

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

Series: Institut de Mathématique, Université de Strasbourg

Adviser: P. A. Meyer

579

Combinatoire et Représentation du Groupe Symétrique

Actes de la Table Ronde du C.N.R.S.
tenue à l'Université Louis-Pasteur de
Strasbourg, 26 au 30 avril 1976

Edité par D. Foata



Springer-Verlag
Berlin · Heidelberg · New York 1977

Editor

Dominique Foata
Département de Mathématique
Université Louis-Pasteur de Strasbourg
7, rue René-Descartes
67084 Strasbourg/France

AMS Subject Classifications (1970): 02H99, 05A10, 05A15, 05A17, 05A19, 10A45, 14M05, 14M15, 16A24, 20B20, 20C15, 20C20, 20C30, 33A30, 68A10

ISBN 3-540-08143-7 Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York
ISBN 0-387-08143-7 Springer-Verlag New York · Heidelberg · Berlin

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically those of translation, re-printing, re-use of illustrations, broadcasting, reproduction by photocopying machine or similar means, and storage in data banks.

Under § 54 of the German Copyright Law where copies are made for other than private use, a fee is payable to the publisher, the amount of the fee to be determined by agreement with the publisher.

© by Springer-Verlag Berlin · Heidelberg 1977

Printed in Germany

Printing and binding: Beltz, Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr. 2141/3140-543210

TABLE DES MATIERES

<u>Introduction</u> par Dominique FOATA	1
<u>Liste des participants</u>	8
⁽¹⁾ Gilbert de B. ROBINSON	
The papers of Alfred Young	11
1. <u>Algèbre des tableaux de Young.</u>	
⁽²⁾ G. VIENNOT	
Une forme géométrique de la correspondance de Robinson-Schensted	29
⁽³⁾ M.-P. SCHÜTZENBERGER	
La correspondance de Robinson	59
⁽⁴⁾ Curtis GREENE	
Some order-theoretic properties of the Robinson-Schensted correspondence	114
⁽⁵⁾ Dominique FOATA	
Une propriété de vidage-remplissage des tableaux de Young .	121
2. <u>Fonctions symétriques.</u>	
⁽⁶⁾ A. O. MORRIS	
A survey on Hall-Littlewood functions and their applications to representation theory	136
⁽⁷⁾ Glänffrwd THOMAS	
Further results on Baxter sequences and generalized Schur functions	155
⁽⁸⁾ Ladnor GEISSINGER	
Hopf algebras of symmetric functions and class functions ...	168
⁽⁹⁾ A. LASCOUX	
Calcul de Schur et extensions grassmanniennes des λ -anneaux	182
⁽¹⁰⁾ Richard P. STANLEY	
Some combinatorial aspects of the Schubert calculus	217
⁽¹¹⁾ James McCONNELL	
Note on multiplication theorems for Schur functions	252

3. Calcul des caractères et groupes de permutations.

(¹²) Jan SAXL	
Restrictions of characters, generosity, interchange and co- loured graphs	258
(¹³) Norbert ESPER and Adalbert KERBER	
Permutrization of representations	267
(¹⁴) Michael KLEMM	
Charaktere mehrfach transitiver Permutationsgruppen	281

4. Partitions et algorithmes combinatoires.

(¹⁵) George E. ANDREWS	
Implications of the MacMahon conjecture	287
(¹⁶) Walter OBERSCHELP	
Monotonicity for structure numbers in theories without iden- tity	297
(¹⁷) S. G. WILLIAMSON	
On the ordering, ranking, and random generation of basic combinatorial sets	311

INTRODUCTION

Dominique Foata (*)

Ce volume contient le texte des conférences données au cours de la Table Ronde du C.N.R.S., tenue à Strasbourg du 26 au 30 avril 1976, sur le thème "Combinatoire et représentation du groupe symétrique". Comme le rapporte Ladnor Geissinger ⁽⁸⁾ dans les présents actes, le professeur Van der Corput [1] disait en 1950 au cours d'une conférence sur les fonctions symétriques, faite aussi à Strasbourg : "Le sujet de cette conférence est si simple et si souvent traité que je m'étonne qu'il soit encore possible d'en dire quelque chose de nouveau. Je me propose cependant d'essayer." Vingt-six ans après d'autres récidivent, et c'est l'étonnement du professeur van der Corput qui nous surprend aujourd'hui.

Il est courant, en effet, de voir des sujets abandonnés depuis fort longtemps reprendre une vigueur nouvelle parce que de nouveaux outils se prêtent mieux à leur étude ou que lesdits sujets trouvent une application inattendue dans d'autres domaines. C'est le cas, par exemple, de la théorie des invariants, qui, à la suite des travaux de Mumford (cf. Dieudonné et Carrell [2]), devient un outil

(*) Les nombres entre crochets renvoient aux mémoires mentionnés à la fin de cet article ; les nombre entre parenthèses aux articles du présent volume.

fondamental dans l'étude des variétés algébriques. C'est aussi le cas de ce chapitre de la théorie des invariants que constitue la théorie de la représentation du groupe symétrique. Celle-ci a été développée, d'une part, par l'école allemande (Frobenius, Schur) et, d'autre part, de façon plus calculatoire, par Alfred Young (cf. Littlewood [3]). Les travaux de l'école allemande ont très vite été intégrés dans le corpus de l'algèbre moderne, et dans une certaine mesure, contiennent ceux de Young (cf. Rutherford [4]). Ces derniers sont, en revanche, plus explicites et fournissent, en outre, une géométrie ou une combinatoire des calculs. On peut donc penser que l'essentiel a été dit par ces auteurs sur cette théorie, à l'exclusion de certaines applications comme, par exemple, le calcul des caractères, et que le livre de Littlewood [3] apporte une dernière conclusion (**).

Or on observe, depuis quelques années, un renouveau du calcul et une recherche de l'explicite dans plusieurs domaines des mathématiques. Citons, par exemple la théorie algébrique des nombres, où l'on détermine de nouveaux algorithmes de calcul pour la classification des corps de nombres (cf. par exemple Cartier et Roy [5]) ou l'étude des singularités dans les applications différentiables. Dans ce dernier domaine, il paraît important de signaler le travail de Morin [6] dans lequel celui-ci développe toute une combinatoire de tableaux, qui mériterait d'être rapprochée de celle des tableaux de Young dont il est question tout au long de ce volume.

La représentation du groupe symétrique n'a pas échappé à cette remise en question due également au grand intérêt que soulèvent à l'heure actuelle les problèmes de nature combinatoire. Cette redécouverte a été longue à se faire, mais, depuis quelques années, les travaux sur le sujet sont de plus en plus abondants. Leurs auteurs se sont naturellement tournés vers les articles originaux de Young. On sait, en effet, depuis son troisième mémoire [7], que les propriétés de la représentation du groupe symétrique reposent sur celles d'objets combinatoires, les tableaux standards, introduits par lui-même. C'est à partir de ceux-ci qu'on peut définir des idempotents de l'algèbre du groupe symétrique. Or ces tableaux possèdent des propriétés combinatoires tout à fait remarquables, bien adaptées à l'étude des fonctions symétriques. Curieusement, on a mis longtemps à les découvrir. La correspondance de Robinson, par exemple, entre per-

(**) Le livre de D. E. Littlewood, (*The Theory of Group Characters and Matrix Representations of Groups*, Oxford, Clarendon Press, 1940) a été réimprimé en 1958 mais il est, hélas, épuisé. Une réimpression serait hautement souhaitable.

mutations et paires de tableaux standards a été trouvée en 1938. Il a fallu attendre 1961, pour qu'avec Schensted, on ait un algorithme simple et ingénieux pour la décrire. Ce n'est que récemment, à la suite des travaux de Schützenberger (1963, 1972), Knuth (1970), Thomas (1974), Greene (1974), que l'on a pu dégager une algèbre des tableaux standards, où cette construction trouve un cadre naturel.

Cet exemple illustre parfaitement l'un des courants de recherche de la Combinatoire contemporaine, pour ne parler que de celle qui ne se forge pas des problèmes artificiels sur lesquels elle théorise en vase clos : on cherche à interpréter combinatoirement les identités de l'algèbre ou de l'analyse classique, comme par exemple ici, les identités sur les fonctions symétriques, c'est-à-dire qu'on essaie de trouver des modèles ensemblistes, ici les tableaux de Young, et des correspondances entre ces modèles, qui rendent compte de ces identités et qui fournissent aussi une géométrie du calcul sous-jacent. Ces correspondances sont, en général, définies par des algorithmes. Dans un second stade, il s'agit alors de linéariser ceux-ci dans un cadre algébrique convenable. Le sujet est donc en pleine mouvance et ne semble pas encore prêt à être complètement théorisé. Signalons, cependant, la tentative extrêmement intéressante de G.-C. Rota, qui, suivant encore les idées de Young, propose en caractéristique quelconque, une théorie renouvelée des invariants qui engloberait la théorie combinatoire des fonctions symétriques et de la représentation du groupe symétrique (cf. [8], [9]).

Le but de cette Table Ronde a été de faire le point sur ces travaux, en dépit du risque (ou plus exactement dans l'espoir) de voir ceux-ci devenir un jour obsolètes dans le cadre d'une théorie plus élaborée. La diversité des sujets abordés montre que l'on n'est pas encore à ce stade. Pour la commodité du lecteur, les articles ont été classés sous quatre rubriques (1. Algèbre des tableaux de Young ; 2. Fonctions symétriques ; 3. Calcul des caractères et groupes de permutations ; 4. Partitions et algorithmes combinatoires.). Chaque auteur a bien voulu réviser -souvent plusieurs fois- le texte présenté à Strasbourg en avril 1976, pour le rendre directement accessible au lecteur non spécialiste.

Le professeur Robinson prépare une édition des oeuvres complètes d'Alfred Young. En primeur, il nous donne ici (¹) un article -le premier du présent volume- sur les travaux de son Maître.

La section 1 débute par la contribution de Gérard Viennot (²). Celui-ci propose une spacialisation nouvelle pour décrire la correspondance de Robinson mentionnée plus haut. Cet article placé au début devrait permettre au lecteur non-spécialiste de se familiariser rapidement et agréablement avec l'une des constructions les plus fondamentales de cette étude. Puis, dans un article de

synthèse originale, Schützenberger ⁽³⁾ pose les fondements de la théorie combinatoire de la représentation du groupe symétrique. Il réussit avec son algorithme du "jeu de taquin" à intégrer dans une même structure la correspondance de Robinson et les constructions qui en résultent. Il montre, en particulier, que l'ensemble des tableaux standards peut être muni d'une structure de monoïde, d'où il tire une démonstration parlante pour l'imaginer de la fameuse règle de Littlewood-Richardson pour la multiplication de deux fonctions de Schur. Dans la contribution suivante, Curtis Greene ⁽⁴⁾ donne une extension de la correspondance de Robinson à certains ensembles partiellement ordonnés. Dans le dernier article de cette section ⁽⁵⁾, on trouvera la preuve d'une conjecture de Schützenberger sur l'opération dite du vidage - remplissage des tableaux standards.

La section 2 ("Fonctions symétriques") s'ouvre par un article de mise au point d'Alun O. Morris ⁽⁶⁾ sur les fonctions de Hall-Littlewood, qui sont les extensions naturelles des fonctions de Schur. Pour le non-spécialiste, la lecture de cet article pourrait être précédée de celle d'un mémoire classique sur les fonctions symétriques, par exemple celui de Foulkes [10] ou de Stanley [11]. Dans l'article suivant, Thomas ⁽⁷⁾ utilise les propriétés des opérateurs de Baxter introduits par Rota [12] pour obtenir des interprétations combinatoires nouvelles sur une classe de fonctions définies sur l'anneau des fonctions de Hall-Littlewood. Les deux articles suivants par Ladnor Geissinger ⁽⁸⁾ et A. Lascoux ⁽⁹⁾ reprennent l'étude des fonctions symétriques pour l'intégrer dans un cadre algébrique classique. Le premier choisit le cadre des algèbres de Hopf. Les calculs y sont aisés. De plus, les opérateurs sur les fonctions symétriques (Hammond, Van der Corput, Foulkes) y sont définis de façon enfin naturelle. A partir de problèmes posés par la géométrie algébrique, le second montre qu'on peut avoir des résultats nouveaux sur les fonctions de Schur en se plaçant dans le cadre des λ -anneaux de Grothendieck. Le non-spécialiste découvrira un modèle très fécond dans lequel les identités sur les fonctions symétriques s'obtiennent quasiment sans calcul. Le géomètre algébriste, de son côté, retrouvera, en fin d'article, la traduction géométrique de tous les objets combinatoires qui y sont introduits. C'est une théorie combinatoire du Calcul de Schubert que propose ensuite Richard P. Stanley ⁽¹⁰⁾, dans un beau travail d'initiation qui permettra au combinatorialiste de prendre un contact de plus en plus nécessaire avec certains problèmes de la géométrie algébrique. Cette section se termine par une note de James McConnell ⁽¹¹⁾ qui attire l'attention sur la disparité entre les deux règles de multiplication connues pour les fonctions de Schur, celle de Littlewood-Richardson, et celle de Murnaghan-Newell.

Dans la section 3, Jan Saxl ⁽¹²⁾ présente une vue d'ensemble sur les problèmes de transitivité dans les groupes de permutations, en relation avec le calcul des caractères et donne quelques applications de cette théorie au coloriage des

des graphes. Puis, Norbert Esper et Adalbert Kerber ⁽¹³⁾ étudient la permutrisation des représentations, pour l'appliquer à la résolution de certaines équations dans les groupes. Enfin, Michael Klemm ⁽¹⁴⁾ trouve des relations nouvelles pour les caractères de certains groupes de permutations plusieurs fois transitifs.

La section 4 aurait été plus développée si nous avions pu inviter un plus grand nombre de spécialistes de la théorie des partitions. Dans la première contribution, George E. Andrews ⁽¹⁵⁾ donne plusieurs conséquences remarquables de la conjecture de MacMahon sur les fonctions génératrices de certaines partitions planes. Nous avons inclus l'article de Walter Oberschelp ⁽¹⁶⁾ car ses calculs asymptotiques du nombre de modèles en logique font appel à certaines techniques combinatoires intéressantes du groupe symétrique. Le volume se termine par le mémoire de S. G. Williamson ⁽¹⁷⁾. Il nous a paru essentiel d'avoir dans ce volume un article traitant des algorithmes combinatoires. Lorsqu'on veut, par exemple, construire une table des coefficients $g(\lambda, \mu, \nu)$ de Littlewood-Richardson, il est indispensable de disposer d'un algorithme efficace pour engendrer les partitions λ . On trouvera de tels algorithmes dans ce dernier article.

Signalons que deux articles présentés à cette Table Ronde feront l'objet d'une publication séparée. Il s'agit des articles de

⁽¹⁸⁾ H. O. FOULKES, Eulerian numbers and representations of symmetric groups.
University of Wales, Swansea, G.-B. .

et de

⁽¹⁹⁾ Gordon JAMES, A characteristic-free approach to the representation theory
of $\mathfrak{S}_n$, J. of Algebra, à paraître.

Dans deux articles récents ([13], [14]) ainsi que dans ⁽¹⁸⁾, H. O. Foulkes trouve de nouvelles relations entre les nombres classiques (sécants, tangents, eulériens) et les caractères irréductibles du groupe symétrique. Enfin, c'est en reprenant les vieux travaux de Young que Gordon James ⁽¹⁹⁾ a réussi à développer, en caractéristique quelconque, une théorie de la représentation du groupe symétrique.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. G. van der Corput, Sur les fonctions symétriques, Nederl. Akad. Wetensch. Proc., 53 (1950), 216-230.
MMM

2. J. Dieudonné and J. B. Carrell, Invariant Theory, Old and New, Reprinted from Advances in Mathematics, Academic Press, New York, 1970.
3. D. E. Littlewood, The theory of group characters and matrix representations of groups, Oxford at the Clarendon Press, 1940.
4. D. E. Rutherford, Substitutional Analysis, Hafner Publ. Co., New York, 1948.
5. P. Cartier et Y. Roy, Certains calculs numériques relatifs à l'interpolation p-adique des séries de Dirichlet, Modular functions of one variable 3, [Proc. Internat. Summer School Univ. Antwerpen RUCA, July 17-August 3, 1972], W. Kuyk, J.-P. Serre, ed., Lect. Notes in Math. n° 350, Springer-Verlag, Berlin (1973), 269-349.
6. B. Morin, Calcul jacobien, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 8 (1975), 1-98.
7. A. Young, On quantitative substitutional analysis, Proc. London Math. Soc., 28 (1926), 255-292.
8. G.-C. Rota, Combinatorial Theory and Invariant Theory, Lectures at Bowdoin College (1971), Dept. Math., M.I.T., Cambridge, 212 pages.
9. G.-C. Rota, On the foundations of Combinatorial Theory : IX ; Combinatorial Methods in Invariant Theory, Studies in Appl. Math., 53 (1974), 185-216.
10. H. O. Foulkes, A survey of some combinatorial aspects of symmetric functions, Permutations [Actes du Colloque sur les permutations, Paris, 1972], A. Lentin, ed., Gauthier-Villars, 1974, 79-92.
11. R. P. Stanley, Theory and application of plane partitions, I & II, Studies in Appl. Math., 50 (1971), 167-188 & 259-279.
12. G.-C. Rota, Baxter algebras and combinatorial identities I & II, Bull. Amer. Math. Soc., 75 (1969), 325-329 & 330-334.
13. H. O. Foulkes, Enumeration of permutations with prescribed up-down and inversion sequences, Discrete Math., 15 (1976), 235-252.
14. H. O. Foulkes, Tangent and secant numbers and representations of symmetric

groups, Discrete Math. 15 (1976), 311-324.

REMERCIEMENTS

Cette Table Ronde du Centre National de la Recherche Scientifique a pu avoir lieu grâce au remarquable effort financier de l'Université Louis-Pasteur de Strasbourg. Le Conseil Scientifique de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée de Strasbourg et, tout particulièrement, son directeur, Claude Godbillon, ont su comprendre l'intérêt d'une telle rencontre et, par leur soutien, ont pu élever cette Table Ronde au rang de colloque qu'elle méritait. Les conseils d'Adalbert Kerber, d'Aachen, ont été précieux dans la préparation de celle-ci. L'organisation matérielle a été assumée avec charme et précision par Mademoiselle Schirmann, Intendante du département de mathématique et Mademoiselle Lutzinger, secrétaire du Centre de Calcul de l'Esplanade. Cette dernière s'est chargée, en particulier, de la dactylographie de plusieurs textes de ce volume. Enfin, les participants, dont on trouvera la liste ci-après, ont, par leur présence active et leurs interventions, beaucoup contribué au succès de cette réunion.

LISTE DES PARTICIPANTS

- R. ALIMJANOVA
(Université d'Almaa-Ata, Kazakhstan, U.R.S.S.)
- G. E. ANDREWS
(University of Wisconsin at Madison, U.S.A.)
- L. COMTET
(Université de Paris XI, Orsay, F.)
- J. DÉSARMÉNIEN
(Université Louis-Pasteur, Strasbourg, F.)
- D. DUMONT
(Université Louis-Pasteur, Strasbourg, F.)
- K. ERDMANN
(Universität Giessen, R.F.A.)
- N. ESPER
(R.W.T.H., Aachen, R.F.A.)
- D. FOATA
(Université Louis-Pasteur, Strasbourg, F.)
- H. O. FOULKES
(University of Wales, Swansea, G.-B.)
- P. FRANKL
(Budapest, H.)
- J. FRANCON
(Université Louis-Pasteur, Strasbourg, F.)
- E. GANSNER
(M.I.T., Cambridge, U.S.A.)
- H. GAUDIER
(Université Louis-Pasteur, Strasbourg, F.)
- L. GEISSINGER
(University of North Carolina, Chapel Hill, U.S.A.)
- C. GREENE
(M.I.T., Cambridge, U.S.A.)
- W. HEISE
(Technische Universität, München, R.F.A.)
- HVILLON
(Université de Moscou, U.R.S.S.)
- A. IARROBINO
(University of Texas, Austin, U.S.A.)

B. RICHTER
(Freie Universität Berlin, R.F.A.)

G. de B. ROBINSON
(University of Toronto, Ontario, Canada)

E. RUCH
(Freie Universität Berlin, R.F.A.)

J. SAXL
(University of Oxford, G.-B.)

M.-P. SCHÜTZENBERGER
(Université de Paris VII, F.)

R. STANLEY
(M.I.T., Cambridge, U.S.A.)

V. STREHL
(Universität Erlangen-Nürnberg, R.F.A.)

R. STROSSER
(Université Louis-Pasteur, Strasbourg, F.)

G. P. THOMAS
(University College of Wales, Aberystwyth, G.-B.)

B. VAUQUELIN
(Université de Bordeaux, I, Talence, F.)

G. VIENNOT
(Ecole Normale Supérieure, Paris, F.)

B. WAGNER
(R.W.T.H., Aachen, R.F.A.)

H. WIELANDT
(Universität Tübingen, R.F.A.)

H. WILF
(University of Pennsylvania, Philadelphia, U.S.A.)

S. G. WILLIAMSON
(University of California, San Diego, U.S.A.)