On conclut que dans tous les cas (du théorème) un générateur de symétrie quelconque A_α est toujours aux maximum une combinaison des $J_{\mu\nu}$, des P_μ et de générateurs de symétrie interne.

On a donc bien montré que dans le cas massif les générateurs de symétrie $J_{\mu\nu}$, P_μ et les générateurs de symétrie interne engendrent l'algèbre de Lie de symétrie la plus générale.

V.3 Cas non massif

On s'intéresse maintenant au cas ou la théorie étudiée ne comporte que des particules sans masses. Dans ce cas la démonstration faite pour le cas massif ne marche pas et l'on obtient plus

$$a_\alpha^{\mu\mu_1\cdots\mu_{D_\alpha}} = -a_\alpha^{\mu_1\mu\cdots\mu_{D_\alpha}}$$

mais on obtient à la place pour une constante $C^{\mu_2\cdots\mu_{D_\alpha}}$,

$$a_\alpha^{\mu\mu_1\cdots\mu_{D_\alpha}} + a_\alpha^{\mu_1\mu\cdots\mu_{D_\alpha}} = C^{\mu_2\cdots\mu_{D_\alpha}}\eta^{\mu\mu_1}$$

Théorème V.3.1. *Dans le cas non massif, l'algèbre de Lie la plus générale est l'algèbre conforme $\mathfrak{so}(2,4)$. Elle est générée par l'algèbre de Poincaré (engendrée par les opérateurs $J^{\mu\nu}$ et P^μ) et par des opérateurs K^μ et D à définir.*

On a alors les relations de commutation suivantes :

$$[P^\mu, D] = iP^\mu$$

$$[K^\mu, D] = -iK^\mu$$

$$[P^\mu, K^\mu] = 2i\eta^{\mu\nu}D + 2iJ^{\mu\nu}$$

$$
\begin{gathered}
[J^{\rho\sigma}, K^\mu] = i\eta^{\mu\rho} K^\sigma - i\eta^{\mu\sigma} K^\rho \\
[K^\mu, K^\nu] = 0 \\
[J^{\rho\sigma}, D] = 0 \\
i\left[J^{\alpha\beta}, J^{\gamma\delta}\right] = \eta^{\beta\gamma} J^{\alpha\delta} - \eta^{\alpha\gamma} J^{\beta\delta} + \eta^{\delta\beta} J^{\gamma\alpha} - \eta^{\delta\alpha} J^{\gamma\beta} \\
i[J^{\mu\nu}, P^\rho] = \eta^{\nu\rho} P^\mu - \eta^{\mu\rho} P^\nu, \\
[P^\mu, P^\nu] = 0.
\end{gathered}
$$

Démonstration. La démonstration est faite dans le livre [2] de Weinberg □

Chapitre 3

Théorème de Haag, Sohnius et Lopuszanski

I Superalgèbre de Poincaré

Définition I.0.1. *Une superalgèbre A est une somme directe d'espaces vectoriels $A = A_0 \oplus A_1$ munie d'une application bilinéaire $[,\} : A \times A \to A$ telle que $\forall i, j \in \mathrm{Z}/2\mathrm{Z}$ on ait $[A_i, A_j\} \subset A_{i+j}$*

Définition I.0.2. *Une superalgèbre de Lie A est une superalgèbre où l'on défini une opération $|\cdot| : A_0 \cup A_1 \to \{0,1\}$ par $|x| = \begin{cases} 0 & si \quad x \in A_0 \\ 1 & si \quad x \in A_1 \end{cases}$ telle que :*

— *super anti-symétrie : $\forall x, y \in A_0 \cup A_1$ on ait*

$$[x, y\} = -(-1)^{|x|\,|y|}[y, x\}$$

— *super-identité de Jacobi : $\forall x, y, z \in A_0 \cup A_1$ on ait*

$$(-1)^{|x|\,|z|}\,[x, [y, z\}\,\} + (-1)^{|y|\,|x|}\,[y, [z, x\}\,\} + (-1)^{|z|\,|y|}\,[z, [x, y\}\,\} >= 0$$

Remarque. — La restriction de $[,\}$ à A_0 défini clairement une algèbre de Lie car $[A_0, A_0\} \subset A_0$ et la super-relation de Jacobi devient une identité de Jacobi classique. On note alors $[A_0, A_0\} = [A_0, A_0] \subset A_0$.

— Par ailleurs l'inclusion $[A_0, A_1\} \subset A_1$ peut être définie de manière équivalente comme une action de A_0 sur A_1 donnée par $[,\}$. On note alors $[A_0, A_1\} = [A_0, A_1] \subset A_1$ qui est un commutateur.

— Ceci se récrit également : A_1 est une représentation de A_0 telle que pour tous les éléments de base B_i de A_0 et F_a de A_1, on ait

$$[B_i, F_a] = R_{ia}^{\ \ b} B_i$$

Où $R_{ia}^{\ \ b}$ est la matrice correspondant à B_i dans cette représentation.

— On note $[A_1, A_1\} = \{A_1, A_1\} \subset A_0$ l'application sur A_1.

Définition I.0.3. *La super-algèbre de Poincaré est définie par*

$$A_0 = \mathfrak{iso}(1,3) = \{J_{\mu\nu}, P_\rho, \mu, \nu, \rho = 0, \ldots, 3\}$$

ainsi que

$$A_1 = \{Q_\alpha, \alpha = 1,2\} \oplus \{\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \alpha = 1,2\},$$

avec $J_{\mu\nu}$ les éléments de base de l'algèbre de Lorentz, P_ρ les éléments de base du groupe des translations et Q_α les spineurs gaucher avec $\bar{Q}^{\dot{\alpha}}$ le spineur droitier de Majorana qui leur correspond.

Il ne reste plus qu'à définir l'application $[,\}$ sur ces algèbres. Sur A_0 on utilise les crochets de Lie de l'algèbre de Poincaré et sur A_1 on va définir les relations à une constante près, et on calculera ensuite cette constante pour que l'on ait bien une super-algèbre de Lie. Les relations de la super-algèbre de Poincaré sont :

$$\begin{aligned}
[J_{\alpha\beta}, J_{\gamma\delta}] &= \eta_{\beta\gamma}J_{\alpha\delta} - \eta_{\alpha\gamma}J_{\beta\delta} + \eta_{\delta\beta}J_{\gamma\alpha} - \eta_{\delta\alpha}J_{\gamma\beta},\\
[J_{\mu\nu}, P_\rho] &= \eta_{\nu\rho}P_\mu - \eta_{\mu\rho}P_\nu,\\
[P_\mu, P_\nu] &= 0.\\
\\
[J_{\mu\nu}, Q_\alpha] &= \sigma_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}Q_\beta,\\
\left[J_{\mu\nu}, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}\right] &= \bar{\sigma}_{\mu\nu}{}^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\bar{Q}^{\dot{\beta}},\\
[P_\mu, Q_\alpha] &= a\sigma_{\mu\alpha\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}},\\
\left[P_\mu, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}\right] &= b\bar{\sigma}_\mu{}^{\dot{\alpha}\alpha}Q_\alpha.\\
\\
\{Q_\alpha, Q_\beta\} &= c\sigma^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}J_{\mu\nu},\\
\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} &= d\bar{\sigma}^{\mu\nu}{}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}J_{\mu\nu},\\
\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} &= -ie\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}P_\mu.
\end{aligned}$$

Proposition I.0.1. *Si on calcule les constantes a, b, c, d et e, on obtient ces relations :*

$$\begin{aligned}
[J_{\alpha\beta}, J_{\gamma\delta}] &= \eta_{\beta\gamma}J_{\alpha\delta} - \eta_{\alpha\gamma}J_{\beta\delta} + \eta_{\delta\beta}J_{\gamma\alpha} - \eta_{\delta\alpha}J_{\gamma\beta},\\
[J_{\mu\nu}, P_\rho] &= \eta_{\nu\rho}P_\mu - \eta_{\mu\rho}P_\nu,\\
[P_\mu, P_\nu] &= 0.\\
\\
[J_{\mu\nu}, Q_\alpha] &= \sigma_{\mu\nu\alpha}{}^{\beta}Q_\beta,\\
\left[J_{\mu\nu}, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}\right] &= \bar{\sigma}_{\mu\nu}{}^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\bar{Q}^{\dot{\beta}},\\
[P_\mu, Q_\alpha] &= 0,\\
\left[P_\mu, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}\right] &= 0.\\
\\
\{Q_\alpha, Q_\beta\} &= 0,\\
\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} &= 0,\\
\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} &= -2i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}P_\mu.
\end{aligned}$$

Démonstration. Montrons par exemple la $6^{\text{ième}}$ équation, car toutes les démonstrations se ressemblent. D'après l'identité de super-Jacobi, on a

$$\begin{aligned}
0 &= [P_\nu, [P_\mu, Q_\alpha] - [P_\mu, [P_\nu, Q_\alpha] + [Q_\alpha, [P_\nu, P_\mu]\\
&= a\left(\sigma_{\mu\alpha\dot{\alpha}}[P_\nu, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] - \sigma_{\nu\alpha\dot{\alpha}}[P_\mu, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}]\right)\\
&= ab\left(\sigma_{\mu\alpha\dot{\alpha}}\bar{\sigma}_\nu{}^{\dot{\alpha}\beta} - \sigma_{\nu\alpha\dot{\alpha}}\bar{\sigma}_\mu{}^{\dot{\alpha}beta}\right)Q_\beta
\end{aligned}$$

Comme la somme est clairement non nulle, on en conclut que $a = 0$ ou $b = 0$. Et l'autre s'obtient ensuite par conjugaison. De même on montre aussi la $8^{\text{ième}}$

équation :

$$\begin{aligned} 0 &= [P_\mu, \{Q_\alpha, Q_\beta\}] - \{Q_\beta, [P_\mu, Q_\alpha]\} + \{Q_\alpha, [Q_\beta, P_\mu]\} \\ &= a\, \sigma^{\rho\nu}{}_{\alpha\beta}[P_\mu, J_{\rho\nu}] \end{aligned}$$

Or $[P_\mu, J_{\rho\nu}]$ est non nul, on a donc forcément $a = 0$.
Pour la dernière équation, e n'a pas besoin d'être nul pour que l'identité de super-Jacobi soit vérifiée, on pose par convention $e = 2$. $\square$

II Énoncé du théorème

Nous allons maintenant énoncer et démontrer le théorème de Haag, Sohnius et Lopuszanski valable dans les conditions générales de la théorie quantique des champs.

Théorème II.0.1. ***Théorème de Haag, Sohnius et Lopuszanski.***
On suppose que :

— *La structure mathématique sous-jacente est une super-algèbre de Lie réelle $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$. On a alors les relations*

$$\{Q, Q'\} = X, \quad [X, X'] = X'', \quad [Q, X] = Q''$$

Pour X, X' et X'' dans la partie paire $\mathcal{A}_0$ et Q, Q et Q'' dans la partie impaire $\mathcal{A}_1$. De plus, les éléments de $\mathcal{A}_0$ sont de spin entier et ceux de $\mathcal{A}_1$ sont de spin $1/2$ plus un entier,

— *Les opérateurs Q agissent sur un espace de Hilbert muni d'une métrique définie positive,*

— *L'opérateur Q et son conjugué hermitien $\bar{Q}$ appartiennent à l'algèbre $\mathcal{A}_1$*

Alors les seules super-algèbres de Lie composées de générateurs de symétrie possibles sont celle de Poincaré et ses extensions qui contiennent des super-charges.

III Démonstration du théorème

On commence par remarquer que les éléments X de la partie paire constituent en fait une algèbre de Lie de générateurs de symétrie. D'après le théorème de Coleman et Mandula on sait donc que ce sont soit des éléments de l'algèbre de Poincaré, soit des générateurs de symétrie interne qui appartiennent à une algèbre de Lie $\mathcal{B}$ compacte et invariante par celle de Lorentz, et $\mathcal{B}$ est une somme directe d'une algèbre de Lie semisimple et d'une algèbre abélienne (définitions en annexe).

On a donc déjà déterminé tous les générateurs X possibles, et il reste à étudier les générateurs Q. Ses derniers peuvent être vu comme éléments d'une représentation de l'algèbre de Lie $\mathcal{A}_0$. Ils peuvent alors être décomposés comme une somme de représentations irréductibles de l'algèbre de Lorentz (qui est contenue dans A_0) :

$$Q = \sum Q_{\underline{\alpha_1 \ldots \alpha_a}, \underline{\dot{\alpha}_1 \ldots \dot{\alpha}_b}}$$

où les termes de la sommes sont symétriques par rapport aux indices soulignés $\alpha_1 \ldots \alpha_a$ et $\dot{\alpha}_1 \ldots \dot{\alpha}_b$ qui valent 1 ou 2. Ce sont des éléments de la représentation spinorielle $\frac{1}{2}(a+b)$ de l'algèbre de Lorentz car $Q_{\underline{\alpha_1\ldots\alpha_a}}$ appartient à la représentation $\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2},0\right)=\left(a\times\frac{1}{2},0\right)$ et $Q_{\underline{\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_b}}$ appartient à la représentation $\left(0,\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}\right)=\left(0,b\times\frac{1}{2}\right)$.

III.1 Trouver les relations de la superalgèbre

Proposition III.1.1. *On a forcément que $a+b=1$ et donc la partie impaire de la superalgèbre est composée uniquement des spineurs ${Q_\alpha}^L$ et $\bar Q_{\dot\alpha M}$ de spin $\frac{1}{2}$, pour L et M variants dans l'ensemble $\{1,\ldots\mathcal{N}\}$. On verra que l'entier $\mathcal{N}$ correspond au nombre de charges centrales de la théorie.*

Démonstration. Les éléments de $\mathcal{A}_1$ sont de spin $1/2$ plus un entier, donc $a+b$ doit être impair. On va maintenant montrer qu'il doit être égal à 1.

On considère pour commencer

$$Q_{\underset{a}{\underline{1\ldots1}},\underset{b}{\underline{\dot1\ldots\dot1}}}\bar Q_{\underset{a}{\underline{\dot1\ldots\dot1}},\underset{b}{\underline{1\ldots1}}}$$

Comme chacun des deux facteurs est de spin $\frac{1}{2}(a+b)$ le produit doit appartenir à la représentation spinorielle de spin $a+b$. On en déduis que l'anticommutateur

$$\{Q_{\underset{a}{\underline{1\ldots1}},\underset{b}{\underline{\dot1\ldots\dot1}}},\bar Q_{\underset{a}{\underline{\dot1\ldots\dot1}},\underset{b}{\underline{1\ldots1}}}\}$$

est un éléments de $\mathcal{A}_0$ de spin $a+b$. Or les seuls éléments de $\mathcal{A}_0$ qui vérifient cette condition sont 0 et les combinaisons de P_μ. Mais ces dernières sont de spin 1 donc si $a+b>1$ alors

$$\{Q_{\underset{a}{\underline{1\ldots1}},\underset{b}{\underline{\dot1\ldots\dot1}}},\bar Q_{\underset{a}{\underline{\dot1\ldots\dot1}},\underset{b}{\underline{1\ldots1}}}\}=0$$

Dans ce cas les propriétés de l'anticommutateur permettent de déduire

$$Q_{\underset{a}{\underline{1\ldots1}},\underset{b}{\underline{\dot1\ldots\dot1}}}=0$$

Comme les $Q_{\underline{\alpha_1\ldots\alpha_a},\underline{\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_b}}$ appartiennent à une représentation irréductible de l'algèbre de Lorentz, cette dernière permet de passer d'un élément Q à un autre à partir de $Q_{\underset{a}{\underline{1\ldots1}},\underset{b}{\underline{\dot1\ldots\dot1}}}$. On en conclut qu'ils sont tous nuls si $a+b>1$; d'où le résultat. □

Proposition III.1.2. *Pour L et M dans $\{1,\ldots\mathcal{N}\}$, on a les relations suivantes* *pour la superalgèbre :*

$$\begin{aligned}
\{Q_\alpha{}^L, \bar{Q}_{\dot\alpha M}\} &= 2\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^\mu P_\mu \delta^L{}_M \\
[P_\mu, Q_\alpha{}^L] &= [P_\mu, \overline{Q}_{\dot\beta M}] = 0 \\
\\
\{Q_\alpha{}^L, Q_\beta{}^M\} &= \varepsilon_{\alpha\beta} a^{l,LM} B_l = \varepsilon_{\alpha\beta} X^{LM} \\
\{\bar{Q}_{\dot\alpha L}, \bar{Q}_{\dot\beta M}\} &= \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} a^*{}_{l,LM} B^l = \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} X_{LM} \\
\\
[Q_\alpha{}^L, B_l] &= S_l{}^L{}_M Q_\alpha{}^M \in \mathcal{A}_1 \\
[B^l, \bar{Q}_{\dot\alpha L}] &= S^{*l}{}_L{}^M \bar{Q}_{\dot\alpha M} \in \mathcal{A}_1 \\
\\
[B_l, B_m] &= i c^k_{lm} B_k \in \mathcal{A}_0
\end{aligned}$$

avec $a^{l,LM}$ et $S_l{}^L{}_M$ des coefficients réels et B_l un opérateur de $\mathcal{B}$ qui commute donc avec P_μ.

Démonstration. On a donc montré que $\{Q_\alpha{}^L, \bar{Q}_{\dot\alpha M}\}$ est une combinaison des P_μ avec C^L_M une matrice hermitienne telle que

$$\{Q_\alpha{}^L, \bar{Q}_{\dot\alpha M}\} = C^L{}_M \sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha} P_\mu.$$

On peut donc la diagonaliser, mais comme $\{Q_1{}^L, \bar{Q}_{\dot{1} M}\}$ est défini positif on en conclut que les valeurs propres de C^L_M sont positives. On choisit alors une base de la partie impair de la super algèbre telle que

$$\{Q_\alpha{}^L, \bar{Q}_{\dot\alpha M}\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha} P_\mu \delta^L{}_M$$

On regarde maintenant le commutateur $\{Q_\alpha{}^L, Q_\beta{}^M\}$. On a montré qu'il était de spin 1 et il est symétrique par rapport aux couples (α, L) et (β, M). Donc soit il est antisymétrique en α, β et en L, M et on le note $\varepsilon_{\alpha\beta} X^{LM}$. Soit au contraire il est symétrique dans les deux paires d'indices et on le note $J_{\alpha\beta} Y^{LM}$ car $J_{\alpha\beta} := (L_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta}$ est le seul opérateur de l'algèbre de Lorentz symétrique qui convient. On a donc

$$\{Q_\alpha{}^L, Q_\beta{}^M\} = \varepsilon_{\alpha\beta} X^{LM} + J_{\alpha\beta} Y^{LM}$$

Cependant $Q_\alpha{}^L$ commute avec P_μ donc l'anticommutateur aussi, mais pas $J_{\mu\nu}$. on en déduis que Y est nul et on écrit

$$\{Q_\alpha{}^L, Q_\beta{}^M\} = \varepsilon_{\alpha\beta} a^{l,LM} B_l$$

avec B_l une matrice hermitienne de la partie paire de la superalgèbre qui commute avec P_μ et $a^{l,LM}$ des coefficients antisymétriques en l et M. On note que les matrices B_l engendrent l'algèbre de Lie $\mathcal{B}$. En conjuguant on obtient

$$\{\bar{Q}_{\dot\alpha L}, \bar{Q}_{\dot\beta M}\} = \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} a^*{}_{l,LM} B^l = \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} X_{LM}$$

Pour conclure on note

$$[Q_\alpha{}^L, B_l] = S_l{}^L{}_M Q_\alpha{}^M \in \mathcal{A}_1$$

Ainsi que

$$[B^l, \bar{Q}_{\dot{\alpha}L}] = S^{*l}{}_L{}^M \bar{Q}_{\dot{\alpha}M} \in \mathcal{A}_1$$

Et

$$[B_l, B_m] = ic^k_{lm} B_k \in \mathcal{A}_0$$

□

III.2 Déterminer les constantes

Proposition III.2.1. *On a l'égalité $S^{*l}{}_M{}^L = S_l{}^L{}_M$, donc la matrice $S_l{}^L{}_M$ est hermitienne.*

Démonstration. On utilise la superidentité de Jacobi

$$\left[B_l, \{Q_\alpha{}^L, \bar{Q}_{\dot{\beta}M}\}\right] + \left\{Q_\alpha{}^L, [\bar{Q}_{\dot{\beta}M}, B_l]\right\} - \left\{\bar{Q}_{\dot{\beta}M}, [B_l, Q_\alpha{}^L]\right\} = 0$$

Comme B_l commute avec P_μ on obtient en remplaçant :

$$-S^{*l}{}_M{}^K \{Q_\alpha{}^L, \bar{Q}_{\dot{\beta}K}\} + S_l{}^L{}_K \{\bar{Q}_{\dot{\beta}M}, Q_\alpha{}^K\} = 0$$

Ce qui donne

$$2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^\mu P_\mu \left[S^{*l}{}_M{}^L - S_l{}^L{}_M\right] = 0$$

Ceci implique bien que

$$S^{*l}{}_M{}^L = S_l{}^L{}_M$$

□

Proposition III.2.2. *Pour L et M dans $\{1, \dots \mathcal{N}\}$, les générateurs X^{LM} définis par $X^{LM} = a^{l,LM} B_l$ engendrent une sous-algèbre invariante de $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_0$ qui commute avec l'opérateur impulsion P_μ. De plus cette algèbre commute avec tous les B_l (qui engendre l'algèbre $\mathcal{B}$). Pour cette raison, on appelle charges centrales les opérateurs X^{LM}.*

Démonstration. Pour commencer on observe la superidentité de Jacobi

$$[B_l, \{Q_\alpha{}^L, Q_\beta{}^M\}] + \{Q_\alpha{}^L, [Q_\beta{}^M, B_l]\} - \{Q_\beta{}^M, [B_l, Q_\alpha{}^L]\} = 0$$

Comme $\varepsilon_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\beta\alpha}$ on obtient

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\left([B_l, X^{LM}] + S_l{}^M{}_K X^{LK} - S_l{}^L{}_K X^{MK}\right) = 0$$

Donc le commutateur $[B_l, X^{LM}]$ est une combinaison des opérateurs X^{LM}. Mais comme les X^{LM} sont eux-mêmes des combinaisons linéaires des B_l, on en conclut qu'ils engendrent une sous-algèbre stable. Or par définition ils appartiennent à $\mathcal{B}$ et commutent avec P_μ ce qui donne la première affirmation.

On utilise ensuite la superidentité de Jacobi

$$[Q_\alpha{}^L, \{Q_\beta{}^M, \bar{Q}_{\dot{\gamma}K}\}] + [Q_\beta{}^M, \{\bar{Q}_{\dot{\gamma}K}, Q_\alpha{}^L\}] + [\bar{Q}_{\dot{\gamma}K}, \{Q_\alpha{}^L, Q_\beta{}^M\}] = 0$$

Comme $Q_\alpha{}^L$ commute avec P_μ on en déduis que

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\left[\bar{Q}_{\dot{\gamma}K}, X^{LM}\right] = 0$$

Avec la superidentité de Jacobi :

$$\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}K}, [Q_\beta{}^N, X^{LM}]\} + \left[X^{LM}, \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}K}, Q_\beta{}^N\}\right] + \{Q_\beta{}^N, [X^{LM}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}K}]\} = 0$$

En se rappelant que $\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}K}, Q_\beta{}^N\} = -2\sigma^\mu_{\beta\dot{\alpha}} P_\mu \delta^N_K$ commute avec X^{LM} on en déduis que pour tous générateurs $\bar{Q}$ on a

$$\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}K}, [Q_\beta{}^N, X^{LM}]\}$$

Et donc X^{LM} commute avec $Q_\beta{}^N$:

$$\left[Q_\beta{}^N, X^{LM}\right] = 0$$

Par ailleurs ε étant antisymétrique on a l'égalité

$$X^{KN} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\{Q_\alpha{}^K, Q_\beta{}^N\}$$

Et on peut l'utiliser pour calculer

$$\left[X^{KN}, X^{LM}\right] = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\left[\{Q_\alpha{}^K, Q_\beta{}^N\}, X^{LM}\right] = 0$$

Alors l'algèbre engendrée par les X^{LM} est un idéal de $\mathcal{B}$. De plus, on vient de montrer que cet idéal est résoluble (car $L^{(1)} = 0$) donc par définition de semi-simple, il est inclus dans la partie abélienne de $\mathcal{B}$. Il commute alors évidemment avec la partie abélienne et avec la partie semisimple par définition de la somme d'algèbres de Lie. Donc l'algèbre engendrée par les X^{LM} commute avec $\mathcal{B}$, et en particulier on a

$$\left[X^{LM}, B_l\right] = 0$$

Pour cette raison les générateurs X^{LM} sont appelés charges centrales. □

Proposition III.2.3. *On a l'égalité suivante pour les coefficients :*

$$S_l{}^M{}_K a^{k,KL} = -a^{k,MK} S^{*l}{}_K{}^L$$

On remarque alors que les matrices a^k permettent de passer de S_l à sa conjuguée $-S_l^*$. Il existe donc des charges centrales seulement si ceci est possible.

Démonstration. On a montré plus haut que

$$[B_l, X^{LM}] = -S_l{}^M{}_K X^{LK} + S_l{}^L{}_K X^{MK}$$

Ce qui donne donc

$$S_l{}^M{}_K X^{LK} - S_l{}^L{}_K X^{MK} = \left(S_l{}^M{}_K a^{k,LK} - S_l{}^L{}_K a^{k,MK}\right) B_l = 0$$

On a montré que $S_l{}^M{}_K$ est hermitienne donc on on obtient

$$S_l{}^M{}_K a^{k,LK} = S^{*l}{}_K{}^L a^{k,MK}$$

Ce qui peut se réécrire comme dans la proposition car les coefficients $a^{k,MK}$ sont antisymétriques. □

III.3 Résumé

On peut vérifier toutes les autres superidentités de Jacobi mais elles ne nous apprennent rien de plus. On a donc trouvé la superalgèbre de lie de symétries de la matrice S la plus générale dans le cadre de la théorie quantique des champs. Pour L et M dans $\{1,\ldots\mathcal{N}\}$, elle peut contenir des charges centrales de la forme $X^{LM} = a^{l,LM}B_l$ avec des matrices a^l qui conjuguent S_l en $-S_l^*$ par l'équation ${S_l}^M_K a^{k,KL} = -a^{k,MK}{S^*}^{l\,L}_{K}$. On rappelle que ${S_l}^L{}_M$ est hermitienne et que $\varepsilon_{\alpha\beta}$ est antisymétrique. Les relations de cette superalgèbre sont alors celles de la super algèbre de Poincaré ainsi que :

$$
\begin{array}{rcl}
[P_\mu, P_\nu] &=& [P_\mu, B_l] = 0 \\
\left[P_\mu, Q_\alpha{}^L\right] &=& [P_\mu, \bar{Q}_{\dot\beta M}] = 0 \\
\left[P_\mu, X^{LM}\right] &=& 0 \\
\\
\{Q_\alpha{}^L, \bar{Q}_{\dot\alpha M}\} &=& 2\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^\mu P_\mu \delta^L{}_M \\
X^{LM} &=& a^{l,LM}B_l \\
\{Q_\alpha{}^L, Q_\beta{}^M\} &=& \varepsilon_{\alpha\beta}X^{LM} \\
\{\bar{Q}_{\dot\alpha L}, \bar{Q}_{\dot\beta M}\} &=& \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}X_{LM} \\
\\
\left[X^{LM}, \bar{Q}_{\dot\alpha K}\right] &=& \left[X^{LM}, Q_\alpha^K\right] = 0 \\
\left[X^{LM}, X^{KN}\right] &=& \left[X^{LM}, B_l\right] = 0 \\
\\
[B_l, B_m] &=& ic^k_{lm}B_k \\
\left[Q_\alpha{}^L, B_l\right] &=& {S_l}^L{}_M Q_\alpha{}^M \\
\left[B^l, \bar{Q}_{\dot\alpha L}\right] &=& {S^*}^{l}{}_L{}^M \bar{Q}_{\dot\alpha M}
\end{array}
$$

Remarque. En étudiant les représentations de la supersymétrie on peut montrer que $\mathcal{N} \leq 8$ et que donc le nombre de charges centrales de la théorie est limité.

Conclusion

Durant ce stage j'ai donc montré que l'algèbre de Lie la plus générale possible dans le cadre de la relativité restreinte est celle de Poincaré à laquelle on ajoute des symétries internes.
De manière semblable on a montré que la superalgèbre la plus générale possible dans le cadre de la supersymétrie est une extension de la superalgèbre de Poincaré à laquelle on rajoute des charges centrales. On peut montrer que le nombres de telles charges est limité par l'inéquation $\mathcal{N} \leq 8$.

J'ai finalement trouvé ce stage enrichissant même si j'ai eu pas mal de problèmes avec les notations et les définitions trop peu rigoureuses pour moi. J'ai en effet passé beaucoup de temps à essayer de comprendre quel type d'objet on étudiait, à quels espaces ils appartenaient et comment on passait d'un espace à un autre. J'ai tout de même appris plusieurs nouveaux concepts sur la physique théorique qui, une fois compris, sont très intéressants.

Chapitre 4

Annexe : Groupe et algèbres de Lie courantes

Soient $\mathbb{K}$ un corps et n un entier, alors l'ensemble des matrices de tailles n inversibles à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un groupe pour la multiplication noté $GL_n(\mathbb{K})$. Si n, p, q sont des entiers non nuls on note I_n la matrice identité de taille $n \times n$, et

$$I_{(p,q)} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}.$$

On définis alors les sous-groupes classiques de $GL_n(\mathbb{K})$:

— $SL_n(\mathbb{K}) = \{M \in GL_n(\mathbb{K}) \mid \det(M) = 1\}$ est appelé le groupe spécial linéaire.

— $O_n = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid M^t M = I_n\}$ est appelé le groupe orthogonal.

— $SO_n = O_n \cap SL_n(\mathbb{R})$ le groupe spécial orthogonal ou groupe des rotations.

— $O(p,q) = \{M \in GL_{p+q}(\mathbb{R}) \mid M^t I_{(p,q)} M = I_{(p,q)}\}$

— $SO(p,q) = O(p,q) \cap SL_{p+q}(\mathbb{R})$

— $U_n = \{N \in GL_n(\mathbb{C}) : N^\dagger N = I_n\}$ est appelé le groupe unitaire.

— $SU_n = U_n \cap SL_n(\mathbb{C})$ est appelé le groupe spécial unitaire.

L'espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ muni du crochet $[X,Y] = XY - YX$ est une algèbre de Lie notée $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$.

On défini alors les sous-algèbres de Lie classiques de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$:

— $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\}$ les matrices de trace nulle.

— $\mathfrak{o}_n = \mathfrak{so}_n = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid A^t = -A\}$ les matrices antisymétriques.

— $\mathfrak{o}_{p,q} = \mathfrak{so}_{p,q} = \{A \in \mathfrak{gl}_{p+q}(\mathbb{R}) \mid A^t I_{p,q} + I_{p,q} A = 0\}$.

— $\mathfrak{u}_n = \{B \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid B^\dagger = -B\}$ les matrices antihermitiennes.

— $\mathfrak{su}_n = \{B \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid B^\dagger = -B, \mathrm{tr}(B) = 0\}$

Définition .0.1. *Algèbre de Lie semi-simple :*

- *Posons $[L, L] := \{$combinaisons linéaires de $[x, y]$ avec $x, y \in L\}$. C'est un idéal de L, et donc a fortiori une sous-algèbre de Lie de L. On l'appelle l'algèbre de Lie dérivée de L.*
- *L'algèbre de Lie L est dite abélienne si $[L, L] = 0$. Donc si tous ses éléments commutent.*
- *La série dérivée de L est définie par récurrence : $L^{(0)} = L$, $L^{(1)} = [L, L]$ et en général $L^{(i)} = [L^{(i-1)}, L^{(i-1)}]$ pour $i \in \mathbb{N}^*$.*
- *L'algèbre de Lie L est dite résoluble si $\exists\, i \in \mathbb{N}$ tel que $L^{(i)} = 0$.*
- *Si L est une algèbre de Lie, on dit qu'elle est semi-simple si elle ne contient pas d'idéal résoluble autre que 0.*

Définition .0.2. *Une algèbre de Lie est compacte si son groupe de Lie correspondant est compact.*