Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
9e année, 1967/68, n° 20

22 avril 1968

PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES DES POLYNÔMES D'EULER

par Dominique FOATA

1. Introduction.

Il y a bien des façons de définir les polynômes d'Euler. La plus rapide semble être de considérer l'expression suivante, fonction de deux indéterminées commutatives u et t

$$F(u , t) = (1 - t)/(\exp(u(t - 1)) - t) \quad , \tag{1.1}$$

de noter qu'elle peut encore s'écrire

$$F(u , t) = (1 - \sum_{n>0} (t - 1)^{n-1} u^n / n!)^{-1} \tag{1.2}$$

d'où en développant suivant les puissances de u

$$F(u , t) = \sum_{n\geq 0} \overline{A}_n(t) u^n / n! \quad , \tag{1.3}$$

où $\overline{A}_0(t) = 1$ et où, pour tout $n > 0$, l'expression $\overline{A}_n(t)$ est un polynôme de degré $(n - 1)$, appelé polynôme d'Euler d'ordre n . Si l'on pose, pour $n > 0$,

$$\overline{A}_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} A_{n,k} t^k \quad , \tag{1.4}$$

les coefficients $A_{n,k}$ sont les nombres d'Euler. Ce sont des entiers positifs satisfaisant

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_{n,k} = n! \qquad \text{pour tout } n > 0 \ . \tag{1.5}$$

Pour tout $n > 0$, notons $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $[n] = \{1 , 2 , \ldots , n\}$. Si σ est dans $\mathfrak{S}_n$, le nombre d'excédents, noté $\mathrm{Exc}\ \sigma$, de la permutation σ est défini comme le nombre d'indices j tels que $1 \leqslant j \leqslant n$ et $\sigma(j) > j$. De même, si r est un entier (strictement) positif, le symbole $\mathrm{Exc}_r\ \sigma$ désigne le nombre d'excédents de σ supérieurs ou égaux à r , c'est-à-dire le nombre d'indices j tels que $1 \leqslant j \leqslant n$ et $\sigma(j) - j \geqslant r$. Notons que $\mathrm{Exc} = \mathrm{Exc}_1$. Formons les polynômes en t

$$\sum \{t^{\mathrm{Exc}\,\sigma} : \ \sigma \in \mathfrak{S}_n\} = A_n(t) \tag{1.6}$$

Secrétariat mathématique
11 rue Pierre et Marie Curie, 75 - PARIS 5e

et

$$(1.7) \qquad \sum \{ t^{\underset{\sim}{\mathrm{Exc}}_r \sigma} : \sigma \in \mathfrak{S}_n \} = {}^{r}A_n(t) \qquad (r , n > 0) \ .$$

Nous nous proposons de démontrer ci-dessous que l'on a $\overline{A}_n(t) = A_n(t)$ pour tout $n > 0$. Nous allons en fait prouver que si l'on forme la série formelle $\sum_{n \geqslant 0} A_n(t) \, u^n / n!$, où $A_0(t) = 1$, on a alors $\sum_{n \geqslant 0} A_n(t) \, u^n / n! = F(u , t)$, où $F(u , t)$ est donnée par l'expression (1.1). De même, nous prouverons l'identité

$$(1.8) \qquad \sum_{n \geqslant r-1} (1/(n - r + 1)!) \, u^{n-r+1} \, {}^{r}A_n(t) = (r - 1)! \, (F(u , t))^r \ .$$

Ces résultats ne sont pas nouveaux (cf. RIORDAN [3]), mais les démonstrations données ici sont originales. En particulier, on trouvera dans le paragraphe 4 une double interprétation des polynômes $A_n(t)$ en termes d'excédents déjà définis et en termes de descentes qu'on définira alors. Egalement une nouvelle classe de polynômes est introduite, qui généralise la classe des polynômes d'Euler. Ils admettent aussi cette double interprétation en termes d'excédents et de descentes. Toutefois, leur arithmétique ne semble pas définitive. On ne donnera pas ici l'étude modulo p , où p est un premier des polynômes $A_p(t)$. Notons que tous les résultats présentés ici feront l'objet d'une prochaine publication [1].

Le paragraphe 2 contient toutes nos notations et en particulier les définitions de deux fonctions ω et $\overline{\omega}$ qui vont jouer un rôle fondamental par la suite. Le paragraphe 3 donne une formule de Cauchy et ses conséquences. Après le paragraphe 4 qui a déjà été décrit, on trouvera dans le paragraphe 5 la preuve de l'identité (1.8) ci-dessus.

2. Notations.

Si I est une partie finie (non vide) de $\underset{\sim}{N} \setminus \{0\}$, on désigne par $\mathfrak{S}_I$ le groupe des permutations de l'ensemble I , par $|I|$ le cardinal de I , par ω'' la bijection croissante de I sur $[|I|]$ et enfin par $\omega' : \mathfrak{S}_I \to \mathfrak{S}_{|I|}$ la bijection qui fait correspondre à $\sigma \in \mathfrak{S}_I$, la permutation $\omega'(\sigma) \in \mathfrak{S}_{|I|}$ envoyant $\omega''(i)$ sur $\omega''(\sigma(i))$ pour tout $i \in I$. De plus, C_I désigne l'ensemble des permutations circulaires de I et S_I l'ensemble de tous les mots, de longueur $|I|$ dont toutes les lettres sont dans I et sont distinctes. Pour $I = [n]$, $(n > 0)$, on écrit S_n et C_n au lieu de $S_{[n]}$ et $C_{[n]}$. Les ensembles $\mathfrak{S}_I$ et S_I ont alors même cardinal et l'on note $p : \mathfrak{S}_I \to S_I$ la bijection qui à $\sigma \in \mathfrak{S}_I$ fait correspondre le mot $p(\sigma) = \sigma(i_1) \, \sigma(i_2) \ldots \sigma(i_{|I|})$ de $S_{|I|}$ où $(i_1 , i_2 , \ldots , i_{|I|})$ est la suite croissante de tous les éléments de I . L'application $\omega = p \circ \omega' \circ p^{-1}$

est alors une bijection de S_I sur $S_{|I|}$. Maintenant on écrira $\lambda s = n$ (resp. $\lambda\sigma = n$) si $s \in S_I$ et $|I| = n$ (resp. $\sigma \in \mathfrak{S}_n$) ; on supposera, de plus, l'existence d'un élément e tel que $\lambda e = 0$ et l'on posera $S_0 = \{e\}$.

Pour définir l'application $\overline{\omega}$, on forme d'abord le monoïde abélien libre, noté C^+ , engendré par l'ensemble $C = \bigcup_{n>0} C_n$. D'après la théorie élémentaire du groupe des permutations, toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ s'exprime d'une, et d'une seule façon, comme un produit (commutatif) de permutations circulaires opérant sur des sous-ensembles disjoints de $[n]$. Si donc σ est égal au produit $\tau_1 \tau_2 \dots \tau_m$, où τ_1 , τ_2 , $\dots$, τ_m sont des permutations circulaires opérant sur des sous-ensembles disjoints, on posera

$$\overline{\omega}(\sigma) = \omega'(\tau_1)\, \omega'(\tau_2) \dots \omega'(\tau_m) \quad , \tag{2.1}$$

où le second membre de (2.1) est un produit dans le monoïde C^+ .

2.2. EXEMPLE. - Considérons la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 6 & 8 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad .$$

Elle s'exprime encore comme le produit de cycles

$$\sigma = (312)(74)(865)$$

en utilisant les notations habituelles pour les cycles. On a alors

$$\overline{\omega}(\sigma) = (312)(21)(321) \in C^+ \quad .$$

Enfin, si l'on pose $I = I(s)$ si, et seulement si, $s \in S_I$, l'application $s \to (I(s) , \omega(s))$ est une bijection de l'ensemble $\cup\{S_I : I \text{ fini } \subset \underset{\sim}{\mathbb{N}} \setminus \{0\}\}$ sur l'ensemble des couples (I , s) tels que I est une partie finie de $\underset{\sim}{\mathbb{N}} \setminus \{0\}$ et $s \in S_{|I|}$. Le couple $(I(s) , \omega(s))$ est dit <u>présentation de</u> s .

2.3. EXEMPLE. - Considérons le mot $s = 7483$; sa présentation est donnée par le couple (I , s') où I est l'ensemble $I = \{3 , 4 , 7 , 8\}$ et s' est le mot $s' = 3241 \in S_4$.

3. Formule de Cauchy.

On appellera ainsi l'identité (3.2) ci-dessous, car elle donne justement en appliquant aux deux membres un homomorphisme approprié, la formule de Cauchy sur les indices des cycles du groupe $\mathfrak{S}_n$.

3.1. LEMME. - <u>Dans l'algèbre large du monoïde</u> C^+ , <u>on a l'identité</u>

$$1 + \sum_{n>0} (1/n!) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \overline{\omega}(\sigma) = \exp\{ \sum_{i>0} (1/i!) \sum_{q \in C_i} q\} \quad . \tag{3.2}$$

La vérification du lemme 3.1 est une simple question de comptage.

Désignons maintenant par $B_n(t)$ le polynôme

$$B_n(t) = \sum \{ t^{\underline{\mathrm{Exc}}\, q} : q \in C_n \} , \quad (n > 0) . \tag{3.3}$$

La formule de Cauchy va nous permettre d'obtenir une identité entre les $A_n(t)$ et les $B_n(t)$ d'où nous déduirons une identité sur les $A_n(t)$.

D'abord, si la permutation σ est le produit des cycles disjoints $\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_m$ on a

$$\underline{\mathrm{Exc}}\, \sigma = \underline{\mathrm{Exc}}\, \tau_1 + \underline{\mathrm{Exc}}\, \tau_2 + \ldots + \underline{\mathrm{Exc}}\, \tau_m . \tag{3.4}$$

Si, d'autre part, on a $\overline{\omega}(\sigma) = q_1\, q_2 \cdots q_m \in C^+$, alors on a encore

$$\underline{\mathrm{Exc}}\, \sigma = \underline{\mathrm{Exc}}\, q_1 + \underline{\mathrm{Exc}}\, q_2 + \ldots + \underline{\mathrm{Exc}}\, q_m . \tag{3.5}$$

Désignons par ψ l'homomorphisme de l'algèbre large sur $\underline{Q}$ de C^+ dans l'algèbre $Q[[t , u]]$, induit par l'application $q \to t^{\underline{\mathrm{Exc}}\, q}\, u^{\lambda q}$. On a

$$\begin{aligned} \psi(\overline{\omega}(\sigma)) &= \psi(q_1)\, \psi(q_2) \ldots \psi(q_m) \\ &= u^{\lambda q_1 + \lambda q_2 + \cdots + \lambda q_m}\, t^{\underline{\mathrm{Exc}}\, q_1 + \underline{\mathrm{Exc}} q_2 + \cdots + \underline{\mathrm{Exc}}\, q_m} \\ &= u^{\lambda\sigma}\, t^{\underline{\mathrm{Exc}}\, \sigma} \quad \text{(d'après (3.4) et (3.5))} . \end{aligned} \tag{3.6}$$

Comme il est clair que l'homomorphisme ψ est continu, on a en appliquant ψ aux deux membres de l'identité (3.2)

$$1 + \sum_{n>0} (1/n!)\, u^n \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} t^{\underline{\mathrm{Exc}}\, \sigma} = \exp\{ \sum_{i>0} (1/i!)\, u^i \sum_{q \in C_i} t^{\underline{\mathrm{Exc}}\, q} \}$$

soit

$$1 + \sum_{n>0} (1/n!)\, u^n\, A_n(t) = \exp\{ \sum_{i>0} (1/i!)\, u^i\, B_i(t) \} . \tag{3.7}$$

En anticipant sur le paragraphe suivant, où nous montrerons que

$$B_i(t) = t A_{i-1}(t) \quad \text{pour tout } i > 0 , \ (A_0(t) = 1) , \tag{3.8}$$

nous déduisons de (3.7) l'identité

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1/n!)\, u^n\, A_n(t) = \exp\{ \sum_{i=1}^{\infty} (1/i!)\, u^i\, t A_{i-1}(t) \} . \tag{3.9}$$

Maintenant, l'identité (3.9) permet de démontrer que l'on a bien

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1/n!)\, u^n\, A_n(t) = F(u , t) , \tag{3.10}$$

où l'expression de $F(u , t)$ est donnée en (1.1), c'est-à-dire que $\overline{A}_n(t) = A_n(t)$. Posons, en effet,

$$X = 1 + \sum_{i>0} (1/i!)\, A_{i-1}(t)\, u^i \qquad \text{puis} \qquad X' = \sum_{n\geqslant 0} (1/n!)\, u^n\, A_n(t) \quad .$$

Si l'on prend alors pour t et u des nombres réels en module, inférieurs à 1 , alors X' est précisément la dérivée de X par rapport à u . L'identité (3.9) peut alors s'écrire

$$X' = \exp(tX + u - tu - t) \quad . \tag{3.11}$$

En intégrant cette équation différentielle entre 0 et u , on trouve une expression pour $\exp(tX)$. En reportant celle-ci dans (3.11), on trouve alors la formule désirée

$$X' = (1 - t)/(\exp(u(t - 1)) - t) = F(u , t) \quad . \tag{3.12}$$

Nous donnerons dans [1] une autre démonstration de ce résultat.

4. Excédents et descentes.

Il nous reste encore à démontrer (3.8). Nous allons tout d'abord définir une nouvelle classe de polynômes généralisant les polynômes $A_n(t)$. Ci-dessous, t_1 , t_2 , t_3 , ... vont désigner des indéterminées commutatives et n va être un entier (strictement) positif fixé. Si $M = \prod_{1\leqslant j\leqslant n} t_j^{x_j}$ est un monôme en les t_j et $r > 0$ un entier, on pose

$$M'_r = \prod_{1\leqslant j\leqslant n-r} t_j^{(x_j-r+1)^+} \quad , \tag{4.1}$$

$$M''_r = \prod_{1\leqslant j\leqslant n-r} t_j^{x_{j+r-1}} \quad , \tag{4.2}$$

si $0 < r < n$ et $M'_r = M''_r = 1$ dans les autres cas. Enfin, $|M|$ va désigner le nombre d'indices j tels que $1 \leqslant j \leqslant n$ et $x_j > 0$. Par linéarité, on étend les deux premières opérations à tout polynôme de $Z[t_1 , t_2 , \ldots , t_n]$.

Maintenant, pour tout $s = x_1\, x_2 \ldots x_n \in S_n$, $(n > 0)$, on pose

$$\underset{\sim}{E}s = \prod_{1\leqslant j\leqslant n} t_j^{(x_j-j)^+} \quad , \tag{4.3}$$

$$\underset{\sim}{D}s = \prod_{1\leqslant j\leqslant n} t_{x_j}^{(x_{j-1}-x_j)^+} \qquad \text{avec} \quad x_0 = 0 \quad , \tag{4.4}$$

(4.5) $$\underset{\sim}{E}e = \underset{\sim}{D}e = 1 \quad ,$$

puis

(4.6) $$\underset{\sim}{E}(S_n) = \Sigma \{\underset{\sim}{E}s \; ; \quad s \in S_n\} \quad ,$$

(4.7) $$\underset{\sim}{D}(S_n) = \Sigma \{\underset{\sim}{D}s \; : \quad s \in S_n\} \quad .$$

Notons que l'on a

(4.8) $$\underset{\sim}{E}(S_n) = \underset{\sim}{E}(S_n)'_1 = \underset{\sim}{E}(S_n)''_1$$

et aussi

(4.9) $$\underset{\sim}{D}(S_n) = \underset{\sim}{D}(S_n)'_1 = \underset{\sim}{D}(S_n)''_1 \quad .$$

Notons encore que si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $p(\sigma) = s = x_1 x_2 \ldots x_n \in S_n$, alors $|\underset{\sim}{E}s|$ est égal au nombre d'entiers j tels que $1 \leqslant j \leqslant n$ et $x_j - j > 0$. Autrement dit, $\underset{\sim}{\text{Exc}}\ \sigma = \underset{\sim}{E}s$ et on retrouve ainsi le polynôme

(4.10) $$A_n(t) = \Sigma \{t^{|\underset{\sim}{E}s|} \; : \quad s \in S_n\} \quad .$$

Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant :

4.11. THÉORÈME. - *Pour tout entier* $r > 0$, *on a*

(4.12) $$\underset{\sim}{E}(S_n)'_r = \underset{\sim}{E}(S_n)''_r = \underset{\sim}{D}(S_n)'_r = \underset{\sim}{D}(S_n)''_r \quad .$$

Ce théorème sera démontré, si nous prouvons les deux lemmes suivants :

4.13. LEMME. - *Pour tout entier* $r > 0$, *on a*

(4.14) $$\underset{\sim}{E}(S_n)'_r = \underset{\sim}{E}(S_n)''_r \quad .$$

4.15. LEMME. - *Les polynômes* $\underset{\sim}{E}(S_n)$ *et* $\underset{\sim}{D}(S_n)$ *sont identiques.*

Pour prouver (4.14), il suffit évidemment de considérer le cas $1 < r < n$. Pour $s = x_1 x_2 \ldots x_n \in S_n$, posons

$$\beta(s) = x_r x_{r+1} \ldots x_n x_1 \ldots x_{r-1} \quad .$$

Alors

$$\underset{\sim}{E}''_r s = \prod_{1 \leqslant j \leqslant n-r} t_j^{(x_{j+r-1} - j - r + 1)^+} = \underset{\sim}{E}'_r \beta(s) \quad ,$$

et le lemme en résulte du fait que β est une permutation de S_n.

Pour prouver le lemme 4.15, il suffit encore de construire une permutation γ de S_n telle que l'on ait $\underset{\sim}{E} = \underset{\sim}{D} \circ \gamma$. D'abord, si $s = p(\tau)$, où τ est une

permutation circulaire d'un ensemble fini I, on pose $\gamma(s) = y_1\, y_2 \cdots y_{|I|}$, où

1° I est l'ensemble $\{y_1, y_2, \cdots, y_{|I|}\}$,

2° $y_1 = \max\{y_1, y_2, \cdots, y_{|I|}\}$,

3° $\tau(y_1) = y_{|I|}$ et si $|I| > 1$, alors $\tau(y_2) = y_1, \cdots, \tau(y_{|I|}) = y_{|I|-1}$.

Ensuite, si $p^{-1}(s)$ est le produit des cycles disjoints $\tau_1\, \tau_2 \cdots \tau_m$ $(m > 0)$, alors $\tau(s)$ est le mot obtenu en juxtaposant les mots $\gamma(p(\tau_1))$, $\gamma(p(\tau_2))$, $\cdots$, $\gamma(p(\tau_m))$ de sorte que la suite formée par les premières lettres de ces mots soit croissante. On vérifie alors que $\underset{\sim}{E}s = \underset{\sim}{D}\,\gamma(s)$. L'application γ est bien bijective, car si $v_1\, v_2 \cdots v_n$ est un mot de S_n, il factorise de façon unique en un produit de juxtaposition de mots $w_1\, w_2 \cdots w_m$ qui débutent par leur plus grande lettre et qui sont tels que la suite formée par leurs premières lettres est (strictement) croissante. Donnons un exemple qui va illustrer la transformation.

4.16. EXEMPLE. - Si $s = 31276845 \in S_8$, alors $\underset{\sim}{E}s = t_1^2\, t_4^3\, t_5\, t_6^2$. La permutation $p^{-1}(s)$ est le produit des cycles $(312)(74)(865)$. On a donc $\gamma(s) = 31274865$ et $\underset{\sim}{D}\,\gamma(s) = t_1^2\, t_4^3\, t_5\, t_6^2 = \underset{\sim}{E}s$.

Si $s = x_1\, x_2 \cdots x_n \in S_n$, alors $|\underset{\sim}{D}s|$ est égal au nombre d'indices j tels que $1 < j \leqslant n$ et $x_{j-1} - x_j > 0$. Nous dirons que c'est le nombre de <u>descentes</u> du monôme s. On a alors une deuxième interprétation du polynôme $A_n(t)$, à rapprocher de la formule (4.10)

$$A_n(t) = \sum \{t^{|\underset{\sim}{D}s|} : s \in S_n\} . \tag{4.17}$$

Il nous reste encore à démontrer que $B_n(t) = tA_{n-1}(t)$, $(n > 0)$. Nous allons établir un résultat plus général et prouver en fait le théorème suivant :

4.18. THÉORÈME. - <u>Soient</u> r <u>et</u> n <u>deux entiers tels que</u> $r > 1$ <u>et</u> $n > 0$ <u>et</u> $\underset{\sim}{E}(C_n)$ <u>le polynôme</u>

$$\underset{\sim}{E}(C_n) = \sum \{\underset{\sim}{E}s : s \in p(C_n)\} . \tag{4.19}$$

<u>On a alors</u>

$$\underset{\sim}{E}(C_n)'_r = \underset{\sim}{E}(C_n)''_r = \underset{\sim}{E}(S_{n-1})'_{r-1} = \underset{\sim}{E}(S_{n-1})''_{r-1} . \tag{4.20}$$

<u>Preuve</u>. - Il suffit d'abord de démontrer (4.20) pour $r = 2$. Notons ensuite que dans la démonstration du lemme 4.15, nous avons défini une permutation γ de S_n telle que $\underset{\sim}{E} = \underset{\sim}{D} \circ \gamma$. Or cette permutation γ envoie les mots du sous-ensemble $p(C_n)$ sur l'ensemble nS_{n-1} des mots de S_n dont la première lettre est n.

On a donc en particulier

$$\underset{\sim}{E}(C_n) = \underset{\sim}{D}(nS_{n-1}) = \sum \{\underset{\sim}{D}s : \ s \in nS_{n-1}\} \ . \tag{4.21}$$

Il nous suffit donc en fait de démontrer, à cause de la remarque initiale, de (4.12) et (4.21), en supposant $n > 2$,

$$\underset{\sim}{D}(S_{n-1})''_1 \ (= \underset{\sim}{D}(S_{n-1})) = \underset{\sim}{D}(nS_{n-1})''_2 \ . \tag{4.22}$$

Pour ce faire, on désigne d'abord par δ la bijection de S_{n-1} sur l'ensemble T_n des mots de S_n dont la première lettre est 1 , définie pour tout $s = x_1 x_2 \dots x_{n-1} \in S_{n-1}$, par

$$\delta(s) = 1 \ \overline{x_1 + 1} \ \overline{x_2 + 1} \dots \overline{x_{n-1} + 1} \ . \tag{4.23}$$

Ensuite, si f est dans S_n , on désigne par $\theta(f)$ l'unique mot de S_n obtenu en réarrangeant circulairement le mot f de sorte que la première lettre de $\theta(f)$ soit n . La restriction de θ à T_n est ainsi une bijection de T_n sur nS_{n-1} . La bijection $\theta \circ \delta$ ayant été définie, il est alors aisé de vérifier que l'on a pour tout $s \in S_{n-1}$

$$\underset{\sim}{D}s = \underset{\sim}{D}''_2 (\theta \circ \delta)(s) \ . \tag{4.24}$$

Ce qui démontre (4.22) et par suite le théorème 4.18.

4.25. EXEMPLE. - Soit $s = 31274865 \in S_8$. On a $\delta(s) = 142385976 \in T_9$, puis $(\theta \circ \delta)(s) = 976142385 \in 9S_8$. On vérifie bien que $\underset{\sim}{D}s = t_1^2 t_4^3 t_5 t_6^2$, puis $\underset{\sim}{D}(\theta \circ \delta)(s) = t_1^5 t_2^2 t_5^3 t_6 t_7^2$, d'où, en vertu de la définition (4.2), on a $\underset{\sim}{D}''_2(\theta \circ \delta)(s) = t_1^2 t_4^3 t_5 t_6^2 = \underset{\sim}{D}s$.

On déduit, en particulier, du théorème 4.18 l'identité

$$\sum \{t^{|\underset{\sim}{E}s|} : \ s \in S_{n-1}\} = \sum \{t^{|\underset{\sim}{E}''_2 s|} : \ s \in p(C_n)\} \tag{4.26}$$

pour $n > 0$. Or si $s = x_1 x_2 \dots x_n$ est dans $p(C_n)$, donc est l'image par p d'une permutation circulaire, on a nécessairement $x_1 > 1$. Par conséquent, il vient

$$|\underset{\sim}{E}s| = 1 + |\underset{\sim}{E}''_2 s| \ . \tag{4.27}$$

D'où, comme $B_n(t) = \sum \{t^{\underset{\sim}{\mathrm{Exc}}\sigma} : \ \sigma \in C_n\} = \sum \{t^{|\underset{\sim}{E}s|} : \ s \in p(C_n)\}$, on a d'après (4.27)

$$\begin{aligned} B_n(t) &= t \sum \{t^{|\underset{\sim}{E}''_2 s|} : \ s \in p(C_n)\} \\ &= t \sum \{t^{|\underset{\sim}{E}s|} : \ s \in S_{n-1}\} \qquad \text{(d'après (4.26))} \\ &= t A_{n-1}(t) \qquad \text{(d'après (4.10))} \ . \end{aligned}$$

L'identité (3.10) est en particulier ainsi démontrée.

5. Fonction génératrice des excédents d'ordre supérieur ou égal à r .

Soient r et j deux entiers (strictement) positifs ; dans l'introduction (en (1.7)), nous avons défini le polynôme

$$ {}^{r}A_j(t) = \sum\{t^{\underset{\sim}{\mathrm{Exc}}_r \sigma} : \sigma \in \mathfrak{S}_j\} . $$

Celui-ci peut encore s'écrire

$$ {}^{r}A_j(t) = \sum\{t^{|\underset{\sim}{E}'_r s|} : s \in S_j\} . \tag{5.1} $$

D'après le théorème 4.11, on a aussi

$$ {}^{r}A_j(t) = \sum t^{|\underset{\sim}{E}''_r s|} = \sum t^{|\underset{\sim}{D}'_r s|} = \sum t^{|\underset{\sim}{D}''_r s|} , \tag{5.2} $$

où les trois sommes ci-dessus sont étendues à tous les $s \in S_j$. De la même façon, on pose

$$ {}^{r}B_j(t) = \sum\{t^{|\underset{\sim}{E}'_r s|} : s \in C_j\} . \tag{5.3} $$

Le théorème 4.18 entraîne alors

$$ {}^{r}A_j(t) = {}^{(r+1)}B_{j+1}(t) . \tag{5.4} $$

Considérons maintenant la série formelle à deux indéterminées commutatives u et t , que nous appellerons fonction génératrice des excédents d'ordre supérieur ou égal à r ,

$$ {}^{r}\underset{\sim}{A} = \sum_{j \geqslant r-1} {}^{r}A_j(t)\, u^{j-r+1} / (j - r + 1)! . \tag{5.5} $$

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

5.6. THÉORÈME. - Dans l'algèbre des séries formelles $\underset{\sim}{Q}[[t , u]]$, on a l'identité

$$ {}^{r}\underset{\sim}{A} = (r - 1)! \, ({}^{1}\underset{\sim}{A})^{r} . \tag{5.7} $$

Soit S^* le monoïde libre engendré par S et soit $\underset{\sim}{Q}[[S^*]]$ l'algèbre large sur $\underset{\sim}{Q}$ du monoïde S^* . Pour démontrer ce théorème, nous allons établir d'abord une identité dans $\underset{\sim}{Q}[[S^*]]$ (formule (5.18) ci-dessous) et l'identité (5.7) en résultera en appliquant aux deux membres de la formule (5.18) un homomorphisme approprié.

Soient r et j deux entiers tels que $0 \leqslant r - 1 \leqslant j$. Un mot $s \in S_j$ s'écrit d'une et d'une seule façon

$$s = f_1\, i_1\, f_2\, i_2 \ldots f_{r-1}\, i_{r-1}\, f_r \quad , \tag{5.8}$$

où $i_1 , i_2 , \ldots , i_{r-1}$ appartiennent à $[r - 1]$, où le mot $i_1\, i_2 \ldots i_{r-1}$ est dans S_{r-1}, et où $f_1 , f_2 , \ldots , f_r$ sont des mots de $\underset{\sim}{N}^*$ (dont certains peuvent être vides).

Posons $s_0 = i_1\, i_2 \ldots i_{r-1} \in S_{r-1}$ et soient $(I_1 , s_1) , (I_2 , s_2) , \ldots , (I_r , s_r)$ les présentations (au sens du paragraphe 2) des mots $f_1 , f_2 , \ldots , f_r$. D'abord on a

$$\omega(f_1) = s_1 , \quad \omega(f_2) = s_2 , \quad \ldots , \quad \omega(f_r) = s_r \quad , \tag{5.9}$$

et nous poserons

$$\psi_r(s) = s_1\, s_2 \ldots s_r \in S^* \quad . \tag{5.10}$$

Ensuite, comme s est multilinéaire, la suite $(I_1 , I_2 , \ldots , I_r)$ est une <u>partition ordonnée</u> de l'ensemble $[j] \setminus [r - 1]$ en r sous-ensembles (dont certains peuvent être vides). Désignons par S^r le sous-ensemble des mots de S^* de longueur égale à r. Alors le mot $s \in S_j$ $(0 \leqslant r - 1 \leqslant j)$ est encore caractérisé par un triplet

$$(s_0 , (I_1 , I_2 , \ldots , I_r) , s_1\, s_2 \ldots s_r) \tag{5.11}$$

dit sa <u>r-présentation</u> tel que

$$\begin{cases} 1^\circ \quad s_0 \in S_{r-1} \ ; \\ 2^\circ \quad (I_1 , I_2 , \ldots , I_r) \text{ est une partition ordonnée de } [j] \setminus [r - 1] \ ; \\ 3^\circ \quad s_1\, s_2 \ldots s_r \in S^r \ ; \\ 4^\circ \quad s_1 \in S_{|I_1|} , \ s_2 \in S_{|I_2|} , \ \ldots , \ s_r \in S_{|I_r|} \ . \end{cases} \tag{5.12}$$

D'après les 2° et 4° de (5.12), on a donc

$$\lambda s_1 + \lambda s_2 + \ldots + \lambda s_r + r - 1 = j \quad . \tag{5.13}$$

Soit $f = s_1\, s_2 \ldots s_r \in S^r$ tel que la relation (5.13) soit satisfaite. Nous nous proposons de déterminer le cardinal de $\psi_r^{-1}(f)$. Les mots $s \in S$ satisfaisant $\psi_r(s) = f$ sont alors nécessairement dans S_j et leurs r-présentations ne diffèrent que par leurs deux premiers termes. D'après (5.11), on a donc

$$|\psi_r^{-1}(f)| = |S_{r-1}| . |\mathcal{P}| \quad ,$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des partitions ordonnées $(I_1 , I_2 , \ldots , I_r)$ de $[j] \setminus [r - 1]$

telles que

$$|I_1| = \lambda s_1 , \qquad |I_2| = \lambda s_2 , \quad \dots , \quad |I_r| = \lambda s_r .$$

Par conséquent

$$|\wp| = (\lambda s_1 + \lambda s_2 + \dots + \lambda s_r)!/(\lambda s_1! \, \lambda s_2! \dots \lambda s_r!)$$

et

$$(5.14) \quad |\psi_r^{-1}(f)| = (r-1)! \, (\lambda s_1 + \lambda s_2 + \dots + \lambda s_r)!/(\lambda s_1! \, \lambda s_2! \dots \lambda s_r!) .$$

Posons, pour $r > 0$,

$$(5.15) \qquad {}^{(r-1)}S = \bigcup_{j \geq r-1} S_j ,$$

et

$$(5.16) \qquad {}^{(r-1)}\underset{\sim}{S} = \Sigma \{(1/(\lambda s - r + 1)!)s : \ s \in {}^{(r-1)}S\} ,$$

où le second membre de (5.16) est une série formelle de l'algèbre $\underset{\sim}{Q}[[S^*]]$.

Pour $r = 1$, on a ${}^{(0)}S = S$, et on pose $\underset{\sim}{S} = {}^{(0)}\underset{\sim}{S}$. L'application ψ_r envoie ${}^{(r-1)}S$ sur S^r soit

$$\psi_r({}^{(r-1)}S) = S^r .$$

En prolongeant par linéarité ψ_r en un homomorphisme de module de $Q[[S^*]]$ dans lui-même, nous avons la proposition suivante :

5.17. PROPOSITION. - <u>Dans l'algèbre</u> $Q[[S^*]]$, <u>l'identité suivante est vérifiée</u>

$$(5.18) \qquad \psi_r({}^{(r-1)}\underset{\sim}{S}) = (r-1)! \, \underset{\sim}{S}^r .$$

<u>Preuve</u>. - Dans (5.18), $\underset{\sim}{S}^r$ est la puissance r-ième de la série formelle $\underset{\sim}{S}$. Maintenant, d'après (5.10), on définit $\psi_r({}^{(r-1)}\underset{\sim}{S})$ comme

$$\psi_r({}^{(r-1)}\underset{\sim}{S}) = \Sigma \{(1/(\lambda s - r + 1)!) \, \psi_r(s) : \ s \in {}^{(r-1)}S\} .$$

D'après (5.13), on peut écrire

$$\begin{aligned}
\psi_r({}^{(r-1)}\underset{\sim}{S}) &= \Sigma \{(1/(\lambda s_1 + \lambda s_2 + \dots + \lambda s_r)!) \, |\psi_r^{-1}(f)| f : \ f = s_1 \, s_2 \dots s_r \in S^r\} \\
&= (r-1)! \, \Sigma \{(1/(\lambda s_1! \, \lambda s_2! \dots \lambda s_r!)) \, s_1 \, s_2 \dots s_r : \ s_1 \, s_2 \dots s_r \in S^r\} \\
&\qquad\qquad \text{(d'après (5.14))} \\
&= (r-1)! \, (\Sigma\{(1/\lambda s!)s : \ s \in S\})^r \\
&= (r-1)! \, \underset{\sim}{S}^r .
\end{aligned}$$

Ce qui prouve la proposition 5.17.

Revenons maintenant à la formule (5.8) en supposant $s = x_1 x_2 \dots x_j \in S_j$. Alors $|\underset{\sim}{D}''_r s|$ n'est autre que le nombre d'entiers k tels que $1 < k \leqslant j$ et $x_{k-1} > x_k \geqslant r$. Par conséquent, en conservant toujours les mêmes notations que dans (5.8), les mots $f_1 , f_2 , \dots , f_r$ sont les seuls facteurs du mot s à contenir les lettres x_k telles que $x_{k-1} > x_k \geqslant r$. On a donc

$$|\underset{\sim}{D}''_r s| = |\underset{\sim}{D}''_r f_1| + |\underset{\sim}{D}''_r f_2| + \dots + |\underset{\sim}{D}''_r f_r| \quad . \tag{5.19}$$

Maintenant, d'après la définition de l'application ω , il est immédiat que l'on a

$$|\underset{\sim}{D}\, \omega(f)| = |\underset{\sim}{D}''_r f| \quad , \tag{5.20}$$

si f est un mot dont les lettres sont des entiers supérieurs ou égaux à r . Il résulte alors de (5.9), (5.19) et (5.20) que l'on a

$$|\underset{\sim}{D}''_r s| = |\underset{\sim}{D}s_1| + |\underset{\sim}{D}s_2| + \dots + |\underset{\sim}{D}s_r| \quad . \tag{5.21}$$

D'autre part, l'application $s \to u^{\lambda s}\, t^{|\underset{\sim}{D}s|}$ induit un homomorphisme φ continu de l'algèbre $\mathbb{Q}[[S^*]]$ dans l'algèbre $\mathbb{Q}[[t , u]]$. D'après (5.10), on a

$$\begin{aligned} \varphi(\psi_r(s)) &= \varphi(s_1)\, \varphi(s_2) \dots \varphi(s_r) \\ &= u^{\lambda s_1 + \lambda s_2 + \dots + \lambda s_r}\, t^{|\underset{\sim}{D}s_1| + |\underset{\sim}{D}s_2| + \dots + |\underset{\sim}{D}s_r|} \\ &= u^{\lambda s - r + 1}\, t^{|\underset{\sim}{D}''_r s|} \end{aligned} \tag{5.22}$$

d'après (5.21) et (5.13) puisque $\lambda s = j$.

Dans ces conditions, si on applique φ aux deux membres de (5.18), on a

$$\begin{aligned} \varphi(\psi_r({}^{(r-1)}\underset{\sim}{S})) &= \Sigma \{(1/(\lambda s - r + 1)!)\, \varphi(\psi_r(s)) : s \in {}^{(r-1)}S\} \\ &= \Sigma \{(1/(\lambda s - r + 1)!)\, u^{\lambda s - r + 1}\, t^{|\underset{\sim}{D}''_r s|} : s \in {}^{(r-1)}S\} \quad \text{(d'après (5.22))} \\ &= \sum_{j \geqslant r-1} (1/(j - r + 1)!)\, u^{j-r+1} \Sigma \{t^{|\underset{\sim}{D}''_r s|} : s \in S_j\} \\ &= \sum_{j \geqslant r-1} (1/(j - r + 1)!)\, u^{j-r+1}\, {}^{r}A_j(t) \\ &= {}^{r}\underset{\sim}{A} \quad . \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\varphi((r-1)!\ \underset{\sim}{S}^r) &= (r-1)!\ (\Sigma\{(1/\lambda s!)\ \varphi(s) : s \in S\})^r \\
&= (r-1)!\ (\Sigma\{(1/\lambda s!)\ u^{\lambda s}\ t^{|\underset{\sim}{D}s|} : s \in S\})^r \\
&= (r-1)!\ (\sum_{j\geqslant 0}(1/j!)\ u^j\ \Sigma\{t^{|\underset{\sim}{D}s|} : s \in S_j\})^r \\
&= (r-1)!\ (\sum_{j\geqslant 0}(1/j!)\ u^j\ {}^1A_j(t))^r \\
&= (r-1)!\ ({}^1\underset{\sim}{A})^r \quad .
\end{aligned}$$

Il en résulte l'identité (5.7) et par là-même le théorème 5.6.

Notons pour terminer qu'on trouvera dans l'ouvrage de NIELSEN [2] des relations entre les nombres d'Euler $A_{n,k}$ et les nombres de Bernoulli et qu'enfin les polynômes d'Euler ont reçu une autre généralisation dans un article récent de ROSELLE [4].

BIBLIOGRAPHIE

[1] FOATA (Dominique) et SCHÜTZENBERGER (Marcel-Paul). - Polynômes et nombres d'Euler (à paraître).

[2] NIELSEN (Niels). - Traité élémentaire des nombres de Bernoulli. - Paris, Gauthier-Villars, 1923.

[3] RIORDAN (John). - An introduction to combinatorial analysis. - New York, J. Wiley and Sons, 1958 (A Wiley Publication in mathematical Statistics).

[4] ROSELLE (D. P.). - Permutations by number of rises and successions, Proc. Amer. math. Soc., t. 19, 1968, p. 8-16.