

RÉARRANGEMENTS D'APPLICATIONS ASSOCIÉS AUX NOMBRES DE GENOCCHI

par

Dominique FOATA

Plusieurs écoles de combinatoire se proposent actuellement de trouver des *interprétations géométriques* naturelles pour les coefficients des développements.

$$f(u) = \sum_{n \geq 0} (u^n / n!) a_n$$

des fonctions élémentaires. Lorsque les coefficients a_n sont des entiers positifs, il s'agit de trouver des classes de fonctions qui envoient les intervalles $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ dans d'autres ensembles finis, les classes ayant des cardinaux égaux aux a_n . L'étude des propriétés géométriques, qui dérivent naturellement de la *structure d'ordre total* des intervalles $[n]$, conduit en général à un raffinement des coefficients a_n ou encore à un résultat "statistique."

Nous nous proposons d'illustrer cet aspect actuel de la combinatoire en prolongeant un résultat dû à notre jeune collègue Dumont [1] sur les nombres de Genocchi. Ceux-ci, notés G_{2n} ($n > 0$), sont des entiers impairs positifs, dont la fonction génératrice exponentielle (ou plus exactement celle des coefficients $(-1)^n G_{2n}$) est donnée par

$$(1) \quad \frac{2u}{e^u + 1} = u + \sum_{n \geq 1} \frac{u^{2n}}{(2n)!} (-1)^n G_{2n}.$$

Ces nombres sont reliés aux *nombres de Bernoulli* B_{2n} ($n > 0$) par la formule

$$(2) \quad G_{2n} = 2(2^{2n} - 1)B_{2n}.$$

Les premières valeurs de ces nombres apparaissent dans le tableau suivant

n	1	2	3	4	5	6	7
G_{2n}	1	1	3	17	155	2073	3827
B_{2n}	1/6	1/30	1/42	1/30	5/66	691/2730	7/6

The original paper has been T_EX-reformatted in March 2023.

Dumont [1] a donné les premières interprétations combinatoires des nombres $(G_{2n})_{n>0}$. Il a, en effet, établi le résultat suivant

(3) Soit A_n l'ensemble des surjections f de $[2n]$ sur $\{2, 4, 6, \dots, 2n\}$, qui sont excédantes, c'est-à-dire qui vérifient l'inégalité $i \leq f(i)$ pour tout $i = 1, 2, \dots, 2n$ ($n > 0$). Alors $\text{Card } A_n = G_{2n+2}$.

Par exemple, A_1 n'a qu'un élément 22 (en n'écrivant que la suite des valeurs prises $f(1), f(2), \dots, f(2n)$ pour toute surjection f). On trouve trois éléments dans A_2 à savoir 2244, 2444, 4244. Enfin A_3 a dix-sept éléments :

224466	224666	246666
244466	226466	264666
424466	244666	266466
	246466	426666
	264466	624666
	424666	626466
	426466	
	624466	

Le prolongement, dans sa forme “abstraite,” du résultat de Dumont s'énonce ainsi

(4) Soit $(F_n(x, y, z))_{n>0}$ une suite de polynômes en trois variables x, y, z définie par la relation de récurrence

$$(5) \quad F_1(x, y, z) = 1 \quad \text{et pour } n \geq 2$$

$$(6) \quad F_n(x, y, z) = (xy + yz + zx) F_{n-1}(x, y, 1 + z) - z^2 F_{n-1}(x, y, z).$$

Alors le polynôme $F_n(x, y, z)$ est symétrique par rapport à l'ensemble des trois variables x, y, z pour tout $n > 0$. De plus

$$(7) \quad F_n(1, 1, 1) = G_{2n+2} \quad (n > 0).$$

Remarquons que la symétrie des polynômes $F_n(x, y, z)$ par rapport à x et y est triviale d'après la forme de la récurrence (6). En revanche, la symétrie par rapport à l'ensemble des variables est loin d'être apparente et c'est justement la forme “concrète” de (4) qui va nous la donner. On peut, en effet, classer les éléments de A_n introduits par Dumont, suivant plusieurs critères et $F_n(x, y, z)$ va apparaître, comme le polynôme énumérateur de A_n suivant ces différents critères, la symétrie étant mise en évidence par deux constructions combinatoires.

Soit f une surjection appartenant à A_n et i un entier de $[2n]$. On dit que i est un *point fixe* de f si $f(i) = i$. L'élément $f(i)$ est dit *saillant* dans f si

l'on a $i = 1$ ou $1 < i \leq 2n$ et $f(j) < f(i)$ pour tout j tel que $1 \leq j < i$. On note $I(f)$ (resp. $K(f)$) le nombre de points fixes (resp. éléments saillants) de f . On désigne par $J(f)$ le nombre de $2n$ -occurrences dans f , c'est-à-dire le nombre d'indices i de $[2n - 1]$ (et non pas $[2n]$) tels que $f(i) = 2n$. La forme "concrète" de (4) est alors :

(8) *La distribution du vecteur (I, J, K) sur A_n est symétrique. De plus, la fonction génératrice de ce vecteur, à savoir*

$$\sum \{x^{I(f)} y^{J(f)} z^{K(f)} : f \in A_n\} :$$

est égale à

$$x y z F_n(x, y, z) \quad (n > 0).$$

Il est clair que (8) implique (4) et qu'en plus de la symétrie, nous obtenons, d'une part, un résultat "statistique" sur l'ensemble A_n , d'autre part, un raffinement des coefficients G_{2n} , à savoir les coefficients des polynômes $F_n(x, y, z)$.

Posons

$$(9) \quad a_{n,i,j,k} = \text{Card} \{f \in A_n : I(f) = i, J(f) = j, K(f) = k\}$$

$(i, j, k, n > 0)$. Pour prouver que le vecteur (I, J, K) est symétrique sur A_n , il suffit d'établir

$$(10) \quad a_{n,i,j,k} = a_{n,k,j,i}$$

et

$$(11) \quad a_{n,i,j,k} = a_{n,j,i,k}$$

pour tout $i, j, k, n > 0$. Pour prouver ensuite que la fonction génératrice de (I, J, K) est donnée par $x y z F_n(x, y, z)$, il suffit d'établir la relation de récurrence suivante

$$(12) \quad a_{1,1,1,1} = 1, \quad a_{1,i,j,k} = 0 \quad \text{si } (i, j, k) \neq (1, 1, 1)$$

et

$$(13) \quad a_{n,i,j,k} = \sum_{k-1 \leq \ell \leq n-1} \binom{\ell-1}{k-1} a_{n-1,i-1,j-1,\ell} \\ + \binom{\ell-1}{k-2} (a_{n-1,i-1,j,\ell} + a_{n-1,i,j-1,\ell}) + \binom{\ell-1}{k-3} a_{n-1,i,j,\ell} \quad (n \geq 2).$$

En effet, un calcul algébrique élémentaire montre que (13) entraîne bien que le polynôme est égal à $x y z F_n(x, y, z)$, où la suite des polynômes

$(F_n(x, y, z))_{n>0}$ est définie par (5) et (6). Etablir la relation de récurrence (13) est assez délicat. Ce résultat sera effectivement démontré dans une publication ultérieure rédigée par Dumont et le présent auteur [2]. Notons que la relation (13) est symétrique en i et j . Par conséquent, (13) entraîne (11). Reste donc à établir (10). Pour ce faire, on construit une bijection $f \mapsto g$ de A_n sur lui-même telle que

$$(14) \quad I(f) = K(g), \quad K(f) = I(g) \quad \text{et} \quad J(f) = J(g).$$

Comme propriété annexe, on vérifie, en plus, que la suite $g(1)g(2) \cdots g(2n)$ est un réarrangement de la suite $f(1)f(2) \cdots f(2n)$, et que les éléments saillants de f s'envoient sur les points fixes de g et réciproquement.

Prenons une surjection f de l'ensemble A_n . Pour tout $i = 1, 2, \dots, 2n$, on pose x_i égal au nombre d'indices j tels que $1 \leq j \leq i$ et $f(j) > f(i)$. Considérons la matrice à deux lignes

$$X = \begin{pmatrix} f(1) & f(2) & \cdots & f(2n) \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{2n} \end{pmatrix}.$$

On peut permuter les colonnes de cette matrice de manière que la première ligne soit le réarrangement croissant de $f(1)f(2) \cdots f(2n)$, disons

$$2^{m_2} 4^{m_4} \cdots (2n)^{m_{2n}} \quad (m_2 + m_4 + \cdots + m_{2n} = 2n).$$

On désigne par

$$P = \begin{pmatrix} 2 & \cdots & 2 & 4 & \cdots & 4 & \cdots & 2n & \cdots & 2n \\ p_{2,1} & \cdots & p_{2,m_2} & p_{4,1} & \cdots & p_{4,m_4} & \cdots & p_{2n,1} & \cdots & p_{2n,m_{2n}} \end{pmatrix}$$

la matrice obtenue, en imposant, en plus, la condition

$$p_{2j,1} < \cdots < p_{2j,m_{2j}} \quad (1 \leq j \leq n).$$

La matrice P constitue le premier codage de f . Les propriétés suivantes sont faciles à vérifier

$$(15) \quad 1 \leq m_{2j} \leq j + 1$$

(dû au fait que f est surjective et excédante);

$$(16) \quad p_{2j,m_{2j}} \leq m_{2j} + \cdots + m_{2n}$$

(dû au fait que le m_{2j} -ième élément $2j$ du mot $f(1)f(2) \cdots f(2n)$ ne peut avoir plus de $m_{2j} + \cdots + m_{2n} - 1$ éléments plus grands que lui et situés sur sa gauche) ($1 \leq j \leq n$).

Par exemple, à la surjection f représentée ci-dessous

$$\begin{pmatrix} i \\ f(i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ \widehat{4} & \underline{2} & \widehat{10} & 6 & 6 & 8 & \widehat{12} & \underline{8} & \widehat{14} & 12 & 12 & 14 & 14 & \underline{14} \end{pmatrix}$$

correspond la matrice

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 10 & 6 & 6 & 8 & 12 & 8 & 14 & 12 & 12 & 14 & 14 & 14 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 4 & 1 & 3 & 4 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

puis, après permutation des colonnes, la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 6 & 6 & 8 & 10 & 12 & 12 & 12 & 14 & 14 & 14 & 14 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 4 & 1 & 1 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

La seconde matrice Q associée à f est construite comme suit. Pour tout $i = 1, 2, \dots, 2n$, on pose y_i égal au nombre d'indices j tels que $i \leq j \leq f(i)$ et $f(j) \geq f(i)$. Cette définition a bien un sens puisque f est excédante. On forme la matrice

$$Y = \begin{pmatrix} f(1) & f(2) & \cdots & f(2n) \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{2n} \end{pmatrix},$$

puis, la transformant par permutation des colonnes, on appelle Q la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & \cdots & 2 & 4 & \cdots & 4 & \cdots & 2n & \cdots & 2n \\ q_{2,1} & \cdots & q_{2,m_2} & q_{4,1} & \cdots & q_{4,m_4} & \cdots & q_{2n,1} & \cdots & q_{2n,m_{2n}} \end{pmatrix}$$

où l'on a encore

$$q_{2j,1} < \cdots < q_{2j,m_{2j}} \quad (1 \leq j \leq n).$$

Dans l'exemple ci-dessus, on a

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} i = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ Y = & \begin{pmatrix} 4 & 2 & 10 & 6 & 6 & 8 & 12 & 8 & 14 & 12 & 12 & 14 & 14 & 14 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \end{array}$$

puis

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 6 & 8 & 8 & 10 & 12 & 12 & 12 & 14 & 14 & 14 & 14 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 4 & 2 & 3 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier de même

$$(17) \quad q_{2j, m_{2j}} \leq m_{2j} + \cdots + m_{2n} \quad (1 \leq j \leq n).$$

Il est clair que partant de P ou de Q , on peut retrouver univoquement la suite $f(1)f(2) \cdots f(n)$.

La bijection $f \mapsto g$ consiste à associer à f la matrice P , puis à trouver la surjection g dont la Q -matrice est égale à P .

Dans l'exemple ci-dessus, la surjection g dont la Q -matrice est

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 6 & 8 & 8 & 10 & 12 & 12 & 12 & 14 & 14 & 14 & 14 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 4 & 1 & 1 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

est donnée par

$$g = \widehat{2} \quad \widehat{8} \quad 6 \quad \underline{4} \quad 6 \quad \widehat{14} \quad 8 \quad 12 \quad 12 \quad \underline{10} \quad 14 \quad \underline{12} \quad 14 \quad \underline{14}$$

La P -matrice de g est :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 6 & 8 & 8 & 10 & 12 & 12 & 12 & 14 & 14 & 14 & 14 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 4 & 2 & 3 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

et on retrouve précisément la Q -matrice de f . Le résultat est général. Notons p et q les applications $p : f \mapsto P$ et $q \mapsto Q$. On a le résultat suivant.

(18) *D'abord $q^{-1}p = p^{-1}q$. Ensuite, l'application $q^{-1}p; f \mapsto g$ est une bijection de A_n sur lui-même ayant les propriétés suivantes*

- (i) $g(1)g(2) \cdots g(2n)$ est un réarrangement de $f(1)f(2) \cdots f(2n)$;
- (ii) si $f(i) = i$ (resp. $f(i)$ saillant dans f), alors g a un élément saillant égal à i (resp. $f(i)$ est point fixe de g).

Nous ne donnons pas ici la preuve de cette proposition. Notons que dans l'exemple traité ci-dessus, où l'on a souligné les points fixes et chapeauté les éléments saillants, les éléments 4, 10, 12, 14 (resp. 2, 8, 14) sont saillants dans f et fixes dans g (resp. fixes dans f et saillants dans g).

Nous terminons par une table des coefficients $a_{n,i,j,k}$ pour les premières Valeurs de n . Rappelons que $a_{n,i,j,k}$ est symétrique en i, j, k . Par conséquent, seules les valeurs $a_{n,i,j,k}$ pour $i \leq j \leq k$ sont données. Notons encore la relation

$$\sum_{i,j,k} a_{n,i,j,k} = G_{n+2},$$

RÉARRANGEMENTS ASSOCIÉS AUX NOMBRES DE GENOCCHI

puis les premières valeurs :

$$\begin{aligned}
 n = 1 : & \ a_{1,111} = 1; \\
 n = 2 : & \ a_{2,122} = 1; \\
 n = 3 : & \ a_{3,123} = 1; \ a_{3,133} = 1; \ a_{3,222} = 2; \ a_{3,223} = 2; \\
 n = 4 : & \ a_{4,123} = 1; \ a_{4,124} = 2; \ a_{4,133} = 4; \ a_{4,134} = 4; \ a_{4,144} = 1; \\
 & \ a_{4,222} = 2; \ a_{4,223} = 8; \ a_{4,224} = 6; \ a_{4,233} = 12; \ a_{4,234} = 3; \\
 & \ a_{4,333} = 6;
 \end{aligned}$$

on vérifie que :

$$\begin{aligned}
 G_4 &= a_{1,111} = 1; \quad G_6 = a_{2,122} = 1; \\
 G_8 &= 3! \times a_{3,123} + 3 \times a_{3,133} + 1 \times a_{3,222} + 3 \times a_{3,223} = 17; \\
 G_{10} &= 3! \times a_{4,123} + 3! \times a_{4,124} + 3 \times a_{4,133} + 3! \times a_{4,134} + 3 \times a_{4,144} \\
 &\quad + 1 \times a_{4,222} + 3 \times a_{4,223} + 3 \times a_{4,224} + 3 \times a_{4,233} + 3! \times a_{4,234} \\
 &\quad + 1 \times a_{4,333} = 155.
 \end{aligned}$$

RÉFÉRENCES

- [1] DUMONT (Dominique). — Interprétations combinatoires des nombres de Genocchi, *Duke Math. J.*, t. **41**, 1974, p. 305-318..
- [2] DUMONT (Dominique) et FOATA (Dominique). — Une propriété de symétrie des nombres de Genocchi, *Bull. Soc. Math. France*, t. **104**, 1976, p. 433-451.

Dominique FOATA
 Département de Mathématique
 Université Louis Pasteur de Strasbourg
 7, Rue René Descartes
 67084 STRASBOURG

Comment added in March 2023

THE DUMONT-FOATA POLYNOMIALS

We owe it to the great number theorist, who also mastered the fields of Special Functions and Combinatorics, Leonard Carlitz, to have christened the polynomials introduced in this paper. I was greatly honored to have

him in the audience, when I addressed the Statistics Colloquium Lecture at the University of North Carolina, Chapel Hill, in the Fall 1974, and did discuss various aspects of the combinatorial study of Genocchi numbers. He told me that he would try to find an expression for the generating function for the polynomials $F_n(x, y, z)$ that would make the three-fold symmetry of the variables more transparent. This led him to write the paper listed [3] below, where he did obtain an explicit formula $F_{n+1}(x, y, z)$ and proved the required symmetry by means of a clever but lengthy calculation.

Surprisingly enough, a long time has elapsed before this study was really pursued. Only in 1992 a new combinatorial approach was made by Han in his doctoral thesis [4] (followed by a published paper [5]). Instead of the triplet (I, J, K) , he introduced the triplet $(\max, \text{fix}, \text{sur})$, where $\max = J$, $\text{fix} = I$ (as they are defined above), and for each surjection f he defines $\text{sur } f$ as the number of i such that $1 \leq i \leq 2n - 2$ and $f(i) = i + 1$. Call these i 's *overfixed*.

He proved that $\sum_{f \in A_n} x^{\max f} y^{\text{fix } f} z^{\text{sur } f} = F_n(x, y, z)$, which allowed him to prove the symmetry in the three variables x, y, z very easily, and of course, $F_n(1, 1, 1) = G_{2n+2}$. He also showed that other configurations of graphs contained in the set $\{(i, 2j) : 1 \leq i \leq 2j \leq 2n\}$ led to the preceding two evaluations.

Inspired by this approach Dumont [6] made three conjectures on a sequence of generating polynomials for six statistics defined on A_n obtained by refining the preceding ones : “max,” “fix” and “sur.”

Given $f \in A_n$, a pair $(i, f(i))$ is said to be *duplicated* if there exists $j \neq i$ such that $f(j) = f(i)$. Let $\text{mi } f$ (resp. $\text{mp } f$) denote the number of pairs $(i, f(i))$ such that i is odd (resp. even) and $(f(i) = 2n)$ (with the exception of $(i, f(i)) = (2n - 1, 2n)$ and $(2n, 2n)$). Also, $\text{fd } f$ (resp. $\text{fnd } f$) designates the number of fixed points of f , which are duplicated (resp. non duplicated). Finally, let $\text{sd } f$ and $\text{snd } f$ be the number of pairs $(i, f(i))$ such that i is overfixed (resp. non overfixed).

Dumont [6] considered the sequence of polynomials $\Gamma_n(x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ defined by

$$\Gamma_n(x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \sum_{f \in A_n} x^{\text{mi } f} y^{\text{fd } f} z^{\text{snd } f} \bar{x}^{\text{mp } f} \bar{y}^{\text{fnd } f} \bar{z}^{\text{sd } f},$$

and proposed three conjectures. First,

$$(18) \quad F_n(x, y, z) = \Gamma_n(x, y, z, x, y, z);$$

second, exact continued fraction expansions of

$$(19) \quad t + (xy + yz + zx)t^2 + \cdots + Fn(x, y, z)t^n + \cdots;$$

and of

$$(20) \quad t + (x\bar{y} + y\bar{z} + z\bar{x})t^2 + \cdots + \Gamma_n(x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})t^n + \cdots;$$

and finally continued fraction expansion of

$$(21) \quad G_n(x, y, z) = \Gamma_n(x, y, z, 1, 1, 1) = \sum_{f \in A_n} x^{\text{mi } f} y^{\text{fd } f} z^{\text{snd } f}.$$

These three conjectures have been independently proved by Randrianarivony [7] and Zeng [8].

Another original combinatorial interpretation of the so-called “generalised Dumont-Foata polynomials” was more recently obtained by Josuat-Vergès [9].

As mentioned by Dumont [6] : “the problem that remains open is to discover a combinatorial model in which the trivariate symmetry is evident. Does there exist such a model in the hexagonal network or in the three-dimensional space?”

- [3] CARLITZ (Leonard). — Explicit Formulas for the Dumont-Foata Polynomial, *Discrete Mathematics*, t. **30**, 1980, p. 211-225.
- [4] HAN (Guo-Niu). — Calcul Denertien, chap. 3, (Symétries trivariées sur les nombres de Genocchi), p. 103-117. Thèse Doctorat, Univ. Strasbourg, 1992, <https://www.mat.univie.ac.at/~slc/book>.
- [5] HAN (Guo-Niu). — Symétries trivariées sur les nombres de Genocchi, *Europ. J. Combinatorics*, t. **7**, 1996, p. 397-407.
- [6] DUMONT (Dominique). — Conjectures sur des symétries ternaires liées aux nombres de Genocchi, *Discrete Mathematics*, t. **39**, 1995, p. 469-472.
- [7] RANDRIANARIVONY (Arthur). — Polynômes de Dumont-Foata généralisés, *Sém. Lothar. Combin.*, t. **32**, 1994, Art. B32d, 12 pp.
- [8] ZENG (Jiang). — Sur quelques propriétés de symétrie des nombres de Genocchi, *Discrete Mathematics*, t. **153**, 1996, p. 319-333.
- [9] JOSUAT-VERGÈS (Matthieu). — Generalized Dumont-Foata Polynomials and Alternative Tableaux. *Sém. Lothar. Combin.*, t. **64**, 2010, Art. B64b, 17 pp.