

COMBINATOIRE. — *Groupes de réarrangements et nombres d'Euler.*
 Note (*) de M. **Dominique Foata**, présentée par M. André Lichnerowicz.

Pour tout entier $n > 0$ on définit un groupe G_n de transformations opérant sur les $n!$ éléments du groupe symétrique, ayant la propriété d'avoir un nombre d'orbites égal au nombre d'Euler ou sécant de rang n .

Les *nombres tangents* (ou *d'Euler*) sont définis par le développement en série de $\operatorname{tg} u$,

$$\operatorname{tg} u = \left(\frac{u}{1!}\right)1 + \left(\frac{u^3}{3!}\right)2 + \left(\frac{u^5}{5!}\right)16 + \left(\frac{u^7}{7!}\right)272 + \dots$$

et les nombres sécants par celui de $1/\cos u$,

$$\frac{1}{\cos u} = 1 + \left(\frac{u^2}{2!}\right)1 + \left(\frac{u^4}{4!}\right)5 + \left(\frac{u^6}{6!}\right)61 + \dots$$

On pose

$$D(u) = \operatorname{tg} u + \frac{1}{\cos u} = 1 + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{u^n}{n!}\right) D_n,$$

de sorte que D_n est égal au nombre tangent ou au nombre sécant de rang n , suivant que n est impair ou pair. Les coefficients D_n sont encore reliés entre eux [cf. André ⁽¹⁾, Netto ⁽⁴⁾, Nielsen ⁽⁵⁾] par les formules remarquables

$$\begin{aligned} (1) \quad & 2D'(u) = 1 + D^2(u), \quad D(0) = 1; \\ (2) \quad & D''(u) = D(u)D'(u), \quad D(0) = D'(0) = 1; \end{aligned}$$

où $D'(u)$ et $D''(u)$ sont les séries dérivées

$$D'(u) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{u^n}{n!}\right) D_{n+1} \quad \text{et} \quad D''(u) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{u^n}{n!}\right) D_{n+2}.$$

Les formules (1) et (2) déterminent de façon univoque par récurrence sur n les nombres D_n ($n \geq 1$.)

En particulier, la formule (2) équivaut à l'identité binomiale

$$(3) \quad D_{n+2} = \sum_{0 \leq i \leq n} \binom{n}{i} D_i D_{n-i} \quad (n \geq 0)$$

avec les conditions initiales

$$D_0 = D_1 = 1.$$

C'est dans l'étude combinatoire des nombres D_n et des fonctions arithmétiques qui s'y rattachent, entreprise depuis quelques années par Schützenberger et le présent auteur [(2), (3)], que ce dernier a été amené à introduire une suite de groupes $(G_n)_{n \geq 0}$ dont les nombres d'orbites sont égaux aux coefficients D_n . On ne donne ici que la description de ces groupes, réservant pour une publication ultérieure des démonstrations plus complètes, ainsi que plusieurs applications.

Donnons d'abord la description de quelques notions de base. Une *permutation* de l'ensemble $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ ($n > 0$) est une bijection de $[n]$ sur lui-même. Dans la suite, toute permutation σ sera identifiée au mot $\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$ en les lettres $1, 2, \dots, n$. On utilisera également le langage des monoïdes libres. Par exemple, le mot obtenu par la *juxtaposition* des deux mots $v = x_1x_2\cdots x_m$ et $w = y_1y_2\cdots y_n$ dans cet ordre, sera noté vw . On suppose l'existence d'un mot vide e . Une *factorisation* d'un mot w est une suite $(w_1, w_2, \dots, w_q)$ ($q > 0$) de mots tels que le produit de juxtaposition $w_1w_2\cdots w_q$ soit égal à w . L'ensemble de toutes les permutations de $[n]$ ($n > 0$) sera noté $\mathfrak{S}_n$.

LEMME 1. — Soient $1 \leq x \leq n$ et $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$ une permutation appartenant à $\mathfrak{S}_n$. Alors σ admet une factorisation unique (w_1, w_2, x, w_3, w_4) , dite sa *x-factorisation*, caractérisée par les trois propriétés suivantes :

- (i) w_1 est vide ou sa dernière lettre est inférieure à x ;
- (ii) w_2 (resp. w_3) est vide ou toutes ses lettres sont supérieures à x ;
- (iii) w_4 est vide ou sa première lettre est inférieure à x .

Par exemple, pour $x = 4$, la x -factorisation de $\sigma = 78314562$ est donnée par $(7831, e, 4, 56, 2)$. Nous définissons ensuite une classe d'involutions qui opèrent sur l'ensemble $\mathfrak{S}_n$. Ces involutions sont donc des éléments du groupe symétrique des transformations opérant sur les $n!$ éléments de $\mathfrak{S}_n$. Soit $1 \leq x \leq n$ et (w_1, w_2, x, w_3, w_4) la x -factorisation d'une permutation σ appartenant à $\mathfrak{S}_n$. On pose

$$(4) \quad \Phi_x(\sigma) = w_1 w_3 x w_2 w_4.$$

Puisqu'on a réarrangé les facteurs de σ dans un ordre différent, le mot $\Phi_x(\sigma)$ est bien encore un élément de $\mathfrak{S}_n$. De plus, les propriétés (i), (ii) et (iii) ci-dessus montrent que (w_1, w_3, x, w_2, w_4) est la x -factorisation de $\Phi_x(\sigma)$. Par conséquent, Φ_x est bien une involution ($\Phi_x \Phi_x(\sigma) = \sigma$ pour tout σ in $\mathfrak{S}_n$ et tout $x \in [n]$).

PROPOSITION 2. — Les involutions Φ_x ($1 \leq x \leq n$) définies par la relation (4) commutent deux à deux. De plus, Φ_n est l'application identique Id .

Pour démontrer la proposition 2, on peut considérer deux entiers x et y tels que $1 \leq x < y \leq n$ et se donner la x -factorisation (w_1, w_2, x, w_3, w_4) d'une permutation appartenant à $\mathfrak{S}_n$. Quatre cas sont à considérer suivant que y est une lettre du mot

w_1, w_2, w_3 , ou w_4 . Si par exemple y est une lettre du mot w_1 et si (v_1, v_2, y, v_3, v_4) est la y -factorisation du mot w , lui-même, on vérifie que l'on a

$$\Phi_y(\sigma) = v_1 v_3 y v_2 v_4 w_2 x v_3 w_4,$$

et enfin

$$\Phi_x \Phi_y(\sigma) = v_1 v_3 y v_2 v_4 w_3 x w_2 w_4 = \Phi_y \Phi_x(\sigma).$$

Les involutions Φ_x ($1 \leq x \leq n$) appartiennent au groupe des permutations opérant sur l'ensemble $\mathfrak{S}_n$. On désigne par G_n le sous-groupe engendré par l'ensemble $\{\Phi_x; 1 \leq x \leq n\}$.

PROPOSITION 3.. — *Le groupe G_n est commutatif et d'ordre 2^n ($n > 0$).*

Pour évaluer enfin le nombre d'orbites de G_n , nous prenons dans chacune d'elles un représentant que nous allons caractériser. Sur l'ensemble de tous les mots non vides dont les lettres sont des entiers, on définit le préordre total suivant : $w \leq w'$ si et seulement si la plus grande lettre de w est inférieure ou égale à la plus grande lettre de w' . Par convention, on pose aussi $e < w$ pour tout mot non vide w . On dit que la x -factorisation (w_1, w_2, x, w_3, w_4) d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est *balancée* si l'on a $w_2 \leq w_3$. On dit ensuite que σ est une *permutation d'André* si sa x -factorisation est balancée pour tout x dans $[n]$. Par exemple, $\sigma = 2134$ est une permutation d'André, car ses x -factorisations sont $(e, 2, 1, 34, e)$, $(e, e, 2, e, 134)$, $(21, e, 3, 4, e)$, $(213, e, 4, e, e)$ respectivement pour $x = 1, 2, 3, 4$ et que celles-ci sont toutes balancées.

PROPOSITION 4. — *Toute orbite de G_n contient une et une seule permutation d'André.*

Notons enfin d_n le nombre d'orbites de G_n , c'est-à-dire, d'après la proposition 4, le nombre de permutations d'André dans $\mathfrak{S}_n$, ($n > 0$). Pour établir que d_n est égal D_n , il suffit d'établir, puisque $d_n = 1$ et en convenant que $d_1 = 1$, que les d_n satisfont à la relation de récurrence (3). En fait, un argument combinatoire simple montre que $\binom{n}{i} d_i d_{n-i}$ est égal au nombre de permutations d'André $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telles que

$$\sigma(i+1) = 1 \quad (0 \leq i \leq n).$$

La formule de récurrence s'obtient donc par sommation sur i .

REMARQUE 5. — Par mesure de simplicité, on a défini le groupe G_n comme groupe d'opérateurs sur l'ensemble $\mathfrak{S}_n$. On peut évidemment prendre à la place de $\mathfrak{S}_n$ d'autres ensembles, par exemple la classe F de toutes les fonctions réelles définies sur l'intervalle de la forme $f = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i I_{A_i}$, où les x_i sont tous distincts et où les I_{A_i} , sont les indicatrices

d'intervalles semi-ouverts $[a_i, b_i[$ disjoints deux à deux et de réunion $[0, 1[$ Le groupe G_n se définit de façon analogue, suivant le graphe des fonctions de F et permute celles-ci entre elles.

(*) Séance du 20 novembre 1972.

⁽¹⁾ D. ANDRÉ, *Comptes rendus*, 88, 1879, p. 965.

⁽²⁾ D. FOATA et M.-P. SCHÜTZENBEGGER, *Théorie géométrique des polynômes eulériens*, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

⁽³⁾ D. FOATA et M.-P. SCHÜTZENBEGGER, (à paraître dans le R. C. Bose volume, North-Holland, Amsterdam, 1972).

⁽⁴⁾ E. NETTO, *Lehrbuch der Combinatorik*, B. G. Teubner, Leipzig, 1900.

⁽⁵⁾ N. NIELSEN, *Traité élémentaire des nombres de Bernoulli*, Gauthier-Villars, Paris, 1923.

*Institut de Recherche mathématique avancée
Université de Strasbourg,
7, rue René-Descartes,
67084 Strasbourg.*