РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТИПА ЭЙЛЕРА И МАКМАГОНА НА ГРУППЕ ПЕРЕСТАНОВОК[1]

Д. Фоата

1. ВВЕДЕНИЕ

Числа Эйлера $A_{n,k}$ $(n \geqslant 1,\ 1 \leqslant k \leqslant n)$ определяются следующим рекуррентным соотношением:

$$\begin{aligned} &A_{1,1}=1, \quad A_{1,k}=0 \quad (k \neq 1), \\ &A_{n,k}=kA_{n-1,k}+(n-k+1)\,A_{n-1,k-1}\,(n \geqslant 2,\ 1 \leqslant k \leqslant n). \end{aligned} \tag{1}$$

В табл. 1 представлены несколько первых значений этих чисел.

Таблица 1

n \ k	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	1	4	1			
4	1	11	11	1		
5	1	26	66	26	1	
6	1	57	302	302	57	1

Эйлеровы числа можно задавать и посредством так называемой формулы Ворпицкого:

$$x^n=\sum_{k=1}^{n} A_{n,k}\binom{x+k-1}{n}\,(n \geqslant 1), \tag{2}$$

обращение которой (в смысле Мёбиуса) дается формулой

$$A_{n,k}=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\,(k-i)^n\binom{n+1}{i}\,(0 \leqslant k \leqslant n). \tag{3}$$

Для всякого целого $n \geqslant 1$ многочлен

$$A_n(t)=\sum_{k=1}^{n} A_{n,k}t^{k-1}$$

---

[1]) Foata D. Distributions eulériennes et mahoniennes sur le groupe des permutations.

называется *многочленом Эйлера* (степени $n-1$). Экспоненциальная производящая функция эйлеровых многочленов $A_n(t)$ $(n\geqslant 1)$ имеет вид

$$1+\sum_{n\geqslant 1}\frac{u^n}{n!}A_n(t)=\frac{(1-t)}{-t+\exp(u(t-1))}$$

и представима также в виде

$$1+\sum_{n\geqslant 1}\frac{u^n}{n!}A_n(t)=\Bigl(1-\sum_{n\geqslant 1}\frac{u^n}{n!}(t-1)^{n-1}\Bigr)^{-1}. \tag{4}$$

Арифметические и комбинаторные свойства этих чисел, в частности эквивалентность формул (1), (2), (3), (4), можно найти у Карлитца [4], Риордана ([16], стр. 38—39, 214—216) и Фоата—Шюценберже [11].

Числа Макмагона $B_{n,k}$ $(n\geqslant 1,\ 0\leqslant k\leqslant n(n-1)/2)$ определяются посредством тождества

$$\sum_{k=0}^{n(n-1)/2} B_{n,k}\,q^k=\prod_{i=1}^{n}\frac{1-q^i}{1-q}\qquad (n\geqslant 1). \tag{5}$$

(По аналогии с эйлеровыми эти числа далее именуются макмагоновыми числами — да простят мне этот неологизм в память великого комбинаторика майора П. А. Макмагона.)

Вводя q-аналог $[i]_q$ целого $i\geqslant 1$ по правилу

$$[i]_q=(1-q^i)/(1-q)=1+q+q^2+\ldots-q^{i-1}, \tag{6}$$

представляем (5) в виде

$$\sum_{k=0}^{n(n-)/2} B_{n,k}\,q^k=[n]_q[n-1]_q\ldots[2]_q[1]_q\qquad (n\geqslant 1).$$

Несколько первых значений макмагоновых чисел представлены в табл. 2.

Таблица 2

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1										
2	1	1									
3	1	2	2	1							
4	1	3	5	6	5	3	1				
5	1	4	9	15	20	22	20	15	9	4	1

Непосредственно из формул (1) и (5) получаем соотношение

$$\sum_{k=1}^{n}A_{n,k}=\sum_{k=0}^{n(n-1)/2}B_{n,k}=n!\qquad (n\geqslant 1).$$

Таким образом, естественно ожидать, что эти две последовательности чисел встретятся в различных задачах о перечислении, относящихся к группе $\mathfrak{S}_n$ перестановок множества $[n]=\{1, 2, \ldots, n\}$ или иного функционального множества мощности $n!$. Пусть D_n — такое множество, а X — отображение, определенное на D_n и принимающее целые значения: говорят, что X *статистически эйлерово* (соответственно макмагоново) на D_n, если

$$A_{n,k}=|\{d\in D_n : X(d)=k\}| \quad (1\leqslant k\leqslant n)$$

(соответственно $B_{n,k}=|\{d\in D_n : X(d)=k\}|\,(0\leqslant k\leqslant n(n-1)/2))$.

Пусть $\sigma=\sigma(1)\,\sigma(2)\ldots\sigma(n)$ — некоторая перестановка последовательности $1\,2\ldots n$. Обозначим через $\mathrm{RISE}\,\sigma$ число *возрастаний* в перестановке σ, т. е. при соглашении $\sigma(0)=0$, число всех номеров i, для которых $\sigma(i)<\sigma(i+1)$ $(0\leqslant i\leqslant n-1)$. *Число инверсий* $\mathrm{INV}\,\sigma$ в перестановке σ определяется как число пар (i, j), таких, что $\sigma(i)>\sigma(j)$ $(1\leqslant i<j\leqslant n)$. Наконец, *мажорирующий индекс* $\mathrm{MAJ}\,\sigma$ перестановки σ есть сумма тех i, для которых $\sigma(i)>\sigma(i+1)$ $(1\leqslant i\leqslant n-1)$.

Легко видеть, что, например, для

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 6 & 4 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

имеем

$$\mathrm{RISE}\,\sigma=5, \quad \mathrm{INV}\,\sigma=23, \quad \mathrm{MAJ}\,\sigma=15.$$

Хорошо известно (см., например, Риордан ([16], стр. 213—216), что RISE есть статистически эйлерово отображение на $\mathfrak{S}_n$. Также известно, что и INV, и MAJ — статистически макмагоновы на $\mathfrak{S}_n$ (см., например, Конге ([7], стр. 81 и стр. 108). Обозначая через σ^{-1} перестановку, обратную к перестановке σ на группе $\mathfrak{S}_n$, полагаем

$$\mathrm{IRISE}\,\sigma=\mathrm{RISE}\,\sigma^{-1}, \qquad \mathrm{IMAJ}\,\sigma=\mathrm{MAJ}\,\sigma^{-1}.$$

Очевидно, что тем самым получаем новое статистически эйлерово отображение IRISE и статистически макмагоново отображение IMAJ.

Настоящая работа состоит из трех частей. В первой из них (разд. 2) ставится задача, остававшаяся открытой, о связи между «дискретными» интерпретациями чисел Эйлера и «непрерывной» интерпретацией в терминах разбиения единичного n-мерного куба. Действительно, аналитически доказывается, что отношение $A_{n,k}/n!$ представляет собой объем части единичного n-мерного куба, заключенной между плоскостями $\sum x_i = k-1$ и $\sum x_i = k$. Таким образом, речь идет об отыскании *комбинаторного* доказательства этого результата. Задача, излагаемая в разд. 2, была предложена участникам коллоквиума в Берлине. Простое и элегантное ее решение, найденное Ричардом Стенли, воспроизводится ниже.

Вторая часть работы (разд. 3 и 4) является попыткой изучения распределения 5-вектора (RISE, IRISE, INV, MAJ, IMAJ), т. е. изучения многомерной производящей функции

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum x_1^{\mathrm{RISE}\,\sigma} x_2^{\mathrm{IRISE}\,\sigma} x_3^{\mathrm{INV}\,\sigma} x_4^{\mathrm{MAJ}\,\sigma} x_5^{\mathrm{IMAJ}\,\sigma},$$

где суммирование ведется по всем σ в множестве перестановок $\mathfrak{S}_n$. Мы не имеем аналитического выражения этой функции, но зато мы покажем, что известны *все* маргинальные двумерные представления, т е. двумерная производящая функция любой пары статистик, извлеченной из последовательности (RISE, IRISE, INV, MAJ, IMAJ). В разд. 3 посредством преобразования на $\mathfrak{S}_n$, уже введенного у Фоата (1968) и использованного в работе у Фоата — Шюценберже (1977а), показывается, что эти 20 двумерных распределений сводятся к 6 распределениям. Раздел 4 ограничивается приведением аналитических выражений для этих 6 распределений. В частности, мы покажем, что q-аналог *чисел* Эйлера, найденный Карлитцем (1954, 1975), дает двумерную производящую функцию от (RISE, MAJ), в то время как q-аналог *многочленов* Эйлера, предложенный Стенли [18], приводит к функции от (IRISE, MAJ).

Для любой перестановки $\sigma = \sigma(1)\,\sigma(2) \ldots \sigma(n)$ из $\mathfrak{S}_n$ и $i = 1, 2, \ldots, n$ обозначим через x_i число $\sigma(j)$ слева от $\sigma(i)$, меньшее чем $\sigma(i)$. Далее, через $\mathrm{IMAL}\,\sigma$ обозначим число различных целых чисел *последовательности* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Например, для

$$\sigma = 7 \quad 9 \quad 1 \quad 2 \quad 8 \quad 5 \quad 6 \quad 3 \quad 4$$

имеем

$$x_1 x_2 \ldots x_n = 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 3,$$

откуда $\mathrm{IMAL}\,\sigma = 4$.

Как показано Дюмоном [8], статистика IMAL эйлерова. В последнем разделе статьи доказывается, что пара (IMAL, MAJ) имеет то же распределение на $\mathfrak{S}_n$, что и (IRISE, MAJ) (и еще (RISE, INV)). Для получения этого результата мы прибегнем к кодированию перестановок S-кодом, свойства которого систематически используются в статье по мере надобности (Фоата — Шюценберже [13]).

Для описания различных используемых алгоритмов мы позволили себе заимствовать обозначения, ставшие традиционными в информатике. Например, «$x \leftarrow y$» означает, что следует заменить y на x, а под «$x_1 x_2 \ldots x_n$» $\leftarrow$ «$y_1 y_2 \ldots y_n$» понимается замена $x_1 \leftarrow y_1$, $x_2 \leftarrow y_2$, $\ldots$, $x_n \leftarrow y_n$.

2. ЭЙЛЕРОВЫ СТАТИСТИКИ

Для доказательства того, что RISE, определение которого было приведено во введении, есть эйлерова статистика на $\mathfrak{S}_n$, нужно показать, что число перестановок, имеющих k возрастаний, удовлетворяет рекуррентному соотношению (1). Доказательство очевидно.

Для любого $n \geqslant 1$ через D_n обозначим множество таких последовательностей $x_1, x_2, \ldots, x_n$ длины n, что $0 \leqslant x_i \leqslant i-1$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. Естественно, что $|D_n| = n!$. Для каждого $w = x_1, x_2, \ldots, x_n$ из D_n обозначим через IMA w *число различных целых чисел в последовательности* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Эта статистика введена Дюмоном [8]. При помощи рекуррентного соотношения (1) непосредственно убеждаемся в том, что она эйлерова. Дюмон [8] построил взаимно однозначное отображение Φ группы $\mathfrak{S}_n$ на D_n, удовлетворяющую тождеству

$$\mathrm{RISE}\,\sigma = \mathrm{IMA}\,\Phi(\sigma).$$

Впрочем, кажется, для всех эйлеровых статистик E, которые известны и которые определены на дискретных множествах, умеют строить взаимно однозначное отображение Φ, тождественно удовлетворяющее $\mathrm{RISE}\,\sigma = E\Phi(\sigma)$ (см. Фоата — Шюценберже [11]).

Последняя геометрическая интерпретация чисел Эйлера, относящаяся к непрерывному множеству, а не к дискретному, оставалась до сих пор в комбинаторном плане изолированной от других. Рассмотрим n-мерный единичный куб и для $1 \leqslant k \leqslant n$ обозначим через $T_{n,k}$ часть этого куба, заключенную между плоскостями, задаваемыми уравнениями $\sum_{i=1}^{n} x_i = k-1$ и $\sum_{i=1}^{n} x_i = k$. Чтобы вычислить объем $T_{n,k}$, можно поступить следующим образом. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — последовательность n случайных переменных, взаимно независимых и равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$. Положим $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Объем $\mathrm{Vol}\,T_{n,k}$ равен вероятности того, что S_n заключено между $k-1$ и k. Несложно вычислить функцию распределения $P\{S_n \leqslant x\}$. Вычисление проведено Феллером (1966). В неявном виде оно имеется уже у Лапласа [14]. Для любого действительного x положим $x_+ = \max(x, 0)$.

Имеем тогда, что

$$P\{S_n \leqslant x\} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (x-i)_+^n \binom{n}{i}.$$

Когда x равно некоторому целому $k\,(0\leqslant k\leqslant n)$, получаем

$$P\{S_n\leqslant k\}=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(k-i)^n\binom{n}{i}.$$

Отсюда для $1\leqslant k\leqslant n$ имеем

$$\operatorname{Vol}T_{n,k}=P\{k-1<S_n\leqslant k\}=$$
$$=\frac{1}{n!}\left[\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(k-i)^n\binom{n}{i}\sum_{i-0}^{k-1}(-1)^i(k-1-i)\binom{n}{i}\right]=$$
$$=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(k-i)^n\binom{n+1}{i}.$$

Таким образом, вновь приходим к формуле Ворпицкого (3) для чисел Эйлера. Отсюда

$$\operatorname{Vol}T_{n,k}=A_{n,k}/n!\quad(1\leqslant k\leqslant n).\tag{6}$$

Этот результат элементарен, однако же и он периодически переоткрывается (см. фон Рандов и др. [15]). Заметим, что доказательство формулы (6) возможно лишь благодаря формуле Ворпицкого. Таким образом, задача, которая остается нерешенной, заключается в том, чтобы доказать (6) при помощи рекуррентной формулы (1) или лучше, установив взаимно однозначное соответствие с некоторой известной эйлеровской статистикой. Мы сформулируем эту задачу следующим образом. Пусть $U_{n,k}$ — множество точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ единичного куба, имеющих k возрастаний, т. е., если положить $x_0=0$, таких, чтобы неравенство $x_{i-1}<x_i$ выполнялось точно для k индексов i из $[n]$. При помощи все той же последовательности случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ доказывают, что объем $U_{n,k}$ снова равен вероятности того, что вектор $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ принадлежит $U_{n,k}$. Но $(X_1, X_2, \ldots, X_n)\in U_{n,k}$ в том и только том случае, если существует такое $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, что $\operatorname{RISE}\sigma=k$ и $X_{\sigma^{-1}(1)}<X_{\sigma^{-1}(2)}<\ldots<X_{\sigma^{-1}(n)}$. Отсюда

$$\operatorname{Vol}U_{n,k}=\sum\{P\{X_{\sigma^{-1}(1)}<X_{\sigma^{-1}(2)}<\ldots<X_{\sigma^{-1}(n)}\}:\operatorname{RISE}\sigma=k\}=$$
$$=\frac{1}{n!}|\{\sigma\in\mathfrak{S}_n:\operatorname{RISE}\sigma=k\}|=\frac{1}{n!}A_{n,k}\quad(1\leqslant k\leqslant n).$$

Таким образом,

$$\operatorname{Vol}T_{n,k}=\operatorname{Vol}U_{n,k}\quad(1\leqslant k\leqslant n).\tag{7}$$

Для получения полной комбинаторной теории всех интерпретаций чисел Эйлера достаточно построить преобразование

$$\Phi:(x_1, x_2, \ldots, x_n)\to(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

единичного куба, которое ставит во взаимно однозначное соответствие симплекс $U_{n,k}$ и $T_{n,k}$ для любого $k=1, 2, \ldots, n$.

Эта задача была устно поставлена во время коллоквиума в Берлине, и Стенли [19] нашел следующее простое преобразование: для любого $i=1, 2, \ldots, n$ полагаем

$$y_i = \begin{cases} 1+x_{i-1}-x_i, & \text{если } x_{i-1} < x_i, \\ x_{i-1}-x_i, & \text{если } x_{i-1} > x_i. \end{cases}$$

Обращение этого преобразования дается формулой

$$x_i = -y_1 - \ldots - y_i + 1 + [y_1 + \ldots + y_i]$$

$(1 \leqslant i \leqslant n)$. Естественно, что преобразование и его обращение не определены на гранях симплексов, т. е. на множестве точек, имеющих по крайней мере две равные координаты, но эти множества имеют меру нуль.

3. ДВУМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Вектор (RISE, IRISE, INV, MAJ, IMAJ) содержит две эйлеровы статистики RISE и IRISE, а также три макмагоновы статистики INV, MAJ и IMAJ. Среди двадцати пар, которые можно составить из этих пяти статистик, имеются:

(I) две пары, компоненты которых — эйлеровы статистики: (RISE, IRISE) и (IRISE, RISE),

(II) шесть пар, компоненты которых — макмагоновы статистики: (MAJ, INV), (IMAJ, INV), (IMAJ, MAJ), (MAJ, IMAJ), (INJ, IMAJ), (INV, MAJ); далее идут шесть пар, в которых первая компонента эйлерова, а вторая макмагонова и которые можно разбить на два класса (III) и (IV):

(III) (RISE, MAJ), (IRISE, IMAJ);

(IV) (RISE, INV), (IRISE, INV), (IRISE, MAJ), (RISE, IMAJ);

и наконец,

(V) (соответственно (VI)) — две (соответственно четыре) пары, полученные перестановкой компонент в двух (соответственно четырех) парах группы (III) (соответственно (IV)).

Теорема 1. *Пары статистик, принадлежащие одной и той же группе* (I), (II), (III), (IV), (V) *или* (VI), *имеют одинаковое распределение.*

Для доказательства этой теоремы мы воспользуемся свойствами преобразования ψ и группы $\mathfrak{S}_n$, описанными у Фоата [10] и Фоата — Шюценберже [13]. Приведем сначала конструкцию преобразования ψ.

Алгоритм для ψ.

Пусть $\sigma=\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$ — некоторая перестановка. Для получения $\psi(\sigma)=\tau=\tau(1)\tau(2)\ldots\tau(n)$ применим к σ следующую процедуру.

(1) если $n=1$, то $\tau\leftarrow\sigma$, и алгоритм закончен; в противном случае $k\leftarrow n-1$; $\sigma_k\leftarrow\sigma(1)\sigma(2)\ \ldots\ \sigma(n-1)$ и $\tau(n)\leftarrow\sigma(n)$;

(2) если $k=1$, то положить $\tau(1)$ равной единственной букве в σ_1 и $\psi(\sigma)=\tau\leftarrow\tau(1)\ \ldots\ \tau(n)$; алгоритм закончен; в противном случае сравнить первый член $\sigma_k(1)$ в σ_k с $\tau(k+1)$; если $\sigma_k(1)$ больше (соответственно меньше), чем $\tau(k+1)$, то отсечь σ_k перед буквой, большей (соответственно меньшей), чем $\tau(k+1)$;

(3) внутри каждой ячейки, определенной разрезами, переместить первую букву на последнее место;

(4) положить σ_{k-1} равным преобразованному таким образом слову после исключения последней буквы;

(5) положить $\tau(k)$ равным этой последней букве;

(6) заменить k на $k-1$ и снова перейти к (2).

Пример. Если применить ψ к

$$\sigma=6\quad 4\quad 9\quad 7\quad 2\quad 5\quad 8\quad 1\quad 3,$$

то получим последовательно

$$\begin{aligned}
\sigma_8&=6\,|\,4\,|\,9\,|\,7\ \ 2\,|\,5\,|\,8\ \ 1\,.\,3&&=\tau(9),\\
\sigma_7&=6\,|\,4\ \ 9\,|\,2\,|\,7\,|\,5\,|\,1\,.\,8&&=\tau(8),\\
\sigma_6&=6\,|\,9\,|\,4\,|\,2\,|\,7\,|\,5\,.\,1&&=\tau(7),\\
\sigma_5&=6\,|\,9\ \ 4\ \ 2\,|\,7\,.\,5&&=\tau(6),\\
\sigma_4&=6\,|\,4\,|\,2\ \ 9\,.\,7&&=\tau(5),\\
\sigma_3&=6\,|\,4\,|\,9\,.\,2&&=\tau(4),\\
\sigma_2&=6\,|\,4\,.\,9&&=\tau(3),\\
\sigma_1&=6\,.\,4&&=\tau(2),\\
&\ \ \ 6&&=\tau(1),
\end{aligned}$$

$$\tau=\psi(\sigma)=6\quad 4\quad 9\quad 2\quad 7\quad 5\quad 1\quad 8\quad 3.$$

В работе Фоата [10] доказано, что ψ является биекцией $\mathfrak{S}_n$ на себя и удовлетворяет тождеству

$$\mathrm{MAJ}\,\psi(\sigma)=\mathrm{INV}\,\sigma. \tag{8}$$

В предыдущем примере

$$\mathrm{INV}\,\sigma=23=\mathrm{MAJ}\,\tau.$$

У Фоата — Шюценберже [12] было установлено другое свойство ψ. Обозначим через RISE SET σ множество возрастаний перестановки $\sigma=\sigma(1)\,\sigma(2)\,\ldots\,\sigma(n)$, т. е. множество целых i, таких, что $0\leqslant i\leqslant n-1$ и $\sigma(i)<\sigma(i+1)$ (при том же соглашении $\sigma(0)=0$). Полагаем также

$$\mathrm{IRISE\ \ SET}\ \sigma=\mathrm{RISE\ \ SET}\ \sigma^{-1},$$

так чтобы RISE σ и IRISE σ были соответственно мощностями множеств RISE SET σ и IRISE SET σ. При этом MAJ (соответственно IMAJ) есть сумма целых чисел, заключенных между 1 и $n-1$ и не принадлежащих RISE SET σ (соответственно IRISE SET σ). Легко видеть, что i принадлежит IRISE SET σ в том и только том случае, если $i+1$ находится *справа* от i в слове $\sigma(1)\ \sigma(2)\ \ldots\ \sigma(n)$.

Например, для

$$\sigma=\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 6 & 4 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

имеем

$$\mathrm{RISE\ \ SET}\ \sigma=\{0,\ 2,\ 5,\ 6,\ 8\},$$
$$\mathrm{IRISE\ \ SET}\ \sigma=\{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 7\}.$$

Доказано (см. Фоата — Шюценберже [12]), что в $\mathfrak{S}_n$

$$\mathrm{IRISE\ \ SET}\ \psi(\sigma)=\mathrm{IRISE\ \ SET}\ \sigma.$$

Отсюда следует, что

$$\mathrm{IRISE}\ \ \psi(\sigma)=\mathrm{IRISE}\ \ \sigma,$$
$$\mathrm{IMAJ}\ \ \psi(\sigma)=\mathrm{IMAJ}\ \ \sigma. \tag{9}$$

Положим $i\sigma=\sigma^{-1}$ для любого σ из $\mathfrak{S}_n$ и рассмотрим последовательность

$$\sigma\xrightarrow{\tilde{\mathrm{I}}}\sigma_1\xrightarrow{\psi}\sigma_2\xrightarrow{i}\sigma_3\xrightarrow{\psi^{-1}}\sigma_4\xrightarrow{i}\sigma_5. \tag{10}$$

Из (8) и (9), а также из того хорошо известного факта, что i сохраняет число обращений в перестановке, выводим равенства

$$\mathrm{MAJ}\ \ \sigma=\mathrm{IMAJ}\ \ \sigma_1=\mathrm{IMAJ}\ \ \sigma_2=\mathrm{MAJ}\ \ \sigma_3=\mathrm{INV}\ \ \sigma_4=\mathrm{INV}\ \ \sigma_5,$$
$$\mathrm{INV}\ \ \sigma=\mathrm{INV}\ \ \sigma_1=\mathrm{MAJ}\ \ \sigma_2=\mathrm{IMAJ}\ \ \sigma_3=\mathrm{IMAJ}\ \ \sigma_4=\mathrm{MAJ}\ \ \sigma_5,$$
$$\mathrm{RISE}\ \ \sigma=\mathrm{IRISE}\ \ \sigma_1=\mathrm{IRISE}\ \ \sigma_2,\ \ \mathrm{RISE}\ \ \sigma_4=\mathrm{IRISE}\ \ \sigma_5.$$

Последовательность (10) дает все преобразования, нужные для доказательства теоремы 1, что и требовалось доказать.

Распределения пар групп (V) и (VI) при помощи симметрии сводятся к распределениям пар групп (III) и (VI) (соответственно). Стало быть, имеются лишь четыре различные двумерные маргинальные распределения, а именно распределения групп (I), (II), (III) и (IV). Их аналитическое выражение известно, как мы увидим в следующем разделе.

4. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ МАРГИНАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Карлитц и др. [5] получили многие аналитические выражения для распределения (RISE, IRISE) (группа (I)). С четырьмя формулами (1), (2), (3) и (4), существующими для чисел Эйлера, можно связать четыре формулы для чисел

$$A_{n,j,k} = |\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \mathrm{RISE}\,\sigma = j, \quad \mathrm{IRISE}\,\sigma = k\}|.$$

Как показано Карлитцем и др. [5], формулам (1), (2), (3) и (4) соответствуют следующие 4 формулы: (11), (12), (13) и (14):

$$\begin{aligned}(n+1)\,A_{n+1,j,k} &= (jk+n)\,A_{n,j,k} + \\ &+ (k(n+2-j)-n)\,A_{n,j-1,k} + \\ &+ (j(n+2-k)-n)\,A_{n,j,k-1} + \\ &+ ((n+2-j)(n+2-k)+n)\,A_{n,j-1,k-1},\end{aligned} \tag{11}$$

$$\binom{xy+n-1}{n} = \sum_{0 \leqslant j,\,k \leqslant n} \binom{x+j-1}{n}\binom{y+k-1}{n} A_{n,j,k}, \tag{12}$$

$$\begin{aligned}A_{n,j,k} = \sum_{0 \leqslant s \leqslant j}\ \sum_{0 \leqslant t \leqslant k} (-1)^{s+t} \times \\ \times \binom{n+1}{s}\binom{n+1}{t}\binom{(j-s)(k-t)+n-1}{n},\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n \geqslant 0}\ \sum_{j,\,k \geqslant 0} A_{n,j,k}x^j y^k u^n (1-x)^{-n}(1-y)^{-n} = \\ = \sum_{j \geqslant 0} \frac{y^j}{1-x(1-u)^{-j}} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{x^k}{1-y(1-u)^{-k}}.\end{aligned} \tag{14}$$

Рассмотрим тождество

$$\prod_{m,\,n \geqslant 0} (1-x^n y^m u) \sum_{n \geqslant 0} \frac{H_n(x,\,y)\,u^n}{(1-x)(1-y)\dots(1-x^n)(1-y^n)}.$$

Согласно Карлитцу [2], это тождество определяет последовательность полиномов $H_n(x,\,y)$ $(n \geqslant 0)$. Шима и Мотцкин [6], а также Розель [17] доказали, что для любого $n \geqslant 1$ полином $H_n(x,\,y)$ является *производящим полиномом пары* (MAJ, IMAJ) *на* $\mathfrak{S}_n$. На основании теоремы 1 заключаем, что $H_n(x,\,y)$ будет также *производящим полиномом каждой пары группы* (II), в частности пары (MAJ, INV).

Карлитц [1], [4] рассматривал q-аналог рекуррентного соотношения (1) для чисел Эйлера. Таким образом, заменяя целое k его q-аналогом $[k]_q = (1-q^k)/(1-q)$, определяем последовательность полиномов $A_{n,k}(q)$, определяемых следующим образом:

$$A_{1,1}(q) = 1, \quad A_{1,k}(q) = 0 \quad \text{для} \quad k \neq 1,$$
$$A_{n,k}(q) = [k]_q A_{n-1,k}(q) + [n-k+1]_q A_{n-1,k-1}(q)$$
$$\text{для} \quad n \geqslant 2, \ 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Полагая

$$A_n(t, q) = \sum_{k=1}^{n} t^k q^{\binom{n-k+1}{2}} A_{n,k}(q) \quad (n \geqslant 1),$$

Карлитц (1975) показал затем, что $A_n(t, q)$ — *производящий полином пары* (RISE, MAJ) *на* $\mathfrak{S}_n$. Таблица первых его значений приводится в конце этого раздела.

Стенли [18] рассматривал q-аналог не формулы (1), а формулы (4), который дает выражение производящей функции эйлеровых *полиномов*. Заменяя в этой формуле $n!$ его q-факториалом

$$[n]_q! = \frac{1-q^n}{1-q} \frac{1-q^{n-1}}{1-q} \cdots \frac{1-q}{1-q},$$

получаем тождество

$$1 + \sum_{n \geqslant 1} \frac{A_n^1(t, q)\, n^n}{[n]_q!} = \left(1 - \sum_{n \geqslant 1} \frac{(t-1)^{n-1} n^n}{[n]_q!}\right)^{-1},$$

которое определяет последовательность полиномов $(A_n^1(t, q))_{n \geqslant 1}$. (Первые значения см. ниже.) Стенли [17] показал, что $tA_n^1(t, q)$ *есть производящий полином пары* (RISE, INV) *на* $\mathfrak{S}_n$. Значит, по теореме 1, $tA_n^1(t, q)$ тоже есть *производящий полином каждой из пар группы* (IV), в частности пары (IRISE, MAJ).

Итак, в силу теоремы 1 и результатов этого раздела мы имеем выражение для бикомпактной производящей функции *всех* пар статистик последовательности

(RISE, (IRISE, INV, MAJ, IMAJ).

Таблица $A_n(t, q)$

$$A_1(t, q) = t,$$
$$A_2(t, q) = tq + t^2,$$
$$A_3(t, q) = tq^3 + t^2 q(2q+2) + t^3,$$
$$A_4(t, q) = tq^6 + t^2 q^3 (3q^2 + 5q + 3) + t^3 q(3q^2 + 5q + 3) + t^4,$$
$$A_5(t, q) = tq^{10} + t^2 q^6 (4q^3 + 9q^2 + 9q + 4) + t^3 q^3 (6q^4 + 16q^3 + 22q^2 + 16q + 6) + t^4 q(4q^3 + 9q^2 + 9q + 4) + t^5.$$

Таблица $tA_n^1(t, q)$

$$tA_1^1(t, q) = t,$$
$$tA_2^1(t, q) = tq + t^2,$$
$$tA_3^1(t, q) = tq^3 + t^2q(2q+2) + t^3,$$
$$tA_4^1(t, q) = tq^6 + t^2(3q^5 + 4q^4 + 3q^3 + q^2) + t^3(q^4 + 3q^3 + 4q^2 + 3q) + t^4,$$
$$tA_5^1(t, q) = tq^{10} + t^2(4q^9 + 6q^8 + 6q^7 + 6q^6 + 2q^5 + 2q^4) + t^3(3q^8 + 9q^7 + 12q^6 + 18q^5 + 12q^4 + 9q^3 + 3q^2) + t^4(2q^6 + 2q^5 + 6q^4 + 6q^3 + 6q^2 + 4q) + t^5.$$

Ни одной трикомпонентной или четырехкомпонентной маргинальной производящей функции распределения для этого вектора, по-видимому, неизвестно. Отметим, что Фоата и Шюценберже [12] изучали симметрии распределения 4-вектора (RISE, IRISE, MAJ, IMAJ) и показали, что вводимая ниже группа симметрии есть прямое произведение диэдральной группы 8-го порядка на группу 2-го порядка.

Согласно теореме 1, пары (RISE, INV) и (IRISE, MAJ) имеют одинаковое распределение. Неизвестна такая эйлерова статистика E, для которой (E, INV) и (RISE, MAJ) имеют одинаковое распределение.

5. V-КОД

Эйлерова статистика IMAJ на $\mathfrak{S}_n$ была определена во введении. В трех последних разделах предполагается доказать, что *пары* (IMAL, MAJ) *и* (IRISE, MAJ) *имеют одинаковое распределение на* $\mathfrak{S}_n$. Для этого мы определим V-код группы $\mathfrak{S}_n$, затем S-код (в разд. 6), который является переупорядочением V-кода. Наконец, сформулированный результат будет доказан в качестве следствия из свойств S-кода в разд. 7.

V-код перестановки $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$ есть такое слово $V\sigma = v_1v_2\ldots v_n$, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ буква v_i равна позиции наибольшего целого $\sigma(j)$, меньшего $\sigma(i)$ и расположенного слева от $\sigma(i)$ (при том же соглашении, что $\sigma(0) = 0$ находится в позиции 0). Иными словами, если $a_i = \max\{\sigma(j) : 0 \leqslant j \leqslant i-1,\ \sigma(j) < \sigma(i)\}$, то v_i есть единственное целое, такое, что $\sigma(v_i) = a_i$.

Определение V-кода распространяется на *подслова* перестановок $\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$, т. е. на такие последовательности $\sigma' = \sigma(c_1)\sigma(c_2)\ldots\sigma(c_k)$, что $k \geqslant 1$ и $1 \leqslant c_1 < c_2 < \ldots < c_k \leqslant n$. Если положить $\sigma(c_0) = 0$ и $a_1' = \max\{\sigma(c_j) : 0 \leqslant j \leqslant i-1,\ \sigma(c_j) < \sigma(c_i)\}$, то V-код перестановки σ' есть $V\sigma' = v_1v_2\ldots v_k$, где v_i — единственное целое, такое, что $\sigma(c_{v_i}) = a_i'$.

Например, при

$$\sigma=\begin{array}{c} 0 \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 5 & 7 & 1 & 4 & 6 & 3 & 9 & 2 & 8\end{pmatrix}$$

имеем

$$V\sigma=0\quad 1\quad 0\quad 3\quad 1\quad 3\quad 2\quad 3\quad 2.$$

Для подслова

$$\sigma'=\begin{array}{c} 0 \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}2 & 4 & 5 & 8 & 9\\ 7 & 4 & 6 & 2 & 7\end{pmatrix}$$

имеем

$$V\sigma'=0\quad 0\quad 2\quad 0\quad 1.$$

Напомним, что *предшествующим* для σ является такое целое i, что $0\leqslant i\leqslant n-1$ и что $\sigma(i)+1$ расположено *справа* от $\sigma(i)$. Обозначим через $A\sigma$ множество предшествующих σ. Естественно, что $\mathrm{IRISE}\,\sigma=|A\sigma|$.

Например, для

$$\sigma=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 0 & 5 & 7 & 1 & 4 & 6 & 3 & 9 & 2 & 8\end{pmatrix}$$

имеем $A\sigma=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$.

Ясно, что если σ принадлежит $\mathfrak{S}_n$, то $V\sigma$ принадлежит множеству всех слов $x_1x_2\ \dots\ x_n$, таких, что $0\leqslant x_i\leqslant i-1$ для любого $i=1,\ 2,\ \dots,\ n$. Более того, *множество различных букв $V\sigma$ равно множеству предшествующих* σ. А поскольку мощность $A\sigma$ снова равна $\mathrm{IRISE}\,\sigma$, то

$$\mathrm{IMA}\,V\sigma=\mathrm{IRISE}\,\sigma. \tag{15}$$

Чтобы убедиться в том, что отображение $V\colon \mathfrak{S}_n\to D_n$ *биективно*, сразу же приведем конструкцию обратного к V отображения V^{-1}.

Алгоритм для V^{-1}. Пусть $w=x_1x_2\dots x_n$ — слово из D_n. Чтобы получить такую перестановку σ, что $V\sigma=w$, применим следующую процедуру:

(1) $\sigma(0)\leftarrow 0$; $\sigma(1)\leftarrow 1$; если $n=1$, то алгоритм закончен; в противном случае $k\leftarrow 2$;

(2) $\sigma(k)\leftarrow\sigma(x_k)+1$ и увеличить на 1 все элементы последовательности $\sigma(0)\,\sigma(1)\,\sigma(2)\ \dots\ \sigma(k-1)$, которые больше или равны $\sigma(k)$, и оставить неизменными остальные;

(3) если $k=n$, то алгоритм закончен; в противном случае заменить k на $k+1$ и перейти к (2).

Следующие два свойства V-кода существенны для построения S-кода.

Свойство 1. *Пусть* $V\sigma = v_1 v_2 \ldots v_n$ — V*-код перестановки* $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$. *Положим* $x = \max\{v_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ *и обозначим через* $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ *(соответственно* $(d_1, d_2, \ldots, d_l)$*) возрастающую последовательность таких целых* m, *что* $v_m < x$ *(соответственно* $v_m = x$*). Тогда*

$$\sigma(d_1) = \sigma(x) + l + 1,\ \sigma(d_2) = \sigma(x) + l,$$
$$\sigma(d_3) = \sigma(x) + l - 1, \ldots, \sigma(d_{l-1}) = \sigma(x) + 2,$$
$$\sigma(d_l) = \sigma(x) + 1.$$

Кроме того, V*-код подслова* $\sigma' = \sigma(c_1)\sigma(c_2)\ldots\sigma(c_k)$ *равен* $V\sigma' = v_{c_1} v_{c_2} \ldots v_{c_k}$.

Проверка свойства 1 не представляет никакой трудности и здесь не воспроизводится. Проиллюстрируем это свойство на приведенном ранее примере.

Имеем

$$\begin{array}{rccccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
\sigma = & & 5 & 7 & 1 & 4 & 6 & 3 & 9 & 2 & 8 \\
V\sigma = & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 2 & 3 & 2 & \\
x = & 3, & & & & & & & & & \\
c_1 \ldots c_k = & & 1 & 2 & 3 & . & 5 & . & 7 & . & 9 \\
\sigma' = & & 5 & 7 & 1 & . & 6 & . & 9 & . & 8 \\
\sigma(x) = & 1, & & & & & & & & & \\
d_1 \ldots d_l = & . & . & . & 4 & . & 6 & . & 8 & . & \\
\sigma(d_1)\ldots\sigma(d_l) = & . & . & . & 4 & . & 3 & . & 2 & . & \\
V\sigma' = & 0 & 1 & 0 & . & 1 & . & 2 & . & 2, &
\end{array}$$

который равен $v_{c_1} v_{c_2} \ldots v_{c_k}$.

Следующее свойство есть непосредственное следствие свойства 1.

Свойство 2. *Пусть* w *и* w' — *два слова из* D_n, *отличающиеся лишь позицией своих максимальных букв. Иными словами, предположим, что*

$$w = v_1 \ldots v_{d_1 - 1} x v_{d_1 + 1} + v_{d_l - 1} x v_{d_l + 1} \ldots v_n,$$
$$w' = v'_1 \ldots v'_{d'_1 - 1} x v'_{d'_1 + 1} \ldots v'_{d'_l - 1} x v'_{d'_l + 1} \ldots v'_n,$$

где

$$v_1 \ldots v_{d_1 - 1} v_{d_1 + 1} \ldots v_{d_l - 1} v_{d_l + 1} \ldots v_n =$$
$$= v'_1 \ldots v'_{d'_1 - 1} v'_{d'_1 + 1} \ldots v'_{d'_l - 1} v'_{d'_l + 1} \ldots v'_n,$$

причем последнее слово содержит лишь буквы, меньшие x. Тогда для $\sigma = V^{-1}w$ *и* $V^{-1}w'$ *имеем*

$$\sigma(d_1) = \sigma'(d'_1),\ \sigma(d_2) = \sigma'(d'_2),\ \ldots,\ \sigma(d_l) = \sigma'(d'_l).$$

6. S-КОД

Для любого $w = x_1x_2 \ldots x_n$, принадлежащего D_n, обозначим через RISE SETw множество *возрастаний* w, т. е. таких индексов i, что $0 \leqslant i \leqslant n-1$ и $x_i < x_i + 1$ (при соглашении $x_0 = 0$). В силу (15) имеем IMA $V\sigma$ = IRISE σ. Зато RISE SET $V\sigma$ не обязательно равно RISE SET σ. Чтобы установить это свойство, достаточно получить соответствующее переупорядочение $V\sigma$, поскольку свойство (15), очевидно, сохраняется при любом переупорядочении. Итак, мы предполагаем доказать следующую теорему:

Теорема 2. *Существует такая биекция* $S\colon \mathfrak{S}_n \to D_n$, *что если*

$$S\sigma = s_1s_2 \ldots s_n \quad \text{и} \quad V\sigma = v_1v_2 \ldots v_n,$$

то справедливы следующие свойства:

(I) $S\sigma$ *есть переупорядочение* $V\sigma$;

(II) RISE SET $S\sigma$ = RISE SET σ.

Построение S-кода. Проводим индукцию по n. Для $n = 1$ очевидным образом полагаем $S\sigma = V\sigma = 0$ для единственной перестановки σ в $\mathfrak{S}_1$. Пусть $n \geqslant 2$ и $V\sigma = v_1v_2 \ldots v_n$ — V-код перестановки $\sigma = \sigma(1)\,\sigma(2) \ldots \sigma(n)$.

Положим $x = \max\{v_i\colon 1 \leqslant i \leqslant n\}$ и обозначим через $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ (соответственно $(d_1, d_2, \ldots, d_l)$) возрастающую последовательность таких индексов m, что $v_m < x$ (соответственно $v_m = x$). Пусть $t_{c_1}t_{c_2} \ldots t_{c_k}$ — S-код перестановки $\sigma(c_1)\,\sigma(c_2) \ldots \sigma(c_k)$. Образуем слово

$$w = t_1t_2 \ldots t_n =$$
$$= t_1 \ldots t_{d_1-1}xt_{d_1+1} \ldots t_{d_2-1}xt_{d_2+1} \ldots t_{d_l-1}xt_{d_l+1} \ldots t_n.$$

S-код $s_1s_2 \ldots s_n$ перестановки $\sigma = \sigma(1)\,\sigma(2) \ldots \sigma(n)$ получается при помощи следующей процедуры:

(1) $s_1s_2 \ldots s_{d_1-1} \leftarrow t_1t_2 \ldots t_{d_1-1}$;

$\sigma(n+1) \leftarrow 0$; $d_{l+1} \leftarrow n+1$; $j \leftarrow 1$;

(2) $m \leftarrow d_j$;

(3) если $\sigma(m) > \sigma(m-1)$ и $\sigma(m+1)$,

тогда

$$s_m s_{m+1} \dots s_{d_{j+1}-1} \leftarrow x t_{m+1} \dots t_{d_{j+1}-1}$$

и перейти к (6);

(4) если $\sigma(m) < \sigma(m-1) < \sigma(m+1)$ и $s_{m-1} < t_{m+1}$ или если $\sigma(m-1) > \sigma(m) > \sigma(m+1)$, то обозначить через q позицию самого близкого пика к m, расположенного слева от него, иными словами, q определяется неравенствами

$$1 \leqslant q \leqslant m-1 \quad \sigma(q-1) < \sigma(q),\ \sigma(q) > \sigma(q+1) > \dots$$
$$\dots > \sigma(m-1) > \sigma(m);$$

тогда

$$s_q s_{q+1} s_{q+2} \dots s_{m-1} s_m s_{m+1} \dots s_{d_{j+1}-1} \leftarrow$$
$$\leftarrow x s_q s_{q+1} \dots s_{m-2} s_{m-1} t_{m+1} \dots t_{d_{j+1}-1},$$

и перейти к (6);

(5) (в других случаях) обозначить через q позицию самого близкого пика к m, расположенного справа от него; иными словами, q есть целое число, определяемое соотношениями:

$$m+1 \leqslant q \leqslant n,$$
$$\sigma(m) < \sigma(m+1) < \dots \sigma(q),\ \sigma(q) > \sigma(q+1);$$

тогда

$$s_m s_{m+1} \dots s_{q-1} s_q s_{q+1} \dots s_{d_{j+1}-1} \leftarrow t_{m+1} t_{m+2} \dots t_q x t_{q+1} \dots t_{d_{j+1}-1};$$

(6) если $j = l$, то алгоритм закончен; положить

$$S\sigma \leftarrow s_1 s_2 \dots s_n;$$

в противном случае увеличить j на 1 и перейти к (2).

Замечание 1. Шаг (5) предыдущего алгоритма полностью определен. В самом деле, $\sigma(m) = \sigma(d_j) > \sigma(d_{j+1})$ в силу свойства 1. Поэтому из неравенств $\sigma(m) < \sigma(m+1) < \dots < \sigma(q)$ следует, что $(m=)\ d_j < q < d_{j+1}$.

Замечание 2. Можно убедиться в том, что $S\sigma$ принадлежит полностью D_n, проверяя, что на каждом этапе s_i, которые определяются, удовлетворяют неравенству $s_i \leqslant i-1$.

Замечание 3. Тот факт, что

$$\mathrm{RISE\ SET}\ \ S\sigma = \mathrm{RISE\ SET}\ \sigma,$$

проверяется без труда при применении каждого шага (3), (4) и (5).

Замечание 4. Если V-код перестановки σ содержит лишь буквы, меньшие или равные 1, то $S\sigma = V\sigma$.

Замечание 5. Пусть $V\sigma = v_1 v_2 \ldots v_n$ — V-код перестановки $\sigma = \sigma(1)\,\sigma(2)\ldots\sigma(n)$ и $x = \max\{v_i\colon\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, x$ обозначим через $c_1^i, c_2^i, \ldots, c_{ki}^i$ возрастающую последовательность таких индексов m, что $v_m \leqslant i$ и σ_i есть подслово $\sigma_i = \sigma(c_1^i)\,\sigma(c_2^i)\ldots\sigma(c_{ki}^i)$. Чтобы применить предыдущий алгоритм, определим последовательно $S\sigma_i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, x$.

В приводимом ниже примере указывается последовательность шагов алгоритма (обозначенная номерами от 11 до 15) только для определения $S\sigma_3$.

$$
\begin{array}{rcccccccccccccc l}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & \\
\sigma = & 9 & 11 & 3 & 10 & 2 & 8 & 7 & 14 & 13 & 6 & 5 & 1 & 4 & 12 & \\
V\sigma = & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 & 0 & 3 & 2 & \\
S\sigma_1 = & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 & . & . & \\
S\sigma_2 = & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & . & . & 2 & 2 & . & . & 0 & . & 2 & \\
w = & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 & 0 & 3 & 2 & \\
s_1 \ldots s_5 = & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & & & & & & & & & & (11) \\
s_1 \ldots s_6 = & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & & & & & & & & & (13) \\
s_1 \ldots s_9 = & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 3 & 2 & & & & & & (15) \\
s_1 \ldots s_{10} = & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & & & & & (14) \\
s_1 \ldots s_{11} = & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 2 & 0 & & & (14) \\
S\sigma = & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 2 & 0 & 2 & 3 & (15)
\end{array}
$$

Ниже мы приведем конструкцию обращения S^{-1} для S. Утомительно, но несложно проверить, что $S^{-1} \circ S$ — тождественное отображение. При описании S^{-1} мы увидим, что свойство 2 V-кода играет узловую роль.

Алгоритм для S^{-1}. Пусть $w = s_1 s_2 \ldots s_n$ — слово из D_n и $x = \max\{s_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

Обозначим через $d_1, d_2, \ldots, d_l$ такие индексы i, что $s_i = x$. Слово

$$w' = s_1 \ldots s_{d_1 - 1} s_{d_1 + 1} \ldots s_{d_l - 1} s_{d_l + 1} \ldots s_n$$

по индукции есть S-код перестановки σ', V-код которой является переупорядочением w' и обозначается

$$v' = v_1 \ldots v_{d_1 - 1} v_{d_1 + 1} \ldots v_{d_l - 1} v_{d_l + 1} \ldots v_n.$$

Составим слово

$$
\begin{aligned}
v &= v_1 \ldots v_n = \\
&= v_1 \ldots v_{d_1 - 1} x v_{d_1 + 1} \ldots v_{d_l - 1} x v_{d_l + 1} \ldots v_n
\end{aligned}
$$

и определим перестановку

$$\tau = \tau(1)\,\tau(2)\ldots\tau(n),$$

V-код которой есть v.

Чтобы получить перестановку $\sigma = \sigma(1)\,\sigma(2)\ldots\sigma(n)$, S-код которой есть w, применим следующую процедуру:

(1) $\sigma(d_l+1)\,\sigma(d_l+2)\ldots\sigma(n) \leftarrow \tau(d_l+1)\,\tau(d_l+2)\ldots\tau(n)$; $\sigma(0) \leftarrow 0$; $\sigma(n+1) \leftarrow 0$; $d_0 \leftarrow 0$; $j \leftarrow l$;

(2) $m \leftarrow d_j$;

(3) если $\tau(m) > \tau(m-1)$ и $\sigma(m+1)$, то $\sigma(d_{j-1}+1)\,\sigma(d_{j-1}+2)\ldots$ $\ldots\sigma(m-1)\,\sigma(m) \leftarrow \tau(d_{j-1}+1)\,\tau(d_{j-1}+2)\ldots\tau(m-1)\,\tau(m)$; перейти к (6);

(4) если $\tau(m-1)$ и $\tau(m) < \sigma(m+1)$, то, обозначив через p наименьший индекс, такой, что $m+1 \leqslant p \leqslant n$ и $\sigma(m+1) > \sigma(m+2) > \ldots > \sigma(p-1) > \sigma(p) > \tau(m)$, положить

$$\sigma(d_{j-1}+1)\,\sigma(d_{j-1}+2)\ldots\sigma(m-1)\,\sigma(m)\,\sigma(m+1)\ldots\sigma(p-1)\,\sigma(p),$$

равное

$$\tau(d_{j-1}+1)\,\tau(d_{j-1}+2)\ldots\tau(m-1)\,\sigma(m+1)\,\sigma(m+2)\ldots\sigma(p)\,\tau(m);$$

перейти к (6);

(5) если $\tau(m-1) > \tau(m)$ и $\sigma(m+1)$, то $\sigma(m) \leftarrow \tau(m)$, если $d_{j-1} = m-1$; в противном случае, обозначив через p такой наименьший индекс, что $d_{j-1}+1 \leqslant p \leqslant m-1$ и $\tau(m) < \tau(p) < \tau(p+1) < \ldots < \tau(m-1)$, положить

$$\sigma(d_{j-1}+1)\,\sigma(d_{j-1}+2)\ldots\sigma(p-1)\,\sigma(p)\,\sigma(p+1)\ldots\sigma(m-1)\,\sigma(m),$$

равное

$$\tau(d_{j-1}+1)\,\tau(d_{j-1}+2)\ldots\tau(p-1)\,\tau(m)\,\tau(p)\ldots\tau(m-2)\,\tau(m-1);$$

(6) если $j = 1$, то алгоритм закончен; положить

$$S^{-1}w \leftarrow \sigma(1)\,\sigma(2)\ldots\sigma(n);$$

в противном случае уменьшить j на 1 и перейти к (2).

Сохраним те же обозначения, что и в описании алгоритма для S^{-1}, с той разницей, что мы записываем $w = s(1)\,s(2)\ldots$ $\ldots s(n)$ вместо $s_1 s_2 \ldots s_n$. Обозначим, кроме того, через $c_1^i c_2^i \ldots c_{ki}^i$ возрастающую последовательность таких индексов m, что $s(m) \leqslant i$ $(i = 1, 2, \ldots, x)$. Чтобы получить $\sigma = S^{-1}w$, определим последовательно $\sigma_1' = S^{-1}s(c_1^i)\,s(c_2^i)\ldots s(c_{ki}^i)$, используя предыдущий алгоритм для $j = 1, 2, \ldots, x$. Естественно, что $\sigma_x' = \sigma$. Этот процесс применяется в следующем ниже примере.

Пример.

$$
\begin{array}{rcccccccccccccccl}
w= & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 2 & 0 & 2 & 3 & \\
v_1= & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 & . & . & \\
\tau_1=\sigma_1'= & 4 & 6 & 3 & 5 & 2 & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & \\
v_1=v_1'= & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & 0 & . & . & \\
v_2= & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & . & 2 & . & . & . & 2 & 0 & 2 & . & \\
\tau_2= & 4 & 6 & 3 & 5 & 2 & . & 9 & . & . & . & 8 & 1 & 7 & . & \\
\sigma_2'= & 4 & 6 & 3 & 5 & 2 & . & 9 & . & . & . & 8 & 1 & 7 & . & \\
v_2'= & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & . & 2 & . & . & . & 2 & 0 & 2 & . & \\
v_3= & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 2 & 0 & 2 & 3 & \\
\tau_3= & 9 & 11 & 3 & 10 & 2 & 8 & 14 & 7 & 6 & 5 & 13 & 1 & 12 & 4 & \\
 & & & & & & & & & & & 13 & 1 & 4 & 12 & (15) \\
 & & & & & & & & & & 13 & 5 & 1 & 4 & 12 & (14) \\
 & & & & & & & & & 13 & 6 & 5 & 1 & 4 & 12 & (14) \\
 & & & & & & & 7 & 14 & 13 & 6 & 5 & 1 & 4 & 12 & (15) \\
\sigma_3'= & 9 & 11 & 3 & 10 & 2 & 8 & 7 & 14 & 13 & 6 & 5 & 1 & 4 & 12 & (13)
\end{array}
$$

$$\sigma = S^{-1}w = \sigma_3'.$$

7. ЭЙЛЕРОВА СТАТИСТИКА IMAL

Напомним, что *код Лемера* перестановки $\sigma=\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$ есть последовательность $L\sigma = x_1x_2\ldots x_n$, определенная следующим образом:

$$x_i = |\{j : 1 \leqslant j \leqslant i-1, \quad \sigma(j) < \sigma(i)\}|$$

для любого $i=1, 2, \ldots, n$. Код $L\sigma$ принадлежит множеству D_n. Кроме того, очевидно, что $L\colon \mathfrak{S}_n \to D_n$ биективно и что, с другой стороны,

$$\mathrm{RISE\ SET}\ L\sigma = \mathrm{RISE\ SET}\,\sigma$$

для любого σ из $\mathfrak{S}_n$. Напомним еще, что для любого $w = x_1x_2\ldots x_n$ из D_n через $\mathrm{IMA}\,w$ обозначается число различных x_i в w и что полагают

$$\mathrm{IMAL} = \mathrm{IMA} \circ \mathrm{L}.$$

В предыдущем разделе мы видели, что биекция $S\colon \mathfrak{S}_n \to D_n$ обладает следующими свойствами:

(i) $\mathrm{RISE\ SET}\quad S\sigma = \mathrm{RISE\ SET}\,\sigma$,

(ii) $\mathrm{IMA}\,S\sigma = \mathrm{IRISE}\,\sigma$.

Композиция S и L^{-1} дает

$$\mathfrak{S}_n \xrightarrow{S} D_n \xrightarrow{L^{-1}} \mathfrak{S}_n.$$

Отсюда

$$\mathrm{RISE\ SET}\ L^{-1}\circ S\sigma = \mathrm{RISE\ SET}\,\sigma,$$
$$\mathrm{IMAL}\ L^{-1}\circ S\sigma = \mathrm{IMA}\,S\sigma = \mathrm{IRISE}\,\sigma, \tag{16}$$

Две перестановки $L^{-1} \circ S\sigma$ и σ, имеющие одинаковое RISE SET, имеют также одно и то же MAJ. Тогда тождества (16) показывают, что *пары* (IRISE, MAJ) *и* (IMAL, MAJ) *имеют одинаковое распределение на* $\mathfrak{S}_n$. На самом деле тождества (16) содержат более сильный результат.

Теорема 3. *Для любого множества* T, *такого, что* $0 \in T \subset \subset [n-1]$, *статистики* IRISE *и* IMAL *имеют одинаковое распределение на множестве*

$$\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \text{RISE SET}\,\sigma = T\}.$$

Иллюстрацией этой теоремы служит табл. 3, построенная для $n=4$.

Таблица 3

RISE SET	σ	$L\sigma$	IMALσ	IRISEσ
0, 1, 2, 3	1 2 3 4	0 1 2 3	4	4
0, 1, 2	1 2 4 3 1 3 4 2 2 3 4 1	0 1 2 2 0 1 2 1 0 1 2 0	3 3 3	3 3 3
0, 1, 3	1 3 2 4 1 4 2 3 2 3 1 4 2 4 1 3 3 4 1 2	0 1 1 3 0 1 1 2 0 1 0 3 0 1 0 2 0 1 0 1	3 3 3 3 2	3 3 3 2 3
0, 2, 3	2 1 3 4 3 1 2 4 4 1 2 3	0 0 2 3 0 0 1 3 0 0 1 2	3 3 3	3 3 3
0, 1	1 4 3 2 2 4 3 1 3 4 2 1	0 1 1 1 0 1 1 0 0 1 0 0	2 2 2	2 2 2
0, 2	2 1 4 3 3 2 4 1 3 1 4 2 4 1 3 2 4 2 3 1	0 0 2 2 0 0 2 0 0 0 2 1 0 0 1 1 0 0 1 0	2 2 3 2 2	2 2 3 2 2
0, 3	3 2 1 4 4 2 1 3 4 3 1 2	0 0 0 3 0 0 0 2 0 0 0 1	2 2 2	2 2 2
0	4 3 2 1	0 0 0 0	1	1

Добавление

ЭЙЛЕРОВЫ РАЗБИЕНИЯ ЕДИНИЧНОГО ГИПЕРКУБА

Р. П. Стенли

В предыдущей работе Доминик Фоата упомянул результат, неявно содержащийся в одной из работ Лапласа, что объем R_{nk} части единичного гиперкуба $[0, 1]^n$, содержащейся между двумя гиперплоскостями $\sum x_i = k-1$ и $\sum x_i = k$, выражается формулой $\frac{1}{n!} A_{nk}$, где A_{nk} есть число Эйлера. С другой стороны, из хорошо известной комбинаторной интерпретации A_{nk} как числа перестановок $\{1, 2, \ldots, n\}$ с k подъемами (считая один подъем сначала), следует, что $\frac{1}{n!} A_{nk}$ есть также объем множества S_{nk} всех точек $(x_1, \ldots, x_n) \in [0, 1]^n$, для которых $x_i < x_{i+1}$ точно для k значений i (включая по условию $i = 0$).

Фоата поставил задачу, существует ли некоторое явно выраженное, сохраняющее размерность отображение φ: $[0, 1]^n \to \to [0, 1]^n$, переводящее S_{nk} в R_{nk}, за исключением, возможно, множества меры нуль.

Мы утверждаем, что такое отображение может быть задано следующим образом: определим φ: $[0, 1]^n \to [0, 1]^n$ посредством $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$, где

$$y_i = \begin{cases} x_{i-1} - x_i, & \text{если } x_i < x_{i-1}; \\ 1 + x_{i-1} - x_i, & \text{если } x_i > x_{i-1}. \end{cases}$$

Положим $x_0 = 0$ и оставим φ неопределенным на множестве меры нуль, состоящем из точек, где некоторые $x_{i-1} = x_i$. Если $(x_1, \ldots, x_n) \in S_{nk}$, то $\sum y_i = k - x_n$. Следовательно, $(y_1, \ldots, y_n) \in \in R_{nk}$. Кроме того, в каждой из 2^{n-1} областей $[0, 1]^n$ определено, будет ли $x_i < x_{i-1}$ или $x_i > x_{i-1}$ для $2 \leqslant i \leqslant n$; φ есть аффинное преобразование детерминанта $(-1)^n$. Следовательно, преобразование φ размерность сохраняет. Наконец, определено обращение φ (за исключением множества меры нуль, где некоторые $y_1 + y_2 + \ldots + y_i$ суть целые) следующим образом:

$$x_i = 1 + [y_1 + \ldots + y_i] - y_1 - \ldots - y_i.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Carlitz L. q-Bernoulli and Eulerian numbers, Trans. Amer. Math. Soc., 76 (1954), 332—350.
2. Carlitz L. The expansion of certain products, Proc. Amer. Math. Soc., 7 (1956), 558—564.
3. Carlitz L. Eulerian numbers and polynomials, Math. Magazine, 33 (1959), 247—260.
4. Carlitz L. A combinatorial property of q-Eulerian numbers, Amer. Math. Monthly, 82 (1975), 51—54.
5. Carlitz L., Roselle D. P., Scoville R. A. Permutations and sequences with repetitions by number of increases, J. Combinatorial Theory, I (1966), 350—374.
6. Cheema M. S., Motzkin T. S. Multipartitions and Multipermutations Proc. of Symposia in Pure Math., vol. 19, Combinatorics, Amer. Math. Soc., Providence (1971), 39—70.
7. Comtet L. Analyse Combinatoire, vol. 2, Presses Universitaires de France, Paris (1970).
8. Dumont D. Interprétations combinatoires des nombres de Genocchi, Duke Math. J., 41 (1974), 305—318.
9. Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 2. Пер. с англ. — М.: «Мир», 1967.
10. Foata D. On the Netto inversion number of a sequence, Proc. Amer. Math., Soc., 19 (1968), 236—240.
11. Foata D., Schützenberger M. — P. Théorie géométrique des polynômes eulériens, Lecture Notes in Math. n 138, Springer—Verlag Berlin. (1970).
12. Foata D., Schützenberger M. — P. Major index and inversion number of permutations, A paraitre dans Math. Nachrichten (1977a).
13. Foata D., Schützenberger M. — P. La troisième transformation fondamentale du groupe des permutations. A paraitre (1977b).
14. Laplace Oeuvres complètes, vol. 7, (1820), réédité par Gauthier — Villars, Paris, p. 257 et suivantes (1886).
15. Randow von R., Meyer W. Ein Würfelschnittproblem und Bernoullische Zahlen, Math. Ann., 193 (1971), 315—321.
16. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1963.
17. Roselle D. P. Coefficients associated with the expansion of certain products, Proc. Amer. Math. Soc., 45 (1974), 144—150.
18. Stanley R. P. Binomial posets, Möbius inversion, and permutation enumeration, J. Combinatorial Theory.
19. Stanley R. P. Eulerian partitions of a unit hypercube.