

UNE PROPRIÉTÉ DU VIDAGE-REMPLISSAGE
DES TABLEAUX DE YOUNG

Dominique Foata

Le vidage-remplissage des tableaux standards de Young a été introduit par Schützenberger [1]. On trouvera dans son mémoire sur la correspondance de Robinson [2] plusieurs propriétés de cette transformation, et en particulier la conjecture suivante : soient φ et ψ deux tableaux standards de Young ne différant que par la position de deux entiers consécutifs ; soient φ^J et ψ^J les tableaux obtenus en appliquant à φ et à ψ l'opération vidage-remplissage J . Alors φ^J et ψ^J ne diffèrent que par une permutation π des positions des entiers, consistant en un cycle de longueur paire. L'objet de cette note est de démontrer cette conjecture dans le seul cas où les deux tableaux φ et ψ ne diffèrent que par la position de leurs deux plus grands entiers, et de préciser, dans ce cas, la nature du cycle de la permutation.

Rappelons que pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par tableau standard de Young [en abrégé : tableau] d'ordre n le couple $T = (I, f)$ constitué par un diagramme de Ferrers (c'est-à-dire un intervalle de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ayant $(1, 1)$ comme

élément minimum pour l'ordre naturel induit), de cardinal n , et une bijection croissante f de I sur $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Il est d'usage de représenter un diagramme de Ferrers comme une "grille" et d'inscrire dans la "case" (i, j) l'entier $f(i, j)$.

Par exemple,

(1) $T =$

6	8		
2	5	9	
1	3	4	7

est un tableau d'ordre 9.

L'opération vidage-remplissage est plus commode à définir et à étudier sur l'ensemble des mots de Yamanouchi, qui sont en bijection avec les tableaux.

Soit $a = a_1 a_2 \dots a_n$ un mot de longueur n dont les lettres a_i sont prises dans l'ensemble $N^* = \{1, 2, \dots\}$. Pour tout entier $i = 1, 2, \dots, n$ on définit b_i comme le nombre d'indices j tels que $1 \leq j \leq i$ et $a_j = a_i$, puis c_i comme le nombre d'indices j tels que $1 \leq j \leq i-1$ et $a_j = a_i - 1$, enfin $d_i = 0$ si $a_i = 1$ et $d_i = b_i - c_i$ si $a_i \geq 2$. On pose encore $s(a) = b = b_1 b_2 \dots b_n$, $c = c_1 c_2 \dots c_n$ et $d = d_1 d_2 \dots d_n$.

Le mot $a = a_1 a_2 \dots a_n$ est dit de Yamanouchi si l'on a $d_i \leq 0$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$.

Par exemple, avec $a = 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 1 \ 3 \ 2$
on a $s(a) = b = 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1 \ 4 \ 2 \ 3$
 $c = 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 3 \ 2 \ 0 \ 2 \ 4$
 $d = 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ -1 \ 0 \ 0 \ -1$.

Le mot a est donc de Yamanouchi.

Le lemme suivant est bien connu.

LEMME 1. Si a est un mot de Yamanouchi, le mot $s(a)$ l'est aussi et l'on a $ss(a) = a$.

Soient a et b deux mots de longueur n . Le bimot (ou matrice) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est dit de Yamanouchi si a et b sont tous deux de Yamanouchi et si l'on a $s(a) = b$ et $s(b) = a$.

Soit $T = (I, f)$ un tableau d'ordre n . Le mot de Yamanouchi-ligne (resp. -colonne) a (resp. b) associé à T est le mot $a = a_1 a_2 \dots a_n$ (resp. $b = b_1 b_2 \dots b_n$) défini pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, par a_i (resp. b_i) $= j$ si et seulement s'il existe $k \geq 1$ tel que $(j, k) \in I$ (resp. $(k, j) \in I$) et $f(j, k) = i$ (resp. $f(k, j) = i$). Nous pensons pouvoir nous dispenser de donner la démonstration (facile) du lemme suivant.

LEMME 2. L'application $T \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ envoie bijectivement les tableaux d'ordre n sur les bimots de Yamanouchi de longueur n . Réciproquement le tableau $T = (I, f)$ qui correspond au bimot de Yamanouchi $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$, par la bijection inverse, est donné par

$$I = \{(a_i, b_i) : 1 \leq i \leq n\} \text{ et } f(a_i, b_i) = i \quad (1 \leq i \leq n).$$

On identifiera désormais tout tableau $T = (I, f)$ au bimot $\varphi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$ qui lui correspond par la bijection du lemme 2. Il sera commode de noter $\varphi_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$ la i -ème colonne de φ ($1 \leq i \leq n$), et de considérer aussi φ

comme un mot en les colonnes φ_i . On écrira par exemple $\varphi = \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n$. On comparera également deux colonnes φ_i et φ_j de φ suivant l'ordre induit sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: on a $\varphi_i \leq \varphi_j$ si et seulement si $a_i \leq a_j$ et $b_i \leq b_j$ pour l'ordre ordinaire. Comme φ est un tableau, on a

$$(2) \quad \varphi_i < \varphi_j \Rightarrow i < j .$$

Si $\varphi_i < \varphi_j$, la distance entre φ_i et φ_j est définie par $d(\varphi_i, \varphi_j) = (a_j + b_j) - (a_i + b_i)$. Si $d(\varphi_i, \varphi_j) = 1$, on dit que φ_i est un prédécesseur de φ_j et que ce dernier est un successeur de φ_i . Toute colonne de φ a au plus deux prédécesseurs et deux successeurs dans φ . Si j est le plus petit entier tel que $i < j$ et tel que φ_j soit successeur de φ_i , on dit que φ_j est successeur immédiat de φ_i dans φ .

Le glissement de φ est défini comme la plus longue suite croissante d'entiers $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ telle que $i_1 = 1$ et telle que pour tout $j \geq 1$, la colonne $\varphi_{i_{j+1}}$ soit le successeur immédiat dans φ de φ_{i_j} . Si $n \geq 2$, on a toujours $k \geq 2$, et $(i_1, i_2) = (1, 2)$. On note $G_\ell \varphi$ l'ensemble $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$.

Par exemple, le tableau T donné dans (1) sera identifié à

$$(3) \quad \begin{array}{c} i = 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \\ \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} . \end{array}$$

Le glissement de φ est $(1, 2, 5, 8)$.

Revenant au cas général et conservant la notation $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ pour le glissement de φ , on peut, lorsque $n \geq 3$, écrire φ comme le produit de juxtaposition

$$\varphi = \varphi_1 \varphi_2 \theta_2 \varphi_{i_3} \theta_3 \dots \theta_{k-1} \varphi_{i_k} \theta_k ,$$

où $\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{k-1}, \theta_k$ sont des matrices (éventuellement vides). En fait

$$\theta_j = \varphi_{i_j+1} \varphi_{i_j+2} \dots \varphi_{i_{j+1}-1} \text{ pour } j = 2, 3, \dots, k, \text{ où, par convention, } i_{k+1} = n+1.$$

On pose alors

$$V(\varphi) = \varphi_1 \theta_2 \varphi_2 \theta_3 \varphi_{i_3} \dots \theta_{k-1} \varphi_{i_{k-1}} \theta_k \text{ et } R(\varphi) = \varphi_{i_k}.$$

Ainsi $V(\varphi)$ est obtenu en faisant "glisser" les colonnes $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{i_k}$ par dessus les matrices $\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_k$. Lorsque $n = 2$, on pose $V(\varphi) = \varphi_1$ et $R(\varphi) = \varphi_2$. Enfin $V(\varphi) = \epsilon$ (tableau vide) et $R(\varphi) = \varphi_1$ lorsque $n = 1$. Il est immédiat que $V(\varphi)$ est un tableau (au sens donné par l'identification ci-dessus) d'ordre $(n-1)$.

Avec l'exemple (3) on obtient

$$V(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } R(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Soit A un intervalle de la forme $[m]$ avec $1 \leq m \leq n-1$. On note $\varphi|A$ le tableau restreint aux m premières colonnes de φ . Du fait que $Gl(\varphi|A)$ n'est autre que l'ensemble $Gl(\varphi) \cap A$, on obtient

$$(4) \quad V(\varphi|A) = V(\varphi)|A.$$

Le vidé-rempli de φ est défini comme le produit de juxtaposition

$$\varphi^J = RV^{n-1}(\varphi) \cdot RV^{n-2}(\varphi) \cdot \dots \cdot RV(\varphi) \cdot R(\varphi).$$

La matrice φ^J est donc un réarrangement des colonnes du tableau φ . De plus, Schützenberger ([2] 3.6) montre que φ^J est encore un tableau et que J est involutif.

Pour $1 \leq m \leq n-1$ notons $\varphi|_{[n-m+1, n]}$ la matrice restreinte aux m dernières colonnes de φ . Naturellement $\varphi|_{[n-m+1, n]}$ n'est plus un tableau (standard de Young). C'est un tableau gauche (d'ordre $n-m$). En appliquant, de façon itérative, l'algorithme du jeu de taquin (cf. [2], §§ 2 et 3) à ce tableau gauche, on obtient un tableau (standard de Young) d'ordre $n-m$, noté $P(\varphi|_{[n-m+1, n]})$. L'identité suivante est démontrée dans ([2] 3.6).

$$(5) \quad \varphi^J|_{[m]} = (P(\varphi|_{[n-m+1, n]}))^J.$$

Posons, pour $n \geq 2$,

$$(6) \quad \varphi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n \end{pmatrix}.$$

Pour qu'on puisse permuter les deux dernières colonnes de φ , et que la matrice ψ obtenue soit encore un tableau, il faut que l'on ait $a_{n-1} \neq a_n$ et $b_{n-1} \neq b_n$. Dans la suite, on suppose que φ est donné par (6) et que

$$(7) \quad a_{n-1} > a_n,$$

d'où nécessairement $b_{n-1} < b_n$, car autrement $a_1 a_2 \dots a_n$ ne serait pas de Yamanouchi.

THÉORÈME. Soit φ un tableau, d'ordre $n \geq 3$, donné par (6) et satisfaisant (7). On note ψ le tableau déduit de φ par transposition des deux dernières colonnes. Alors, la permutation $\pi: RV^m(\varphi) \rightarrow RV^m(\psi)$, qui envoie la m -ème lettre de φ^J sur la m -ème de ψ^J ($m = n-1, n-2, \dots, 1, 0$) n'a que des points fixes et un cycle de longueur paire.

De plus, il existe deux entiers p et q satisfaisant à $1 \leq p \leq a_n$, $1 \leq q \leq b_{n-1}$, tels que ce cycle soit donné par la suite

$$\xi_{r-1} \rightarrow \xi_{r-2} \rightarrow \dots \rightarrow \xi_1 \rightarrow \xi_0 \rightarrow \eta_0 \rightarrow \eta_1 \rightarrow \dots \rightarrow \eta_{r-2} \rightarrow \eta_{r-1} \rightarrow \xi_{r-1}$$

où

$$(i) \quad r = p+q-1 ;$$

$$(ii) \quad \xi_{r-1} = \binom{2}{1}, \quad \xi_0 = \binom{p+1}{q}, \quad \eta_0 = \binom{p}{q+1}, \quad \eta_{r-1} = \binom{1}{2} ;$$

(iii) pour chaque $i = 0, 1, \dots, r-2$, la colonne ξ_{i+1} (resp. η_{i+1}) est
successeur de ξ_i (resp. η_i) .

Reprenant l'exemple {1} - {3} , on obtient successivement

$$\begin{array}{ll} \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ V(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} & R(\varphi) = \binom{3}{2} \quad V(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad R(\psi) = \binom{2}{3} \\ V^2(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} & RV(\varphi) = \binom{1}{4} \quad V^2(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad RV(\psi) = \binom{1}{4} \\ V^3(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} & RV^2(\varphi) = \binom{2}{3} \quad V^3(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad RV^2(\psi) = \binom{1}{3} \\ V^4(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} & RV^3(\varphi) = \binom{3}{1} \quad V^4(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad RV^3(\psi) = \binom{3}{2} \\ V^5(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & RV^4(\varphi) = \binom{2}{2} \quad V^5(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad RV^4(\psi) = \binom{2}{2} \\ V^6(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} & RV^5(\varphi) = \binom{1}{3} \quad V^6(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad RV^5(\psi) = \binom{1}{2} \\ V^7(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & RV^6(\varphi) = \binom{2}{1} \quad V^7(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad RV^6(\psi) = \binom{3}{1} \\ V^8(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & RV^7(\varphi) = \binom{2}{2} \quad V^8(\psi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad RV^7(\psi) = \binom{2}{1} \\ RV^8(\varphi) = \binom{1}{1} & RV^8(\psi) = \binom{1}{1} \\ \varphi^J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} & \psi^J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ici $p = q = 2$ et la permutation π contient le cycle de longueur $2r = 2(p+q-1) = 6$

$$\binom{2}{1} \rightarrow \binom{3}{1} \rightarrow \binom{3}{2} \rightarrow \binom{2}{3} \rightarrow \binom{1}{3} \rightarrow \binom{1}{2} \rightarrow \binom{2}{1} .$$

Les trois premiers termes vont en croissant, la distance de deux éléments consécutifs étant égale à 1 . Les trois termes suivant vont en décroissant, la distance

de deux éléments consécutifs étant encore égale à 1.

La démonstration du théorème est faite par récurrence sur n . Pour $n = 3$, on ne peut appliquer J qu'aux seuls tableaux $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, et $\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Un calcul direct montre que $\varphi_1^J = \varphi_2$ et $\varphi_2^J = \varphi_1$. Dans les deux cas, la permutation π a un seul point fixe $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et contient le cycle $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les conclusions (i) - (iii) du théorème sont vérifiées avec $p = q = 1$.

Supposons que φ et ψ soient d'ordre $n \geq 4$. Comme $a_{n-1} \neq a_n$ et $b_{n-1} \neq b_n$, les entiers $(n-1)$ et n ne peuvent pas appartenir tous deux à $G\ell \varphi$ (resp. $G\ell \psi$). Si $G\ell \varphi$ ne contient ni $(n-1)$, ni n , ces deux entiers ne sont pas non plus dans $G\ell \psi$. La comparaison des glissements de φ et de ψ nous amène donc à considérer quatre cas : (a) $(n-1) \in G\ell \varphi \cap G\ell \psi$; (b) $(n-1)$ et n ne sont pas dans $G\ell \varphi$ (ni dans $G\ell \psi$); (c) $(n-1) \in G\ell \varphi$ et $n \in G\ell \psi$; (c') $(n-1) \in G\ell \psi$ et $n \in G\ell \varphi$. Par symétrie, il n'y a que les trois cas (a), (b) et (c) à considérer.

(a) Comme $(n-1) \in G\ell \varphi \cap G\ell \psi$, les deux tableaux φ et ψ ont le même glissement $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ avec $i_k = n-1$. Posons $\varphi_{i_{k-1}} = \psi_{i_{k-1}} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$. Comme φ_{n-1} (resp. ψ_{n-1}) est le successeur immédiat dans φ (resp. dans ψ) de $\varphi_{i_{k-1}}$ (resp. $\psi_{i_{k-1}}$), et $\varphi_{n-1} \varphi_n = \psi_n \psi_{n-1}$, on a forcément

$$\{\varphi_{n-1}, \varphi_n\} = \{\psi_{n-1}, \psi_n\} = \left\{ \begin{pmatrix} p+1 \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ q+1 \end{pmatrix} \right\},$$

d'où $\varphi_{n-1} \varphi_n = \begin{pmatrix} p+1 & p \\ q & q+1 \end{pmatrix}$ et $\psi_{n-1} \psi_n = \begin{pmatrix} p & p+1 \\ q+1 & q \end{pmatrix}$, à cause de (7).

D'où $a_n = p$ et $b_{n-1} = q$. De là $R(\varphi) = \begin{pmatrix} p+1 \\ q \end{pmatrix}$, $R(\psi) = \begin{pmatrix} p \\ q+1 \end{pmatrix}$, $V(\varphi) \mid [n-3] = V(\psi) \mid [n-3]$, $V(\varphi)_{n-2} V(\varphi)_{n-1} = \begin{pmatrix} p & p \\ q & q+1 \end{pmatrix}$ et $V(\psi)_{n-2} V(\psi)_{n-1} = \begin{pmatrix} p & p+1 \\ q & q \end{pmatrix}$.

Pour $1 \leq m \leq n-1$ les tableaux $V^m(\varphi)$ et $V^m(\psi)$ ont $(n-m)$ colonnes.

Montrons que l'on a

$$(8) \quad V^m(\varphi) \mid [n-m-1] = V^m(\psi) \mid [n-m-1]$$

pour $1 \leq m \leq n-1$. La propriété est vraie pour $m = 1$ d'après ce qui précède.
Supposons la vérifiée jusqu'à l'ordre m avec $2 \leq m \leq n-2$. Alors

$$\begin{aligned} V^{m+1}(\varphi) \mid [n-m-2] &= V(V^m(\varphi) \mid [n-m-2]) \text{ , d'après (4) ,} \\ &= V(V^m(\psi) \mid [n-m-2]) \text{ par récurrence} \\ &= V^{m+1}(\psi) \mid [n-m-2] \text{ de nouveau d'après (4) .} \end{aligned}$$

D'où (8) est vraie pour tout m tel que $1 \leq m \leq n-1$.

Montrons maintenant que

$$(9) \quad V^{n-2}(\varphi) \neq V^{n-2}(\psi) .$$

En effet, les matrices $\varphi \mid [n-1, n] = \begin{pmatrix} p+1 & p \\ q & q+1 \end{pmatrix}$ et $\psi \mid [n-1, n] = \begin{pmatrix} p & p+1 \\ q+1 & q \end{pmatrix}$ correspondent respectivement aux tableaux gauches

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} ,$$

qui s'envoient, par l'algorithme du jeu de taquin, sur

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} .$$

On a donc, dans les notations de (5)

$$P(\varphi \mid [n-1, n]) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P(\psi \mid [n-1, n]) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Comme J est involutif, on conclut d'après (5) que

$$\varphi^J | [2] \neq \psi^J | [2] ,$$

c'est-à-dire

$$RV^{n-1}(\varphi) \cdot RV^{n-2}(\varphi) \neq RV^{n-1}(\psi) \cdot RV^{n-2}(\psi) .$$

Comme $RV^{n-1}(\varphi) = RV^{n-1}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, il vient donc, par définition de R ,

$$V^{n-2}(\varphi) = RV^{n-1}(\varphi) \cdot RV^{n-2}(\varphi) \neq RV^{n-1}(\psi) \cdot RV^{n-2}(\psi) = V^{n-2}(\psi) ,$$

ce qui établit (9) .

D'après (8) et (9) on a

$$V^m(\varphi) | [n-m-1] = V^m(\psi) | [n-m-1] \text{ et } V^m(\varphi)_{n-m} \neq V^m(\psi)_{n-m}$$

pour $1 \leq m \leq n-2$. Pour m fixé tel que $1 \leq m \leq n-2$, posons $K = \max G_\ell V^m(\varphi)$ et $L = \max G_\ell V^m(\psi)$, de sorte que $RV^m(\varphi) = V^m(\varphi)_K$ et $RV^m(\psi) = V^m(\psi)_L$. Afin de comparer $RV^m(\varphi)$ et $RV^m(\psi)$, nous allons considérer les quatre cas suivants : (α) $K, L \leq n-m-1$; (β) $K = n-m, L \leq n-m-1$; (γ) $K \leq n-m-1, L = n-m$; (δ) $K = L = n-m$.

Dans le cas (α) , on a nécessairement $K = L$. D'où $RV^m(\varphi) = RV^m(\psi) = V^m(\varphi)_K (= V^m(\psi)_K)$.

Dans le cas (β) , on obtient $RV^m(\varphi) = V^m(\varphi)_{n-m}$ et $RV^m(\psi) = V^m(\psi)_L$. Comme $V^m(\varphi) | [n-m-1] = V^m(\psi) | [n-m-1]$ et que $L \leq n-m-1$, la colonne $V^m(\varphi)_{n-m}$ est le successeur immédiat dans $V^m(\varphi)$ de $V^m(\varphi)_L (= V^m(\psi)_L)$. D'où $RV^m(\varphi)$ est successeur de $RV^m(\psi)$.

Dans le cas (γ) on voit, cette fois que $RV^m(\psi)$ est successeur de $RV^m(\varphi)$.

Dans le cas (δ) , les colonnes $V^m(\varphi)_{n-m}$ et $V^m(\psi)_{n-m}$ sont les deux

successeurs d'une même colonne. D'après (8) on en déduit $V^{m+1}(\varphi) = V^{m+1}(\psi)$.

A cause de (9), cette égalité ne peut se produire que si $n = m-2$. Les colonnes $V^{n-2}(\varphi)_2$ et $V^{n-2}(\psi)_2$ sont alors les deux successeurs de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. De là

$$\{RV^{n-2}(\varphi), RV^{n-2}(\psi)\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

On a donc démontré la proposition suivante.

PROPOSITION. Soient φ et ψ les tableaux définis dans l'énoncé du théorème.

Si $(n-1) \in G\ell \varphi \cap G\ell \psi$, on a, avec $p = a_n$ et $q = b_{n-1}$,

$$(1) \quad R(\varphi) = \begin{pmatrix} p+1 \\ q \end{pmatrix} \quad R(\psi) = \begin{pmatrix} p \\ q+1 \end{pmatrix};$$

$$(2) \quad \{RV^{n-2}(\varphi), RV^{n-2}(\psi)\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\};$$

(3) pour tout $m = 1, 2, \dots, n-3$, la colonne $RV^m(\varphi)$ est prédécesseur de, ou successeur de, ou encore égale à $RV^m(\psi)$.

Nous savons que $\varphi^J = RV^{n-1}(\varphi) \cdot RV^{n-2}(\varphi) \cdot \dots \cdot RV(\varphi) \cdot R(\varphi)$ et $\psi^J = RV^{n-1}(\psi) \cdot RV^{n-2}(\psi) \cdot \dots \cdot RV(\psi) \cdot R(\psi)$ sont de Yamanouchi et réarrangements de φ (ou de ψ). Soit m un entier égal à $n-2$ ou tel que $n-3 \geq m \geq 1$ et $RV^m(\varphi) < RV^m(\psi)$ (donc $RV^m(\varphi)$ prédécesseur de $RV^m(\psi)$). Il existe un entier m' tel que $RV^m(\psi) = RV^{m'}(\varphi)$. Si $m = n-2$, nécessairement $m > m' \geq 0$. On a la même conclusion lorsque $n-3 \geq m \geq 1$ et $RV^m(\varphi) < RV^m(\psi)$, car $RV^{m'}(\varphi)$ étant successeur de $RV^m(\varphi)$, est situé, dans φ^J , à la droite de $RV^m(\varphi)$ (d'après (2)). Si $m' = 0$, alors $\pi(RV^m(\varphi)) = R(\varphi)$. Sinon $RV^{m'}(\varphi) < RV^{m'}(\psi)$, car $RV^{m'}(\psi)$ est situé, dans ψ^J , à droite de $RV^m(\psi)$. La colonne $RV^{n-2}(\varphi)$ et les éléments $RV^m(\varphi)$ tels que $RV^m(\varphi) < RV^m(\psi)$ sont donc tous dans l'orbite de π contenant $R(\varphi)$. D'après ce qui précède, ils forment ainsi une suite croissante $RV^{m_r}(\varphi)$, $RV^{m_{r-1}}(\varphi), \dots, RV^{m_1}(\varphi)$ telle que

$$(10) \quad (n-2) = m_r > m_{r-1} > \dots > m_1 > m_0 = 0;$$

$$(11) \quad \pi(RV^{m_i}(\varphi)) = RV^{m_{i-1}}(\varphi) \text{ et } d(RV^{m_i}(\varphi), RV^{m_{i-1}}(\varphi)) = 1$$

pour $i = r, r-1, \dots, 1$.

Par symétrie, $RV^{n-2}(\psi)$ et les éléments $RV^m(\psi)$ tels que $RV^m(\psi) < RV^m(\varphi)$ (donc $RV^m(\varphi)$ successeur de $RV^m(\psi)$) forment une suite croissante $RV^{n_s}(\psi), RV^{n_{s-1}}(\psi), \dots, RV^{n_1}(\psi)$ telle que

$$(12) \quad (n-2) = n_s > n_{s-1} > \dots > n_1 > n_0 = 0 ;$$

$$(13) \quad \pi^{-1}(RV^{n_i}(\psi)) = RV^{n_{i-1}}(\psi) \text{ et } d(RV^{n_i}(\psi), RV^{n_{i-1}}(\psi)) \text{ pour } i = s, s-1, \dots, 1.$$

Notons que $RV^m(\varphi) = RV^{n-2}(\varphi) = RV^{n_{s-1}}(\psi)$ et $RV^{n_s}(\psi) = RV^{n-2}(\psi) = RV^{m_{r-1}}(\varphi)$. Comme $R(\varphi) = \binom{p+1}{q}$ et $RV^{m_{r-1}}(\varphi) \in \{\binom{1}{2}, \binom{2}{1}\}$, on déduit de (11) que la distance de $RV^{m_{r-1}}(\varphi)$ à $R(\varphi)$ est $r-1$, soit $(p+q+1)-(1+2) = p+q-2$. D'où $r = p+q-1$. De même, d'après (13), on a $d(RV^{n_{s-1}}(\psi), R(\psi)) = p+q-2$. D'où

$$(14) \quad r = p+q-1 = s.$$

Maintenant, on déduit de (10) et (11) que les éléments $RV^m(\varphi)$ tels que $RV^m(\varphi) < RV^m(\psi)$ sont $RV^{m_{r-1}}(\varphi), \dots, RV^{m_1}(\varphi)$. D'après (12) et (13) ceux pour lesquels $RV^m(\varphi) > RV^m(\psi)$, c'est-à-dire $\pi^{-1}(RV^m(\psi)) > RV^m(\psi)$, sont $\pi^{-1}(RV^{n_{r-1}}(\psi)), \dots, \pi^{-1}(RV^{n_1}(\psi))$, soit $RV^{n_r}(\varphi), \dots, RV^{n_1}(\varphi)$. Par conséquent, les deux suites $\{m_r, \dots, m_1\}$ et $\{n_r, \dots, n_1\}$ n'ont aucun élément en commun. Avec $RV^{n-2}(\varphi)$ et $R(\varphi)$, il y a donc $2r$ éléments déplacés par π . D'après (11) et (13), ils appartiennent tous à l'orbite de $R(\varphi)$. On peut écrire les $2r$ éléments de cette orbite comme la suite

$$(15) \quad (RV^{m_{r-1}}(\varphi), \dots, RV^{m_1}(\varphi), R(\varphi), R(\psi), \dots, RV^{n_{r-1}}(\psi)),$$

ou encore comme

$$(16) \quad (RV^{m_{r-1}}(\varphi), \dots, RV^{m_1}(\varphi), R(\varphi), RV^{n_1}(\varphi), \dots, RV^{n_r}(\varphi))$$

où chaque terme est suivi de son image par π .

Pour démontrer enfin que $RV^{n-2}(\psi) (= RV^{m_{r-1}}(\varphi)) = \binom{2}{1}$ (et donc $RV^{n-2}(\varphi) = \binom{1}{2}$) on utilise le lemme donné ci-après. Soient ζ et ζ' deux éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que $\zeta < \zeta'$. On appelle suite minimale allant de ζ à ζ' , toute suite croissante $(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_t)$ d'éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ telle que $\zeta = \zeta_0$, $\zeta_t = \zeta'$ et $d(\zeta_i, \zeta_{i+1}) = 1$ pour tout $i = 0, 1, \dots, t-1$ (naturellement $t = d(\zeta, \zeta')$).

LEMME. Soient i, j, k, ℓ des entiers satisfaisant à $2 \leq i < k$ et $2 \leq \ell < j$. Alors deux suites minimales S et T allant respectivement de $\binom{2}{1}$ à $\binom{i}{j}$ et de $\binom{1}{2}$ à $\binom{k}{\ell}$ ont un point en commun.

La démonstration du lemme peut se faire par récurrence sur l'entier $i+j+k+\ell$. Le lemme est évident géométriquement.

Supposons $RV^{m_{r-1}}(\varphi) = \binom{1}{2}$. D'après ce qui précède, la suite $(RV^{m_{r-1}}(\varphi), \dots, RV^{m_1}(\varphi), R(\varphi))$ (resp. $(RV^{n_{r-1}}(\psi), \dots, RV^{n_1}(\psi), R(\psi)) = (RV^{n_r}(\varphi), \dots, RV^{n_2}(\varphi), RV^{n_1}(\varphi))$) est une suite minimale allant de $\binom{1}{2}$ à $\binom{p+1}{q}$ (resp. de $\binom{2}{1}$ à $\binom{p}{q+1}$). Nous sommes dans les conditions d'application du lemme avec $i = p < p+1 = k$, $\ell = q < q+1 = j$. Les deux suites minimales ont donc un point commun. Soit ζ un tel point. Par définition de la distance, on a $d(\zeta, \binom{p+1}{q}) = d(\zeta, \binom{p}{q+1})$. De là $\zeta = RV^{m_h}(\varphi) = RV^{n_h}(\psi)$, ou encore $\zeta = RV^{m_h}(\varphi) = RV^{n_{h+1}}(\varphi)$ pour un certain h tel que $r-1 > h > 0$. Or ceci est impossible car les deux suites $(m_r, \dots, m_1)$ et $(n_r, \dots, n_1)$ n'ont aucun élément en commun. D'où $RV^{m_{r-1}}(\varphi) = \binom{2}{1}$.

Le théorème est donc prouvé dans le cas $(n-1) \in G\ell\varphi \cap G\ell\psi$. Il suffit de

poser

$$\xi_i = RV^{m_i}(\varphi) \text{ et } \eta_i = RV^{n_i}(\psi) \text{ pour } i = r-1, \dots, 1, 0.$$

Les deux cas restant en suspens sont (b) $(n-1)$, $n \notin Gl \varphi$; (c) $(n-1) \in Gl \varphi$, $n \in Gl \psi$. Soit $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ le glissement de φ .

Dans le cas (b), on a $i_k \leq n-2$. De plus $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ est aussi le glissement de ψ . Par conséquent, les deux tableaux $V(\varphi)$ et $V(\psi)$, d'ordre $(n-1)$, ne diffèrent que par la transposition de leurs deux dernières colonnes, égales respectivement à celles de φ et de ψ . Le théorème s'applique donc par récurrence à $V(\varphi)$ et à $V(\psi)$. Toutes les conclusions du théorème sont valables, mais concernent la permutation $\pi' : RV^m(\varphi) \rightarrow RV^m(\psi)$ ($m = n-1, n-2, \dots, 2, 1$), qui ne diffère de la permutation $\pi : RV^m(\varphi) \rightarrow RV^m(\psi)$ ($m = n-1, n-2, \dots, 2, 1, 0$) que par le point fixe $R(\varphi) = \varphi_{i_k} = \psi_{i_k} = R(\psi)$. Le théorème est donc encore vrai pour le couple (φ, ψ) .

Dans le cas (c), on obtient

$$V(\varphi)_{n-2} = \varphi_{i_{k-1}} = \psi_{i_{k-1}} = V(\psi)_{n-1}$$

$$V(\varphi)_{n-1} = \varphi_n = \psi_{n-1} = V(\psi)_{n-2}$$

$$R(\varphi) = \varphi_{n-1} = \psi_n = R(\psi).$$

Là encore, $V(\varphi)$ et $V(\psi)$ ne diffèrent que par la permutation de leurs deux dernières colonnes. La récurrence s'applique à $V(\varphi)$ et $V(\psi)$, les entiers p et q satisfaisant les inégalités $1 \leq p < \min(a_{i_k}, a_n)$ et $1 \leq q \leq \min(b_{i_k}, b_n)$. Comme $\varphi_{i_k} = \psi_{i_k} = \begin{pmatrix} a_{i_k} \\ b_{i_k} \end{pmatrix}$ est prédécesseur de $\varphi_{n-1} = \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$, on a encore $a_{i_k} \leq a_{n-1}$, $b_{i_k} \leq b_{n-1}$ (et aussi : $a_{n-1} + b_{n-1} = a_{i_k} + b_{i_k} + 1$). D'où $1 \leq p \leq \min(a_{n-1}, a_n)$ et $1 \leq q \leq \min(b_{n-1}, b_n)$. Le théorème est donc encore vrai pour (φ, ψ) puisque les permutations $\pi' : RV^m(\varphi) \rightarrow RV^m(\psi)$ ($m = n-1, n-2, \dots, 2, 1$) et

$\pi: RV^m(\varphi) \rightarrow RV^m(\psi)$ ($m = n-1, n-2, \dots, 2, 1, 0$) ne diffèrent que par le point fixe $R(\varphi) = \varphi_{n-1} = \psi_n = R(\psi)$.

RÉFÉRENCES

- [1] M.-P. Schützenberger, Quelques remarques sur une construction de Schensted, Math. Scand. 12 (1963), 117-128.
- [2] M.-P. Schützenberger, La correspondance de Robinson, ce volume.

Dominique Foata
 Département de Mathématique
 Université Louis Pasteur
 7, rue René Descartes
 67084 Strasbourg Cedex, France