Le Polynôme Chromatique

Bodo LASS

Institut Camille Jordan (UMR 5208 du CNRS)
Université Claude Bernard – Lyon 1
Bâtiment Doyen Jean Braconnier (101)
43, Boulevard du 11 Novembre 1918
F-69622 Villeurbanne Cedex

Courriel : `lass@math.univ-lyon1.fr`

Regardons la toute première identité dans Cartier-Foata ([1], p. 1, formule (1)) (ou bien le théorème 2.4, p. 13) et associons un graphe (simple) $G=(V,E)$ à cette identité : chaque sommet $v\in V$ correspond à une variable T_v et chaque arête $\{u,v\}\in E$ correspond, de façon bijective, à deux variables T_u, T_v qui ne commutent pas. Par conséquent, les monômes formés de lettres distinctes commutant deux à deux correspondent aux ensembles de sommets qui ne contiennent aucune arête : on les appelle *indépendants*.

Imposons maintenant les relations supplémentaires $T_v^2=0$ pour tout $v\in V$ ainsi que $T_uT_v=T_vT_u$ pour toute arète $\{u,v\}\in E$ (pour travailler avec l'algèbre commutative des fonctions d'ensembles $\mathbb{Z}[T_v]/\langle T_v^2\rangle$, $v\in V$). L'identité (1) devient alors

$$\Big[1+\sum_{\substack{\emptyset\subset I\subseteq V,\\ I \text{ indépendant}}}(-1)^{|I|}\prod_{v\in I}T_v\Big]^{-1} = 1+\sum_{\emptyset\subset V'\subseteq V} a(G[V'])\prod_{v\in V'}T_v,$$

où $a(G[V'])$ est le nombre d'orientations acycliques du graphe $G[V']$ qui contient toutes les arêtes ayant leurs deux extrémités dans $V'\subseteq V$. En effet, les monômes distincts formés des lettres non-commutatives T_v, $v\in V'$, correspondaient aux orientations acycliques du graphe $G[V']$.

On appelle une coloration des sommets de G *régulière* si et seulement si les deux extrémités de chaque arête obtiennent des couleurs différentes. Notons $\chi_G(\lambda)$ le nombre de ces colorations avec λ couleurs. Puisque $\chi_G(\lambda)$ compte les partitions de V en λ ensembles indépendants, nous avons l'identité (voir Tutte [3])

$$\begin{aligned}1+\sum_{\emptyset\subset V'\subseteq V}\chi_{G[V']}(\lambda)\prod_{v\in V'}T_v &= \Big[1+\sum_{\substack{\emptyset\subset I\subseteq V,\\ I \text{ indépendant}}}\prod_{v\in I}T_v\Big]^{\lambda}\\ &= 1+\sum_{k=1}^{|V|}\binom{\lambda}{k}\Big[\sum_{\substack{\emptyset\subset I\subseteq V,\\ I \text{ indépendant}}}\prod_{v\in I}T_v\Big]^{k},\end{aligned}$$

puisque $k > |V|$ implique $\left[\sum_{\emptyset\subset I\subseteq V,\ I \text{ indépendant}} \prod_{v\in I} T_v\right]^k = 0$ dans l'algèbre commutative des fonctions d'ensembles $\mathbb{Z}[T_v]/\langle T_v^2\rangle$, $v \in V$. En particulier, $\chi_G(\lambda)$ est un polynôme : le *polynôme chromatique*.

En remplaçant chaque variable T_v par $-T_v$ nous voyons donc que l'identité (1) (ou bien le théorème 2.4) est une généralisation non-commutative de l'identité $(-1)^{|V|}\chi_G(-1) = a(G)$ (voir Stanley [4]).

Une autre généralisation peut être obtenue en associant à chaque arête $\{u, v\}$ l'hyperplan $x_u = x_v$ dans l'espace $\mathbb{R}^{|V|}$. Les orientations acycliques de G correspondent alors aux régions de cet arrangement d'hyperplans. En fait, la formule $(-1)^{|V|}\chi_G(-1) = a(G)$ se généralise non seulement aux arrangements d'hyperplans (voir Winder [4]) mais encore aux matroïdes orientés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Pierre Cartier, Dominique Foata. — *Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements.* — Lecture Notes in Math. **85**, Springer-Verlag, Berlin, 1969 ; electronically reedited 2006.

[2] R. P. Stanley. — Acyclic orientations of graphs, *Discrete Math.*, t. **5**, 1973, p. 171-178.

[3] W. T. Tutte. — On dichromatic polynomials, *J. Combin. Theory*, t. **2**, 1967, p. 301-320.

[4] R. O. Winder. — Partitions of N-space by hyperplanes, *SIAM J. Appl. Math.*, t. **14**, 1966, p. 811-818.