DISTRIBUTIONS EULÉRIENNES ET MAHONIENNES SUR LE GROUPE DES PERMUTATIONS

Dominique Foata

Département de Mathématique, Université de Strasbourg,
7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg, France

1. INTRODUCTION.

Les nombres <u>eulériens</u> $A_{n,k}$ $(n \geq 1,\ 1 \leq k \leq n)$ sont définis par la relation de récurrence

$$\begin{aligned} &A_{1,1} = 1 \qquad A_{1,k} = 0 \quad \text{pour } k \neq 1 \\ &A_{n,k} = k\,A_{n-1,k} + (n-k+1)\,A_{n-1,k-1} \quad \text{pour } n \geq 2 \text{ et} \\ &1 \leq k \leq n\ . \end{aligned} \tag{1}$$

La table 1 ci-dessous donne les premières valeurs de ces nombres.

n \ k	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	1	4	1			
4	1	11	11	1		
5	1	26	66	26	1	
6	1	57	302	302	57	1

<u>Table 1</u>.

De façon équivalente, ces nombres sont définis par la formule, dite de Worpitzky

$$x^n = \sum_{1 \leq k \leq n} A_{n,k} \binom{x+k-1}{n} \quad (n \geq 1)\ , \tag{2}$$

dont l'inverse (au sens de Möbius) est donnée par

$$A_{n,k} = \sum_{0 \le i \le k} (-1)^i (k-i)^n \binom{n+1}{i} \quad (0 \le k \le n) . \tag{3}$$

Pour tout entier $n \ge 1$ le polynôme

$$A_n(t) = \sum_{1 \le k \le n} A_{n,k}\, t^{k-1}$$

est appelé <u>polynôme eulérien</u> (de degré $n-1$) . La fonction génératrice exponentielle des polynômes $A_n(t)$ $(n \ge 1)$ a pour expression

$$1 + \sum_{n \ge 1} (u^n/n!) A_n(t) = (1-t)/(-t+\exp(u(t-1))) ,$$

qu'on peut encore écrire sous la forme

$$1 + \sum_{n \ge 1} (u^n/n!) A_n(t) = \Big(1 - \sum_{n \ge 1} (u^n/n!)(t-1)^{n-1}\Big)^{-1} . \tag{4}$$

On trouvera dans Carlitz (1959), Riordan [(1958), p. 38-39 & 214-216], ainsi que dans Foata-Schützenberger (1970), les propriétés arithmétiques et combinatoires de ces nombres, en particulier, l'équivalence des formules (1), (2), (3) et (4).

Les nombres <u>mahoniens</u> $B_{n,k}$ $(n \ge 1 , \ 0 \le k \le n(n-1)/2)$ (on me pardonnera ce néologisme à la mémoire du grand combinatoriaiste le major P. A. MacMahon) sont définis par l'identité

$$\sum_{0 \le k \le n(n-1)/2} B_{n,k}\, q^k = \prod_{1 \le i \le n} (1-q^i)/(1-q) \quad (n \ge 1) . \tag{5}$$

En introduisant le q-analogue $[i]_q$ de l'entier $i \ge 1$, à savoir

$$[i]_q = (1-q^i)/(1-q) = 1+q+q^2+\ldots+q^{i-1} , \tag{6}$$

on a ainsi

$$\sum_{0 \le k \le n(n-1)/2} B_{n,k}\, q^k = [n]_q [n-1]_q \ldots [2]_q [1]_q \quad (n \ge 1) .$$

Les premières valeurs de ces nombres sont données dans la table 2 .

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1										
2	1	1									
3	1	2	2	1							
4	1	3	5	6	5	3	1				
5	1	4	9	15	20	22	20	15	9	4	1

<u>Table 2</u> .

On vérifie directement à partir des formules (1) et (5) que l'on a

$$\sum_{1 \le k \le n} A_{n,k} = \sum_{0 \le k \le n(n-1)/2} B_{n,k} = n! \quad (n \ge 1) .$$

On peut donc s'attendre à retrouver ces deux suites de nombres dans divers problèmes d'énumération concernant le groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations de l'intervalle $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, ou tout autre ensemble fonctionnel de cardinal $n!$. Soient D_n un tel ensemble et X une application définie sur D_n à valeurs entières ; on dit que X est une statistique eulérienne (resp. mahonienne) sur D_n , si l'on a

$$A_{n,k} = \text{card}\,\{d \in D_n : X(d) = k\} \quad (1 \le k \le n)$$

$$(\text{resp. } B_{n,k} = \text{card}\{d \in D_n : X(d) = k\} \quad (0 \le k \le n(n-1)/2)) .$$

Soit $\sigma = \sigma(1)\,\sigma(2) \ldots \sigma(n)$ une permutation de la suite $1\,2 \ldots n$. On désigne par $\text{RISE}\,\sigma$ le nombre de montées de σ , c'est-à-dire, avec la convention $\sigma(0) = 0$, le nombre d'indices i tels que $0 \le i \le n-1$ et $\sigma(i) < \sigma(i+1)$. Le nombre d'inversions $\text{INV}\,\sigma$ de σ est défini comme le nombre de couples (i,j) tels que $1 \le i < j \le n$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. Enfin, l'indice majeur $\text{MAJ}\,\sigma$ est la somme de tous les entiers i tels que $1 \le i \le n-1$ et $\sigma(i) > \sigma(i+1)$.

On vérifiera, par exemple, que pour

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix} ,$$

on a

$$\text{RISE}\,\sigma = 5 , \quad \text{INV}\,\sigma = 23 \text{ et } \text{MAJ}\,\sigma = 15 .$$

Il est bien connu (cf. par exemple Riordan (1958), p. 213-216) que RISE est une statistique eulérienne sur $\mathfrak{S}_n$. De même, on sait que INV et MAJ sont tous deux des statistiques mahoniennes sur $\mathfrak{S}_n$ (cf. par exemple, Comtet (1970), p. 81 et p. 108). Notant σ^{-1} la permutation inverse de σ dans le groupe $\mathfrak{S}_n$, on pose

$$\text{IRISE}\,\sigma = \text{RISE}\,\sigma^{-1} \text{ et } \text{IMAJ}\,\sigma = \text{MAJ}\,\sigma^{-1} .$$

On obtient évidemment une nouvelle statistique eulérienne IRISE et une statistique mahonienne IMAJ .

Le présent travail comprend trois parties. Dans la première (la section 2 suivante), on signale un problème resté ouvert entre les interprétations "discrètes" des nombres eulériens et l'interprétation "continue" en termes de découpage du cube unité à n dimensions. On montre, en effet, analytiquement que le rapport $A_{n,k}/n!$

est encore le volume de la portion du cube unité à n dimensions comprise entre les plans $\sum x_i = k-1$ et $\sum x_i = k$. Il s'agit donc de trouver une preuve combinatoire de ce résultat. Le problème, exposé dans la section 2, avait été proposé aux participants du colloque de Berlin. Une solution simple et élégante trouvée par Richard Stanley est reproduite à la fin de cet article.

La seconde partie de l'article (sections 3 et 4) se veut une contribution à l'étude de la distribution du 5-vecteur (RISE, IRISE, INV, MAJ, IMAJ), c'est-à-dire à l'étude de la fonction génératrice multivariée

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum x_1^{\mathrm{RISE}\sigma}\, x_2^{\mathrm{IRISE}\sigma}\, x_3^{\mathrm{INV}\sigma}\, x_4^{\mathrm{MAJ}\sigma}\, x_5^{\mathrm{IMAJ}\sigma} ,$$

la somme étant étendue à l'ensemble de tous les σ dans $\mathfrak{S}_n$. Nous n'avons pas d'expression analytique pour cette fonction génératrice. En revanche, nous montrons que l'on connaît toutes les distributions marginales bivariées, c'est-à-dire la fonction génératrice bivariée de tout couple de statistiques extrait de la suite (RISE, IRISE, INV, MAJ, IMAJ). Dans la section 3, au moyen d'une transformation sur $\mathfrak{S}_n$, déjà introduite dans Foata (1968) et employée dans Foata-Schützenberger (1977a), on montre que ces 20 distributions bivariées se réduisent à 6 distributions. La section 4 se borne à redonner l'expression analytique de ces 6 distributions. On verra, en particulier, que le q-analogue des nombres eulériens trouvé par Carlitz [(1954), (1975)] donne la fonction génératrice bivariée de (RISE, MAJ), mais que le q-analogue des polynômes eulériens imaginé par Stanley (1976a) fournit celle de (IRISE, MAJ).

Pour tout $\sigma = \sigma(1)\,\sigma(2) \ldots \sigma(n)$ dans $\mathfrak{S}_n$ et $i = 1, 2, \ldots, n$, notons x_i le nombre de $\sigma(j)$ à gauche de $\sigma(i)$ qui sont inférieurs à $\sigma(i)$. Puis, désignons par $\mathrm{IMAL}\sigma$ le nombre d'entiers distincts de la suite $x_1\, x_2 \ldots x_n$. Par exemple, pour

$$\sigma = 7\ 9\ 1\ 2\ 8\ 5\ 6\ 3\ 4 \quad , \text{ on a}$$
$$x_1\, x_2 \ldots x_n = 0\ 1\ 0\ 1\ 3\ 2\ 3\ 2\ 3 .$$

D'où $\mathrm{IMAL}\sigma = 4$. Comme vérifié par Dumont (1974), la statistique IMAL est eulérienne. On démontre, dans la dernière partie de l'article, que le couple (IMAL, MAJ) a même distribution sur $\mathfrak{S}_n$ que (IRISE, MAJ) (et encore (RISE, INV)). Pour obtenir ce résultat, nous faisons appel à un codage des permutations, le S-code, dont les propriétés sont systématiquement exploitées dans un article en cours de rédaction (Foata-Schützenberger (1977b)).

Pour décrire les différents algorithmes utilisés, nous nous sommes permis d'utiliser les notations jugées traditionnelles en informatique. Par exemple "$x \leftarrow y$" signifie qu'il faut substituer y à x et on entend par "$x_1\, x_2 \ldots x_n$" $\leftarrow$ "$y_1\, y_2 \ldots y_n$" les

substitutions $x_1 \leftarrow y_1$, $x_2 \leftarrow y_2$, ... , $x_n \leftarrow y_n$.

2. LES STATISTIQUES EULÉRIENNES.

Pour démontrer que RISE, dont la définition a été donnée dans l'introduction, est une statistique eulérienne sur $\mathfrak{S}_n$, on vérifie que le nombre de permutations ayant k montées satisfait bien la relation de récurrence (1) . La démonstration est immédiate.

Pour tout $n \geq 1$, notons D_n l'ensemble des suites $x_1 x_2 \ldots x_n$, de longueur n , telles que $0 \leq x_i \leq i-1$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$. Naturellement card $D_n = n!$. Pour chaque $w = x_1 x_2 \ldots x_n$ dans D_n on désigne par IMA w le nombre d'entiers distincts de la suite $x_1 x_2 \ldots x_n$. C'est Dumont (1974) qui a introduit cette statistique. A l'aide de la relation de récurrence (1) on vérifie immédiatement qu'elle est eulérienne. Dumont (1974) a construit une bijection Φ de $\mathfrak{S}_n$ sur D_n satisfaisant l'identité

$$\text{RISE}\,\sigma = \text{IMA}\,\Phi(\sigma) .$$

Il semble d'ailleurs que pour toutes les statistiques eulériennes E que l'on connaisse et qui sont définies sur des ensembles discrets, on sache construire une bijection Φ satisfaisant identiquement RISE σ = E $\Phi(\sigma)$ (cf. Foata-Schützenberger (1970)) .

Une dernière interprétation géométrique des nombres eulériens se rapportant à un ensemble continu et non plus à un ensemble discret restait jusqu'ici isolé combinatoirement des autres. Considérons le cube unité à n dimensions et pour $1 \leq k \leq n$ notons $T_{n,k}$ la partie de ce cube comprise entre les plans d'équation $\sum_{1 \leq i \leq n} x_i = k-1$ et $\sum_{1 \leq i \leq n} x_i = k$. Pour évaluer le volume de $T_{n,k}$ on peut procéder comme suit. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ une suite de n variables aléatoires, mutuellement indépendantes et uniformément réparties sur l'intervalle $[0,1]$. Posons $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Le volume Vol $T_{n,k}$ est égal à la probabilité pour que S_n soit compris entre $k-1$ et k . Or il est élémentaire de déterminer la fonction de répartition $P\{S_n \leq x\}$ de S_n . Le calcul est fait dans Feller (1966) . Il est déjà implicite dans Laplace (1820). Pour tout x réel posons $x_+ = \max(x, 0)$. On a

$$P\{S_n \leq x\} = (1/n!) \sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^i (x-i)_+^n \binom{n}{i} .$$

Lorsque x est égal à un entier k avec $0 \leq k \leq n$, on obtient

$$P\{S_n \leq k\} = (1/n!) \sum_{0 \leq i \leq k} (-1)^i (k-i)^n \binom{n}{i} .$$

D'où pour $1 \leq k \leq n$

$$\text{Vol } T_{n,k} = P\{k-1<S_n\le k\} = (1/n!)\Big[\sum_{0\le i\le k}(-1)^i(k-i)^n\binom{n}{i} - \sum_{0\le i\le k-1}(-1)^i(k-1-i)\binom{n}{i}\Big]$$

$$= (1/n!)\sum_{0\le i\le k}(-1)^i(k-i)^n\binom{n+1}{i} \ .$$

On retrouve donc l'expression (3) de Worpitzky pour les nombres eulériens. D'où

$$\text{Vol } T_{n,k} = A_{n,k}/n! \quad (1 \le k \le n) \ . \tag{6}$$

Le présent calcul est élémentaire, mais est refait périodiquement (cf. von Randow et al. (1971)). Remarquons que la démonstration de la formule (6) n'a été possible que grâce à la formule de Worpitzky. Le problème qui reste donc ouvert est de prouver (6) à partir de la formule de récurrence (1), ou mieux, en établissant une correspondance biunivoque avec une statistique eulérienne connue. Nous formulons ce problème comme suit. Soit $U_{n,k}$ l'ensemble des points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ du cube unité ayant k montées, c'est-à-dire, avec la convention $x_0 = 0$, tels que l'on ait $x_{i-1} < x_i$ pour exactement k indices i pris dans $[n]$. Toujours à l'aide de la précédente suite de variables aléatoires $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, on voit que le volume de $U_{n,k}$ est encore égal à la probabilité pour que le vecteur $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ appartienne à $U_{n,k}$. Or on a $(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in U_{n,k}$ si et seulement s'il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\text{RISE}\,\sigma = k$ et $X_{\sigma^{-1}(1)} < X_{\sigma^{-1}(2)} < \cdots < X_{\sigma^{-1}(n)}$. D'où

$$\text{Vol } U_{n,k} = \Sigma\{P\{X_{\sigma^{-1}(1)} < X_{\sigma^{-1}(2)} < \cdots < X_{\sigma^{-1}(n)}\} : \text{RISE}\,\sigma = k\}.$$

$$= (1/n!)\ \text{card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \text{RISE}\,\sigma = k\}$$

$$= (1/n!)\ A_{n,k} \qquad (1 \le k \le n) \ .$$

Ainsi

$$\text{Vol } T_{n,k} = \text{Vol } U_{n,k} \qquad (1 \le k \le n) \ . \tag{7}$$

Pour avoir une théorie combinatoire complète de toutes les interprétations des nombres eulériens, il suffit de construire une transformation

$$\Phi : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

du cube unité qui envoie bijectivement le simplexe $U_{n,k}$ sur $T_{n,k}$ pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$.

Ce problème a été posé oralement lors du colloque de Berlin

et Stanley (1976b) a trouvé la transformation simple suivante : pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, on pose

$$y_i = 1 + x_{i-1} - x_i \qquad \text{si } x_{i-1} < x_i$$
$$= x_{i-1} - x_i \qquad \text{si } x_{i-1} > x_i \ .$$

L'inverse de cette transformation est donnée par

$$x_i = - y_1 - \ldots - y_i + 1 + [y_1 + \ldots + y_i]$$

$(1 \leq i \leq n)$. Naturellement, la transformation et son inverse ne sont pas définies sur les faces des simplexes, c'est-à-dire l'ensemble des points ayant au moins deux coordonnées égales, mais ces ensembles sont de mesure nulle.

3. LES DISTRIBUTIONS BIVARIÉES.

Le vecteur (RISE, IRISE, INV, MAJ, IMAJ) comporte deux statistiques eulériennes, RISE et IRISE, ainsi que trois statistiques mahoniennes, INV, MAJ et IMAJ. Parmi les vingt couples qu'on peut former à partir de ces cinq statistiques, on trouve

(I) deux couples dont les composantes sont des statistiques eulériennes (RISE, IRISE) et (IRISE, RISE) ;

(II) six couples dont les composantes sont des statistiques mahoniennes (MAJ, INV), (IMAJ, INV), (IMAJ, MAJ), (MAJ, IMAJ), (INV, IMAJ) et (INV, MAJ) ;

six couples dont la première composante est eulérienne, et la seconde mahonienne, qu'on va partager en deux classes (III) et (IV) :

(III) (RISE, MAJ) et (IRISE, IMAJ) ;

(IV) (RISE, INV), (IRISE, INV), (IRISE, MAJ), (RISE, IMAJ) ;

(V) (resp. (VI)) les deux (resp. quatre) couples obtenus en permutant les composantes dans les deux (resp. quatre) couples du groupe (III) (resp. (IV)) .

THÉORÈME 1. Les couples de statistiques appartenant à un même groupe (I), (II), (III), (IV), (V) ou (VI) ont même distribution.

Pour démontrer ce théorème, nous allons faire appel aux propriétés d'une transformation ψ de $\mathfrak{S}_n$ décrite dans Foata (1968) et Foata-Schützenberger (1977b) . Donnons tout d'abord la construction de ψ .

Algorithme pour ψ .
Soit $\sigma = \sigma(1)\,\sigma(2) \ldots \sigma(n)$ une permutation. Pour obtenir $\psi(\sigma) = \tau = \tau(1)\,\tau(2) \ldots \tau(n)$, on applique à σ la procédure suivante :

(1) si $n = 1$, alors $\tau \leftarrow \sigma$ et l'algorithme est terminé ; sinon $k \leftarrow n-1$; $\sigma_k \leftarrow \sigma(1)\,\sigma(2) \ldots \sigma(n-1)$ et $\tau(n) \leftarrow \sigma(n)$;

(2) si $k = 1$, poser $\tau(1)$ égal à l'unique lettre de σ_1 et $\psi(\sigma) = \tau \leftarrow \tau(1)\,\tau(2) \ldots \tau(n)$; l'algorithme est terminé ; sinon comparer le premier terme $\sigma_k(1)$ de σ_k avec $\tau(k+1)$; si $\sigma_k(1)$ est plus grand (resp. plus petit) que $\tau(k+1)$, couper σ_k avant chaque lettre plus grande (resp. plus petite) que $\tau(k+1)$;

(3) à l'intérieur de chaque compartiment déterminé par les coupures, déplacer la première lettre de la première à la dernière place ;

(4) poser σ_{k-1} égal au mot ainsi transformé après avoir supprimé la dernière lettre ;

(5) poser $\tau(k)$ égal à cette dernière lettre ;

(6) remplacer k par $k-1$ et retourner en (2) .

EXEMPLE. Si on applique ψ à

$$\sigma = 6\ \ 4\ \ 9\ \ 7\ \ 2\ \ 5\ \ 8\ \ 1\ \ 3$$

on obtient successivement

$\sigma_8 = 6\ |\ 4\ |\ 9\ |\ 7\ \ 2\ |\ 5\ |\ 8\ \ \ 1\ .\ 3 \quad = \tau(9)$
$\sigma_7 = 6\ |\ 4\ \ 9\ |\ 2\ |\ 7\ |\ 5\ |\ 1\ .\ 8 \quad = \tau(8)$
$\sigma_6 = 6\ |\ 9\ |\ 4\ |\ 2\ |\ 7\ |\ 5\ .\ 1 \quad = \tau(7)$
$\sigma_5 = 6\ |\ 9\ \ 4\ \ 2\ |\ 7\ .\ 5 \quad = \tau(6)$
$\sigma_4 = 6\ |\ 4\ |\ 2\ \ \ 9\ .\ 7 \quad = \tau(5)$
$\sigma_3 = 6\ |\ 4\ |\ 9\ .\ 2 \quad = \tau(4)$
$\sigma_2 = 6\ |\ 4\ .\ 9 \quad = \tau(3)$
$\sigma_1 = 6\ .\ 4 \quad = \tau(2)$
$6 \quad = \tau(1)$
$\tau = \psi(\sigma) = 6\ \ 4\ \ 9\ \ \ 2\ \ 7\ \ 5\ \ 1\ \ \ 8\ \ 3$

Dans Foata (1968) on a démontré que ψ était une bijection de $\mathfrak{S}_n$ sur lui-même et satisfaisait l'identité

$$\mathrm{MAJ}\,\psi(\sigma) = \mathrm{INV}\,\sigma \ . \qquad (8)$$

Dans l'exemple précédent

$$\mathrm{INV}\,\sigma = 23 = \mathrm{MAJ}\,\tau \ .$$

Dans Foata-Schützenberger (1977a) une autre propriété de la transformation ψ a été établie. Notons $\mathrm{RISE\ SET}\,\sigma$ l'ensemble des montées d'une permutation $\sigma = \sigma(1)\,\sigma(2)\ldots\sigma(n)$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers i tels que $0 \le i \le n-1$ et $\sigma(i) < \sigma(i+1)$ (avec toujours la convention $\sigma(0) = 0$). On pose aussi

$$\mathrm{IRISE\ SET}\,\sigma = \mathrm{RISE\ SET}\,\sigma^{-1} \ ,$$

de sorte que $\mathrm{RISE}\,\sigma$ et $\mathrm{IRISE}\,\sigma$ sont respectivement les cardinaux de $\mathrm{RISE\ SET}\,\sigma$ et $\mathrm{IRISE\ SET}\,\sigma$. Par ailleurs MAJ (resp. IMAJ) est la somme des entiers compris entre 1 et n-1 qui n'appartiennent pas à $\mathrm{RISE\ SET}\,\sigma$ (resp. $\mathrm{IRISE\ SET}\,\sigma$). Il est immédiat que i appartient à $\mathrm{IRISE\ SET}\,\sigma$ si et seulement si $i+1$ est à la droite de i dans le mot $\sigma(1)\,\sigma(2)\ldots\sigma(n)$.

Par exemple, avec

$$\sigma = \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 6 & 4 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{matrix}$$

on a $\mathrm{RISE\ SET}\,\sigma = \{0, 2, 5, 6, 8\}$
et $\mathrm{IRISE\ SET}\,\sigma = \{0, 2, 4, 6, 7\}$.

On démontre (cf. Foata-Schützenberger (1977a)) que l'on a identiquement dans $\mathfrak{S}_n$

$$\mathrm{IRISE\ SET}\,\psi(\sigma) = \mathrm{IRISE\ SET}\,\sigma \ .$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \mathrm{IRISE}\ \psi(\sigma) &= \mathrm{IRISE}\,\sigma \\ \mathrm{IMAJ}\ \psi(\sigma) &= \mathrm{IMAJ}\,\sigma \end{aligned} \qquad (9)$$

Posons $i\,\sigma = \sigma^{-1}$ pour tout σ dans $\mathfrak{S}_n$ et considérons la suite

$$\sigma \overset{i}{\leftrightarrow} \sigma_1 \overset{\psi}{\rightarrow} \sigma_2 \overset{i}{\leftrightarrow} \sigma_3 \overset{\psi^{-1}}{\rightarrow} \sigma_4 \overset{i}{\leftrightarrow} \sigma_5 \qquad (10)$$

On déduit de (8) et de (9), et du fait bien connu que i conserve le nombre des inversions d'une permutation, les égalités

$$\mathrm{MAJ}\sigma = \mathrm{IMAJ}\sigma_1 = \mathrm{IMAJ}\sigma_2 = \mathrm{MAJ}\sigma_3 = \mathrm{INV}\sigma_4 = \mathrm{INV}\sigma_5$$
$$\mathrm{INV}\,\sigma = \mathrm{INV}\ \sigma_1 = \mathrm{MAJ}\,\sigma_2 = \mathrm{IMAJ}\sigma_3 = \mathrm{IMAJ}\sigma_4 = \mathrm{MAJ}\sigma_5$$
$$\mathrm{RISE}\sigma = \mathrm{IRISE}\sigma_1 = \mathrm{IRISE}\sigma_2 \ ; \qquad \mathrm{RISE}\sigma_4 = \mathrm{IRISE}\sigma_5$$

La suite (10) donne toutes les transformations utiles pour

établir le théorème 1 .

Q. E. D.

Les distributions des couples des groupes (V) et (VI) se ramènent, par symétrie, à celles des couples des groupes (III) et (IV) (respectivement). Il n'y a donc que quatre distributions marginales bivariées distinctes, celles des groupes (I), (II), (III) et (IV) . Leur expression analytique est connue, comme nous allons le voir dans la prochaine section.

4. EXPRESSIONS ANALYTIQUES DES DISTRIBUTIONS MARGINALES.

Carlitz et al. (1966) ont obtenu plusieurs expressions analytiques pour la distribution de (RISE, IRISE) (groupe (I)) . Aux quatre formules (1), (2), (3) et (4) existant pour les nombres eulériens, ils ont pu associer quatre formules pour les nombres

$$A_{n,j,k} = \text{card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \text{RISE}\sigma = j,\ \text{IRISE}\sigma = k\} .$$

D'après Carlitz et al. (1966), aux formules (1), (2), (3) et (4) correspondent les formules (11), (12), (13) et (14) suivantes :

$$(n+1)A_{n+1,j,k} = (jk+n)A_{n,j,k} + (k(n+2-j)-n)A_{n,j-1,k} + (j(n+2-k)-n)A_{n,j,k-1} + ((n+2-j)(n+2-k)+n)A_{n,j-1,k-1} \tag{11}$$

$$\binom{xy+n-1}{n} = \sum_{0\le j,k\le n} \binom{x+j-1}{n}\binom{y+k-1}{n} A_{n,j,k} \tag{12}$$

$$A_{n,j,k} = \sum_{0\le s\le j}\ \sum_{0\le t\le k} (-1)^{s+t}\binom{n+1}{s}\binom{n+1}{t}\binom{(j-s)(k-t)+n-1}{n} \tag{13}$$

$$\sum_{n\ge 0}\ \sum_{j,k\ge 0} A_{n,j,k}\, x^j y^k u^n (1-x)^{-n}(1-y)^{-n} = \tag{14}$$

$$= \sum_{j\ge 0} y^j/(1-x(1-u)^{-j})$$
$$= \sum_{k\ge 0} x^k/(1-y(1-u)^{-k}) .$$

Considérons l'identité

$$\prod_{m,n\ge 0} (1-x^n y^m u) = \sum_{n\ge 0} H_n(x,y)u^n/((1-x)(1-y)\ldots(1-x^n)(1-y^n))$$

D'après Carlitz (1956), cette identité définit une suite de polynômes

$H_n(x, y)$ $(n \geq 0)$. Cheema et Motzkin (1971), et de nouveau Roselle (1974) ont montré que pour tout $n \geq 1$ le polynôme $H_n(x, y)$ était le polynôme générateur de (MAJ, IMAJ) sur $\mathfrak{S}_n$. D'après le théorème 1 on conclut que $H_n(x, y)$ est aussi le polynôme générateur de chacun des couples du groupe (II), en particulier de (MAJ, INV).

Carlitz (1954, 1975) a considéré le q-analogue de la relation de récurrence (1) des nombres eulériens. En remplaçant donc l'entier k par son q-analogue $[k]_q = (1-q^k)/(1-q)$, on définit une suite de polynômes $A_{n,k}(q)$ définis par

$$A_{1,1}(q) = 1 \qquad A_{1,k}(q) = 0 \quad \text{pour } k \neq 1$$

$$A_{n,k}(q) = [k]_q A_{n-1,k}(q) + [n-k+1]_q A_{n-1,k-1}(q) \quad \text{pour } n \geq 2$$

et $1 \leq k \leq n$.
Posant

$$A_n(t, q) = \sum_{1 \leq k \leq n} t^k \, q^{\binom{n-k+1}{2}} A_{n,k}(q) \quad (n \geq 1) \ ,$$

Carlitz (1975) a montré ensuite que $A_n(t, q)$ était le polynôme générateur de (RISE, MAJ) sur $\mathfrak{S}_n$. Une table des premières valeurs est donnée à la fin de cette section.

Par ailleurs, Stanley (1976a) a considéré le q-analogue non pas de la formule (1), mais de la formule (4) qui donne l'expression de la fonction génératrice des polynômes eulériens. Remplaçant dans cette formule $n!$ par son q-factoriel

$$[n]_q! = \frac{1-q^n}{1-q} \, \frac{1-q^{n-1}}{1-q} \cdots \frac{1-q}{1-q} \ ,$$

on obtient l'identité

$$1 + \sum_{n \geq 1} A'_n(t, q) \, u^n/[n]_q! = \Big(1 - \sum_{n \geq 1} (t-1)^{n-1} \, u^n/[n]_q!\Big)^{-1} \ ,$$

qui définit une suite de polynômes $(A'_n(t, q))_{n \geq 1}$. (On trouvera les premières valeurs ci-après.)
Stanley (1976) établit que $tA'_n(t, q)$ est le polynôme générateur de (RISE, INV) sur $\mathfrak{S}_n$. D'après le théorème 1, $tA'_n(t, q)$ est donc aussi le polynôme générateur de chacun des couples du groupe (IV), en particulier, de (IRISE, MAJ).

D'après le théorème 1 et les résultats de cette section, nous avons donc une expression pour la fonction génératrice bivariée de tous les couples de statistiques de la suite

(RISE, IRISE, INV, MAJ, IMAJ).

$$A_1(t,q) = t$$
$$A_2(t,q) = tq+t^2$$
$$A_3(t,q) = tq^3+t^2q(2q+2)+t^3$$
$$A_4(t,q) = tq^6+t^2q^3(3q^2+5q+3)+t^3q(3q^2+5q+3)+t^4$$
$$A_5(t,q) = tq^{10}+t^2q^6(4q^3+9q^2+9q+4)+t^3q^3(6q^4+16q^3+22q^2+16q+6)$$
$$+t^4q(4q^3+9q^2+9q+4)+t^5$$

Table des $A_n(t,q)$.

$$tA'_1(t,q) = t$$
$$tA'_2(t,q) = tq+t^2$$
$$tA'_3(t,q) = tq^3+t^2q(2q+2)+t^3$$
$$tA'_4(t,q) = tq^6+t^2(3q^5+4q^4+3q^3+q^2)+t^3(q^4+3q^3+4q^2+3q)+t^4$$
$$tA'_5(t,q) = tq^{10}+t^2(4q^9+6q^8+6q^7+6q^6+2q^5+2q^4)$$
$$+t^3(3q^8+9q^7+12q^6+18q^5+12q^4+9q^3+3q^2)$$
$$+t^4(2q^6+2q^5+6q^4+6q^3+6q^2+4q)+t^5$$

Table des $tA'_n(t,q)$.

Aucune fonction génératrice marginale trivariée ou quadrivariée de la distribution de ce vecteur semble connue. Notons que Foata et Schützenberger (1977a) ont étudié les symétries de la distribution du 4-vecteur (RISE, IRISE, MAJ, IMAJ) et montré que le groupe de symétrie sous-jacent était le produit direct du groupe dihédral d'ordre 8 par le groupe d'ordre 2 .

D'après le théorème 1, les couples (RISE, INV) et (IRISE, MAJ) ont même distribution. On ne connaît pas de statistique eulérienne E telle que (E, INV) et (RISE, MAJ) aient même distribution.

5. LE V-CODE.

La statistique eulérienne IMAL sur $\mathfrak{S}_n$ a été définie dans l'introduction. On se propose d'établir dans les trois dernières sections que les couples (IMAL, MAJ) et (IRISE, MAJ) ont même distribution sur $\mathfrak{S}_n$. Pour ce faire, nous définissons un V-code de $\mathfrak{S}_n$, puis un S-code (dans la section 6), qui est un réarrangement du V-code. Enfin, le résultat annoncé sera établi comme corollaire des propriétés du S-code, en section 7 .

Le V-code de $\sigma = \sigma(1)\,\sigma(2)\ldots\sigma(n)$ est un mot $V\sigma = v_1v_2\ldots v_n$ tel que pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$ la lettre v_i est égale à

la position du plus grand entier $\sigma(j)$, inférieur à $\sigma(i)$ et situé à la gauche de $\sigma(i)$ (on convient toujours que $\sigma(0) = 0$ est en position 0). En d'autres termes, si $a_i = \max\{\sigma(j) : 0 \le j \le i-1,\ \sigma(j) < \sigma(i)\}$, alors v_i est l'unique entier tel que $\sigma(v_i) = a_i$.

La définition du V-code s'étend aux sous-mots des permutations $\sigma(1)\,\sigma(2) \ldots \sigma(n)$, c'est-à-dire aux suites $\sigma' = \sigma(c_1)\sigma(c_2)\ldots\sigma(c_k)$ telles que $k \ge 1$ et $1 \le c_1 < c_2 < \ldots < c_k \le n$. En posant $\sigma(c_0) = 0$ et $a'_i = \max\{\sigma(c_j) : 0 \le j \le i-1,\ \sigma(c_j) < \sigma(c_i)\}$, le V-code de σ' est $V\sigma' = v_1\, v_2 \ldots v_k$ avec v_i l'unique entier tel que $\sigma(c_{v_i}) = a'_i$.

Par exemple avec

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ & 5 & 7 & 1 & 4 & 6 & 3 & 9 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

on a

$$V\sigma = 0\ 1\ 0\ 3\ 1\ 3\ 2\ 3\ 2\ .$$

Pour le sous-mot

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 5 & 8 & 9 \\ & 7 & 4 & 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

on a

$$V\sigma' = 0\ 0\ 2\ 0\ 1\ .$$

Rappelons qu'une avance de σ est un entier i tel que $0 \le i \le n-1$ et tel que $\sigma(i)+1$ est à la droite de $\sigma(i)$. On note $A\sigma$ l'ensemble des avances de σ. Naturellement $\mathrm{IRISE}\,\sigma = \mathrm{card}\, A\sigma$.

Par exemple, avec

$$\sigma = \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 1 & 4 & 6 & 3 & 9 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

on a $A\sigma = \{0, 1, 2, 3\}$.

Il est clair que si σ est dans $\mathfrak{S}_n$, alors $V\sigma$ appartient à l'ensemble D_n de tous les mots $x_1\, x_2 \ldots x_n$ tels que $0 \le x_i \le i-1$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$. De plus, l'ensemble des lettres distinctes de $V\sigma$ est égal à l'ensemble des avances de σ. Comme le cardinal de $A\sigma$ est encore égal à $\mathrm{IRISE}\,\sigma$, on a

$$\mathrm{IMA}\, V\sigma = \mathrm{IRISE}\,\sigma\ . \qquad (15)$$

Pour se convaincre que $V : \mathfrak{S}_n \to D_n$ est bien bijectif, on donne tout de suite la construction de l'inverse V^{-1} de V.

Algorithme pour V^{-1}. Soit $w = x_1\, x_2 \ldots x_n$ un mot de D_n. Pour obtenir la permutation σ telle que $V\sigma = w$, on applique la procédure suivante :

(1) $\sigma(0) \leftarrow 0$; $\sigma(1) \leftarrow 1$; si $n = 1$, l'algorithme est terminé ; sinon $k \leftarrow 2$;

(2) $\sigma(k) \leftarrow \sigma(x_k)+1$ et incrémenter de 1 tous les éléments de la suite $\sigma(0)\,\sigma(1)\,\sigma(2) \ldots \sigma(k-1)$ qui sont supérieurs ou égaux à $\sigma(k)$ et laisser invariants les autres ;

(3) si $k = n$, l'algorithme est terminé ; sinon remplacer k par $k+1$ et aller en (2) .

Les deux propriétés suivantes du V-code sont essentielles pour la construction du S-code.

PROPRIÉTÉ 1. Soit $V\sigma = v_1 v_2 \ldots v_n$ le V-code d'une permutation $\sigma = \sigma(1)\,\sigma(2) \ldots \sigma(n)$. On pose $x = \max\{v_i : 1 \le i \le n\}$ et on note $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ (resp. $(d_1, d_2, \ldots, d_\ell)$) la suite croissante des entiers m tels que $v_m < x$ (resp. $v_m = x$) . Alors

$$\sigma(d_1) = \sigma(x)+\ell+1,\ \sigma(d_2) = \sigma(x)+\ell,\ \sigma(d_3) = \sigma(x)+\ell-1, \ldots,$$
$$\sigma(d_{\ell-1}) = \sigma(x)+2,\ \sigma(d_\ell) = \sigma(x)+1 \ .$$

De plus, le V-code du sous-mot $\sigma' = \sigma(c_1)\,\sigma(c_2) \ldots \sigma(c_k)$ est égal à $V\sigma' = v_{c_1} v_{c_2} \ldots v_{c_k}$.

La vérification de la propriété 1 ne présente aucune difficulté et n'est pas reproduite ici. Illustrons cette propriété avec l'exemple donné précédemment. On a

$$\begin{array}{rl}
 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \\
\sigma = & \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 & 4 & 6 & 3 & 9 & 2 & 8 \end{pmatrix} . \\
V\sigma = & 0\ 1\ 0\ 3\ 1\ 3\ 2\ 3\ 2 \\
x = & 3 \\
c_1 \ldots c_k = & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & . & 5 & . & 7 & . & 9 \end{pmatrix} \\
\sigma' = & \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 & . & 6 & . & 9 & . & 8 \end{pmatrix} \\
\sigma(x) = & 1 \\
d_1 \ldots d_\ell = & .\ .\ .\ 4\ .\ 6\ .\ 8\ . \\
\sigma(d_1) \ldots \sigma(d_\ell) = & .\ .\ .\ 4\ .\ 3\ .\ 2\ . \\
\text{et} \quad V\sigma' = & 0\ 1\ 0\ .\ 1\ .\ 2\ .\ 2 \ ,
\end{array}$$

qui est égal à $v_{c_1} v_{c_2} \ldots v_{c_k}$.

La propriété suivante est une conséquence immédiate de la propriété 1 .

PROPRIÉTÉ 2. Soient w et w' deux mots de D_n ne différant que par la position de leurs lettres maximales. En d'autres termes, supposons

$$w = v_1 \ldots v_{d_1-1} x v_{d_1+1} \ldots v_{d_\ell-1} x v_{d_\ell+1} \ldots v_n$$

$$w' = v'_1 \cdots v'_{d'_1-1}\, x\, v'_{d'_1+1} \cdots v'_{d'_\ell-1}\, x\, v'_{d'_\ell+1} \cdots v'_n ,$$

avec

$$v_1 \cdots v_{d_1-1} v_{d_1+1} \cdots v_{d_\ell-1} v_{d_\ell+1} \cdots v_n$$
$$= v'_1 \cdots v'_{d'_1-1} v'_{d'_1+1} \cdots v'_{d'_\ell-1} v'_{d'_\ell+1} \cdots v'_n ,$$

ce dernier mot ne contenant que des lettres inférieures à x. Alors, avec $\sigma = V^{-1}w$ et $\sigma' = V^{-1}w'$, on a

$$\sigma(d_1) = \sigma'(d'_1),\ \sigma(d_2) = \sigma'(d'_2), \ldots, \sigma(d_\ell) = \sigma'(d'_\ell) .$$

6. LE S-CODE.

Pour tout $w = x_1 x_2 \cdots x_n$ appartenant à D_n, on note RISE SETw l'ensemble des montées de w, c'est-à-dire des indices i tels que $0 \le i \le n-1$ et $x_i < x_{i+1}$ (par convention : $x_0 = 0$). D'après (15) on a IMA $V\sigma$ = IRISEσ. En revanche RISE SET $V\sigma$ n'est pas forcément égal à RISE SETσ. Pour rétablir cette propriété, il suffit d'obtenir un réarrangement approprié de $V\sigma$, la propriété (15) étant évidemment conservée par tout réarrangement. Nous nous proposons donc d'établir le théorème suivant

THÉORÈME 2. Il existe une bijection $S : \mathfrak{S}_n \to D_n$ telle que si

$$S\sigma = s_1 s_2 \cdots s_n \quad \text{et} \quad V\sigma = v_1 v_2 \cdots v_n ,$$

on a les propriétés suivantes

(i) $S\sigma$ est un réarrangement de $V\sigma$
(ii) RISE SET $S\sigma$ = RISE SET σ .

Construction du S-code. On procède par récurrence sur n. Pour $n = 1$ on pose évidemment $S\sigma = V\sigma = 0$ pour l'unique permutation σ dans $\mathfrak{S}_1$. Soient $n \ge 2$ et $V\sigma = v_1 v_2 \cdots v_n$ le V-code d'une permutation $\sigma = \sigma(1)\,\sigma(2) \cdots \sigma(n)$. On pose $x = \max\{v_i : 1 \le i \le n\}$ et on note $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ (resp. $(d_1, d_2, \ldots, d_\ell)$) la suite croissante des indices m tels que $v_m < x$ (resp. $v_m = x$). Soit $t_{c_1} t_{c_2} \cdots t_{c_k}$ le S-code de $\sigma(c_1)\,\sigma(c_2) \ldots \sigma(c_k)$. On forme le mot

$$w = t_1 t_2 \cdots t_n$$
$$= t_1 \cdots t_{d_1-1}\, x\, t_{d_1+1} \cdots t_{d_2-1}\, x\, t_{d_2+1} \cdots t_{d_\ell-1}\, x\, t_{d_\ell+1} \cdots t_n .$$

Le S-code $s_1 s_2 \cdots s_n$ de $\sigma = \sigma(1)\,\sigma(2) \cdots \sigma(n)$ est obtenu par la procédure suivante :

(1) $s_1 s_2 \cdots s_{d_1-1} \leftarrow t_1 t_2 \cdots t_{d_1-1}$;

$\sigma(n+1) \leftarrow 0$; $d_{\ell+1} \leftarrow n+1$; $j \leftarrow 1$;

(2) $m \leftarrow d_j$;

(3) si $\sigma(m) > \sigma(m-1)$ et $\sigma(m+1)$,
alors

$$s_m s_{m+1} \cdots s_{d_{j+1}-1} \leftarrow x\, t_{m+1} \cdots t_{d_{j+1}-1}$$

et aller en (6) ;

(4) si $\sigma(m) < \sigma(m-1) < \sigma(m+1)$ et $s_{m-1} < t_{m+1}$, ou si $\sigma(m-1) > \sigma(m) > \sigma(m+1)$, noter q la position du pic le plus voisin de m et situé à sa gauche ; autrement dit, q est défini par les inégalités

$$1 \leq q \leq m-1,\ \sigma(q-1) < \sigma(q),\ \sigma(q) > \sigma(q+1) > \ldots > \sigma(m-1) > \sigma(m) ;$$

alors

$$s_q s_{q+1} s_{q+2} \cdots s_{m-1} s_m s_{m+1} \cdots s_{d_{j+1}-1}$$
$$\leftarrow x\, s_q s_{q+1} \cdots s_{m-2} s_{m-1} t_{m+1} \cdots t_{d_{j+1}-1}$$

et aller en (6) ;

(5) (dans les autres cas) noter q la position du pic le plus voisin de m et situé à sa droite ; autrement dit, q est l'entier défini par $m+1 \leq q \leq n$,

$$\sigma(m) < \sigma(m+1) < \ldots < \sigma(q) \quad \text{et} \quad \sigma(q) > \sigma(q+1) ;$$

alors

$$s_m s_{m+1} \cdots s_{q-1} s_q s_{q+1} \cdots s_{d_{j+1}-1}$$
$$\leftarrow t_{m+1} t_{m+2} \cdots t_q x t_{q+1} \cdots t_{d_{j+1}-1} ;$$

(6) si $j = \ell$ l'algorithme est terminé et on pose

$$S\sigma \leftarrow s_1 s_2 \cdots s_n ;$$

sinon incrémenter j de 1 et aller en (2) .

REMARQUE 1. L'instruction (5) de l'algorithme précédent est bien définie. En effet, on a $\sigma(m) = \sigma(d_j) > \sigma(d_{j+1})$ d'après la propriété 1 . Les inégalités $\sigma(m) < \sigma(m+1) < \ldots < \sigma(q)$ entraînent donc $(m=)d_j < q < d_{j+1}$.

REMARQUE 2. On vérifie que $S\sigma$ appartient bien à D_n en s'assurant qu'à chaque étape, les s_i que l'on définit satisfont $s_i \leq i-1$.

REMARQUE 3. Le fait que

RISE SET $S\sigma$ = RISE SET $T\sigma$

se vérifie sans difficulté lors de l'application de chaque instruction (3), (4) et (5) .

REMARQUE 4. Si le V-code d'une permutation σ ne contient que des lettres au plus égales à 1 , on a $S\sigma = V\sigma$.

REMARQUE 5. Soient $V\sigma = v_1 v_2 \ldots v_n$ le V-code d'une permutation $\sigma = \sigma(1)\,\sigma(2) \ldots \sigma(n)$ et $x = \max\{v_i : 1 < i \leq n\}$. Pour chaque $i = 1, 2, \ldots, x$, on note $c_1^i, c_2^i, \ldots, c_{ki}^i$ la suite croissante des indices m tels que $v_m \leq i$ et σ_i le sous-mot $\sigma_i = \sigma(c_1^i)\,\sigma(c_2^i) \ldots \sigma(c_{ki}^i)$. Pour appliquer l'algorithme précédent, on détermine successivement $S\sigma_i$ pour chaque $i = 1, 2, \ldots, x$.

Dans l'exemple suivant, on a indiqué la suite des instructions de l'algorithme (notées de I1 à I6) seulement pour la détermination de $S\sigma_3$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
σ =	9	11	3	10	2	8	7	14	13	6	5	1	4	12	
$V\sigma$ =	0	1	0	1	0	3	3	2	2	3	3	0	3	2	
$S\sigma_1$ =	0	1	0	1	0	.	.	.	.	.	.	0	.	.	
$S\sigma_2$ =	0	1	0	1	0	.	.	2	2	.	.	0	.	2	
w =	0	1	0	1	0	3	3	2	2	3	3	0	3	2	
$s_1 \ldots s_5$ =	0	1	0	1	0										(I1)
$s_1 \ldots s_6$ =	0	1	0	1	0	3									(I3)
$s_1 \ldots s_9$ =	0	1	0	1	0	3	2	3	2						(I5)
$s_1 \ldots s_{10}$ =	0	1	0	1	0	3	2	3	3	2					(I4)
$s_1 \ldots s_{11}$ =	0	1	0	1	0	3	2	3	3	3	2	0			(I4)
$S\sigma$ =	0	1	0	1	0	3	2	3	3	3	2	0	2	3	(I5)

Nous donnons ci-après la construction de l'inverse S^{-1} de S . Il est fastidieux mais facile de vérifier que $S^{-1} \circ S$ est l'application identique. Dans la description de S^{-1} on verra que la propriété 2 du V-code joue un rôle crucial.

<u>Algorithme pour</u> S^{-1} . Soient $w = s_1 s_2 \ldots s_n$ un mot de D_n et $x = \max\{s_i : 1 \leq i \leq n\}$. On note $d_1, d_2, \ldots, d_\ell$ les indices i tels que $s_i = x$. Le mot $w' = s_1 \ldots s_{d_1 - 1} s_{d_1 + 1} \ldots s_{d_{\ell - 1}} s_{d_\ell + 1} \ldots s_n$ est, par récurrence, le S-code d'une permutation σ' dont le V-code est un réarrangement de w', qu'on note

$$v' = v_1 \cdots v_{d_1-1} v_{d_1+1} \cdots v_{d_\ell-1} v_{d_\ell+1} \cdots v_n \ .$$

Formons le mot

$$v = v_1 v_2 \cdots v_n$$
$$= v_1 \cdots v_{d_1-1} \times v_{d_1+1} \cdots v_{d_\ell-1} \times v_{d_\ell+1} \cdots v_n \ ,$$

et déterminons la permutation

$\tau = \tau(1)\ \tau(2) \ldots \tau(n)$ dont le V-code est v .

Pour obtenir la permutation $\sigma = \sigma(1)\ \sigma(2) \ldots \sigma(n)$ dont le S-code est w , on applique la procédure suivante :

(1) $\sigma(d_\ell+1)\ \sigma(d_\ell+2) \ldots \sigma(n) \leftarrow \tau(d_\ell+1)\ \tau(d_\ell+2) \ldots \tau(n)$; $\sigma(0) \leftarrow 0$; $\sigma(n+1) \leftarrow 0$; $d_0 \leftarrow 0$; $j \leftarrow \ell$;

(2) $m \leftarrow d_j$;

(3) si $\tau(m) > \tau(m-1)$ et $\sigma(m+1)$, alors

$$\sigma(d_{j-1}+1)\sigma(d_{j-1}+2)\ldots\sigma(m-1)\sigma(m) \leftarrow \tau(d_{j-1}+1)\tau(d_{j-1}+2)\ldots\tau(m-1)\tau(m)$$

et aller en (6) ;

(4) si $\tau(m-1)$ et $\tau(m) < \sigma(m+1)$,
on note p le plus petit indice tel que $m+1 \le p \le n$ et $\sigma(m+1) > \sigma(m+2) > \ldots > \sigma(p-1) > \sigma(p) > \tau(m)$; et l'on pose

$$\sigma(d_{j-1}+1)\sigma(d_{j-1}+2)\ldots\sigma(m-1)\sigma(m)\sigma(m+1)\ldots\sigma(p-1)\sigma(p)$$

égal à

$$\tau(d_{j-1}+1)\tau(d_{j-1}+2)\ldots\tau(m-1)\sigma(m+1)\sigma(m+2)\ldots\sigma(p)\tau(m)$$

et aller en (6) ;

(5) si $\tau(m-1) > \tau(m)$ et $\sigma(m+1)$,
alors $\sigma(m) \leftarrow \tau(m)$ si $d_{j-1} = m-1$; sinon, on note p le plus petit indice tel que $d_{j-1}+1 \le p \le m-1$ et $\tau(m) < \tau(p) < \tau(p+1) < \ldots < \tau(m-1)$; et l'on pose

$$\sigma(d_{j-1}+1)\sigma(d_{j-1}+2)\ldots\sigma(p-1)\sigma(p)\sigma(p+1)\ldots\sigma(m-1)\sigma(m)$$

égal à

$$\tau(d_{j-1}+1)\tau(d_{j-1}+2)\ldots\tau(p-1)\tau(m)\tau(p)\ldots\tau(m-2)\tau(m-1) \ ;$$

(6) si $j = 1$, l'algorithme est terminé et on pose

$$S^{-1}w \leftarrow \sigma(1)\ \sigma(2) \ldots \sigma(n) \ ;$$

sinon décrémenter j de 1 et aller en (2) .

Conservons les mêmes notations que dans la description de l'algorithme pour S^{-1}, à la différence que nous écrivons $w = s(1)\, s(2) \ldots s(n)$ au lieu de $s_1\, s_2 \ldots s_n$. Désignons de plus par $c_1^i\, c_2^i \ldots c_{ki}^i$ la suite croissante des indices m tels que $s(m) \leq i$ $(i = 1, 2, \ldots, x)$. Pour obtenir $\sigma = S^{-1}w$, on détermine successivement $\sigma_i' = S\text{-}1\ s(c_1^i)\, s(c_2^i) \ldots s(c_{ki}^i)$ en utilisant l'algorithme précédent, pour $i = 1, 2, \ldots, x$. Naturellement $\sigma_x' = \sigma$. Ce procédé est utilisé dans l'exemple suivant.

EXEMPLE.

$w =$	0	1	0	1	0	3	2	3	3	3	2	0	2	3	
$v_1 =$	0	1	0	1	0	.	.	.	.	.	.	0	.	.	
$\tau_1 = \sigma_1' =$	4	6	3	5	2	.	.	.	.	.	.	1	.	.	
$v_1 = v_1' =$	0	1	0	1	0	.	.	.	.	.	.	0	.	.	
$v_2 =$	0	1	0	1	0	.	2	.	.	.	2	0	2	.	
$\tau_2 =$	4	6	3	5	2	.	9	.	.	.	8	1	7	.	
$\sigma_2' =$	4	6	3	5	2	.	9	.	.	.	8	1	7	.	
$v_2' =$	0	1	0	1	0	.	2	.	.	.	2	0	2	.	
$v_3 =$	0	1	0	1	0	3	2	3	3	3	2	0	2	3	
$\tau_3 =$	9	11	3	10	2	8	14	7	6	5	13	1	12	4	
											13	1	4	12	(I5)
										13	5	1	4	12	(I4)
									13	6	5	1	4	12	(I4)
							7	14	13	6	5	1	4	12	(I5)
$\sigma_3' =$	9	11	3	10	2	8	7	14	13	6	5	1	4	12	(I3)

$\sigma = S^{-1}w = \sigma_3'$.

7. LA STATISTIQUE EULÉRIENNE IMAL.

Rappelons que le **Lehmer-code** d'une permutation $\sigma = \sigma(1)\, \sigma(2) \ldots \sigma(n)$ est la suite $L\sigma = x_1\, x_2 \ldots x_3$ définie par

$$x_i = \text{card}\, \{j : 1 \leq j \leq i\text{-}1\ ,\ \sigma(j) < \sigma(i)\}$$

pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$.
Le code $L\sigma$ appartient à l'ensemble D_n. Par ailleurs, il est immédiat que $L : \mathfrak{S}_n \to D_n$ est bijectif, et que, d'autre part, on a

$$\text{RISE SET}\ L\sigma = \text{RISE SET}\sigma$$

pour tout σ dans $\mathfrak{S}_n$. Rappelons encore que pour tout $w = x_1\, x_2 \ldots x_n$ dans D_n on note $\text{IMA}w$ le nombre de x_i distincts dans w et que l'on pose

$$\mathrm{IMAL} = \mathrm{IMA} \circ L \ .$$

Nous avons vu dans la section précédente que la bijection $S : \mathfrak{S}_n \to D_n$ avait les propriétés suivantes

(i) $\quad \mathrm{RISE\ SET}\ S\sigma = \mathrm{RISE\ SET}\sigma$
(ii) $\quad \mathrm{IMA}\ S\sigma = \mathrm{IRISE}\ \sigma \ .$

En composant S et L^{-1}, on obtient

$$\mathfrak{S}_n \xrightarrow{S} D_n \xrightarrow{L^{-1}} \mathfrak{S}_n \ .$$

D'où

$$\begin{aligned} &\mathrm{RISE\ SET}\ L^{-1} \circ S\sigma = \mathrm{RISE\ SET}\,\sigma \\ &\mathrm{IMAL}\ L^{-1} \circ S\sigma = \mathrm{IMA}\ S\sigma = \mathrm{IRISE}\ \sigma \ . \end{aligned} \qquad (16)$$

Les deux permutations $L^{-1} \circ S\sigma$ et σ ayant même RISE SET, ont aussi même MAJ. Les identités (16) montrent alors que les couples (IRISE, MAJ) et (IMAL, MAJ) ont même distribution sur $\mathfrak{S}_n$. En fait les identités (16) contiennent le résultat plus fort suivant.

THÉORÈME 3. *Pour tout ensemble* T *tel que* $0 \in T \subset [n-1]$ *les statistiques* IRISE *et* IMAL *ont même distribution sur l'ensemble* $\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \mathrm{RISE\ SET}\ \sigma = T\}$.

On trouvera une illustration de ce théorème dans la table 3 construite pour $n = 4$.

RISE SET	σ	Lσ	IMALσ	IRISE σ
0, 1, 2, 3	1 2 3 4	0 1 2 3	4	4
0, 1, 2	1 2 4 3	0 1 2 2	3	3
	1 3 4 2	0 1 2 1	3	3
	2 3 4 1	0 1 2 0	3	3
0, 1, 3	1 3 2 4	0 1 1 3	3	3
	1 4 2 3	0 1 1 2	3	3
	2 3 1 4	0 1 0 3	3	3
	2 4 1 3	0 1 0 2	3	2
	3 4 1 2	0 1 0 1	2	3
0, 2, 3	2 1 3 4	0 0 2 3	3	3
	3 1 2 4	0 0 1 3	3	3
	4 1 2 3	0 0 1 2	3	3
0, 1	1 4 3 2	0 1 1 1	2	2
	2 4 3 1	0 1 1 0	2	2
	3 4 2 1	0 1 0 0	2	2
0, 2	2 1 4 3	0 0 2 2	2	2
	3 2 4 1	0 0 2 0	2	2
	3 1 4 2	0 0 2 1	3	3
	4 1 3 2	0 0 1 1	2	2
	4 2 3 1	0 0 1 0	2	2
0, 3	3 2 1 4	0 0 0 3	2	2
	4 2 1 3	0 0 0 2	2	2
	4 3 1 2	0 0 0 1	2	2
0	4 3 2 1	0 0 0 0	1	1

Table 3 .

RÉFÉRENCES.

L. Carlitz (1954), q-Bernoulli and Eulerian numbers, Trans. Amer. Math. Soc. 76 , 332-350 .

L. Carlitz (1956), The expansion of certain products, Proc. Amer. Math. Soc. 7 , 558-564 .

L. Carlitz (1959), Eulerian numbers and polynomials, Math. Magazine 33 , 247-260 .

L. Carlitz (1975), A combinatorial property of q-Eulerian num-

bers, Amer. Math. Monthly 82 , 51-54 .

L. Carlitz, D. P. Roselle and R. A. Scoville (1966), Permutations and sequences with repetitions by number of increases, J. Combinatorial Theory 1 , 350-374 .

M. S. Cheema and T. S. Motzkin (1971), Multipartitions and Multipermutations, Proc. of Symposia in Pure Math., vol. 19, Combinatorics, Amer. Math. Soc., Providence, 39-70 .

L. Comtet (1970), Analyse Combinatoire, vol. 2, Presses Universitaires de France, Paris.

D. Dumont (1974), Interprétations combinatoires des nombres de Genocchi, Duke Math. J. 41 , 305-318 .

W. Feller (1966), An Introduction to Probability Theory and its Applications, vol. 2, J. Wiley, New York, p. 27 .

D. Foata (1968), On the Netto inversion number of a sequence, Proc. Amer. Math. Soc. 19 , 236-240 .

D. Foata et M.-P. Schützenberger (1970), Théorie géométrique des polynômes eulériens, Lecture Notes in Math. n°138, Springer-Verlag, Berlin.

D. Foata et M.-P. Schützenberger (1977a), Major index and inversion number of permutations, A paraître dans Math. Nachrichten.

D. Foata et M.-P. Schützenberger (1977b), La troisième transformation fondamentale du groupe des permutations. A paraître.

Marquis de Laplace (1820), Oeuvres complètes, vol. 7, réédité par Gauthier-Villars (1886), Paris, p. 257 et suivantes.

R. von Randow und W. Meyer (1971), Ein Würfelschnittproblem und Bernoullische Zahlen, Math. Ann. 193 , 315-321 .

J. Riordan (1958), An Introduction to Combinatorial Analysis, J. Wiley, New York.

D. P. Roselle (1974), Coefficients associated with the expansion of certain products, Proc. Amer. Math. Soc. 45 , 144-150 .

R. P. Stanley (1976a), Binomial posets, Möbius inversion, and permutation enumeration, J. Combinatorial Theory

series A, 20 , 336-356 .

R. P. Stanley (1976b), Eulerian partitions of a unit hypercube, voir note ci-après.

Eulerian Partitions of a Unit Hypercube

by Richard P. Stanley

In the preceding paper Dominique Foata mentions the result, implicit in the work of Laplace, that the volume of the region R_{nk} of the unit hypercube $[0,1]^n$ contained between the two hyperplanes $\Sigma x_i = k-1$ and $\Sigma x_i = k$ is given by $\frac{1}{n!}A_{nk}$, where A_{nk} is an Eulerian number. On the other hand, it follows from the well-known combinatorial interpretation of A_{nk} as the number of permutations of $\{1,2,\ldots,n\}$ with k rises (counting one rise at the start) that $\frac{1}{n!}A_{nk}$ is also the volume of the set S_{nk} of all points $(x_1,\ldots,x_n) \in [0,1]^n$ for which $x_i < x_{i+1}$ for exactly k values of i (including by convention $i = 0$). Foata raises the problem of whether there is some explicit measure-preserving map $\varphi : [0,1]^n \to [0,1]^n$ which takes S_{nk} onto R_{nk}, except possibly on a set of measure zero. We claim that such a map is given as follows : Define $\varphi : [0,1]^n \to [0,1]^n$ by $\varphi(x_1,\ldots,x_n) = (y_1,\ldots,y_n)$, where

$$y_i = \begin{cases} x_{i-1} - x_i & \text{if } x_i < x_{i-1} \\ 1 + x_{i-1} - x_i & \text{if } x_i > x_{i-1} \end{cases} .$$

Here we set $x_0 = 0$, and we leave φ undefined on the set of measure zero consisting of points where some $x_{i-1} = x_i$. If $(x_1,\ldots,x_n) \in S_{nk}$, then $\Sigma y_i = k - x_n$. Hence $(y_1,\ldots,y_n) \in R_{nk}$. Moreover, in each of the 2^{n-1} regions of $[0,1]^n$ determined by whether $x_i < x_{i-1}$ or $x_i > x_{i-1}$ for $2 \le i \le n$, φ is an affine transformation of determinant $(-1)^n$. Hence φ is measure-preserving. Finally, the inverse of φ is defined (except for the set of measure zero where some $y_1+y_2+\ldots+y_i$ is an integer) by $x_i = 1 + [y_1+y_2+\ldots+y_i] - y_1-y_2-\ldots-y_i$.