

FONCTIONS SPÉCIALES. — *Une extension multilinéaire de la formule d'Erdélyi pour les produits de fonctions hypergéométriques confluentes.* Note (*) de **Dominique Foata** et **Volker Strehl**, transmise par Marcel-Paul Schützenberger.

La formule bilinéaire de Hille-Hardy pour les produits de polynômes de Laguerre a été étendue au cas des fonctions hypergéométriques confluentes par Erdélyi. Nous proposons ici une version multilinéaire de l'identité d'Erdélyi, qui est l'analogue pour les polynômes de Laguerre de la formule de Kibble-Slepian pour les polynômes d'Hermite.

The Hille-Hardy bilinear formula for products of Laguerre polynomials has been extended to the confluent hypergeometric functions by Erdélyi. Here a multilinear version of the latter identity is proposed that is the analog for the Laguerre polynomials of the Kibble-Slepian formula for the Hermite polynomials.

La majeure partie des travaux de la Théorie Combinatoire contemporaine a consisté à redémontrer ou parfois à étendre au cas de variables non commutatives les formules classiques de l'Analyse, en fournissant chaque fois le cadre géométrique approprié. À titre d'exemple, on peut se reporter à [1] ou à [2]. Le résultat présenté ci-dessous est, nous le croyons, l'un des premiers obtenus d'abord par des méthodes combinatoires et qui semble être véritablement nouveau, même dans le cadre de l'Analyse Classique. Il s'agit de la formule (8) ci-après. Sa démonstration combinatoire ou géométrique n'est pas difficile, mais requiert trop de lemmes techniques établis par ailleurs pour que nous ayons la place de la donner in extenso. Nous avons préféré donner ici une démonstration analytique élémentaire utilisant essentiellement l'identité classique de Saalschütz et un réarrangement de séries, et renvoyer le lecteur à une prochaine publication sur le sujet [3].

C'est en étudiant la positivité des noyaux de Poisson (*cf.* par exemple [4]) pour les polynômes d'Hermite et de Laguerre qu'on a obtenu des formules explicites pour ces noyaux, d'abord l'identité de Mehler :

$$(1) \quad \sum_n (u^n / (2^n n!)) H_n(x) H_n(y) = (1 - u^2)^{-1/2} \exp\{(2xyu - (x^2 + y^2)u^2)/(1 - u^2)\},$$

pour les polynômes d'Hermite $H_n(x)$ ($n \geq 0$) définis, par exemple, par leur fonction génératrice

$$(2) \quad \sum_n (u^n / n!) H_n(x) = \exp(2xu - u^2),$$

ensuite l'identité de Hille-Hardy :

$$(3) \quad \sum_n (u^n / (\alpha + 1)_n) L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(y) \\ = (1 - u)^{-\alpha-1} \exp\{-(x + y)u/(1 - u)\} \sum_n \frac{1}{n! (\alpha + 1)_n} \left(\frac{xyu}{(1 - u)^2} \right)^n,$$

pour les polynômes de Laguerre $L_n(x)$ ($n \geq 0$) de fonction génératrice :

$$(4) \quad \sum_n u^n L_n^{(\alpha)}(x) = (1 - u)^{-\alpha-1} \exp(-xu/(1 - u)).$$

Pour ces quatre formules nous renvoyons aux ouvrages classiques sur les polynômes orthogonaux, par exemple [5] ou [6].

Dans (3) on a posé :

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a) = a(a+1)\cdots(a+n-1) \quad n \geq 1).$$

L'extension de la formule de Hille-Hardy obtenue par Erdélyi fait intervenir des fonctions hypergéométriques confluentes à une et à deux variables. Soient k un entier supérieur ou égal à 1 et $a_1, \dots, a_k, c$ des nombres réels ou complexes, enfin $x_1, \dots, x_k$ des variables réelles ou complexes. Les fonctions hypergéométriques confluentes à k variables sont définies ([7], [8]) par

$$\Phi_k(a_1, \dots, a_k; c; x_1, \dots, x_k) = \sum \frac{(a_1)_{n_1} \cdots (a_k)_{n_k}}{(c)_{n_1+\dots+n_k}} \frac{x_1^{n_1}}{n_1!} \cdots \frac{x_k^{n_k}}{n_k!} \quad (n_1 \geq 0, \dots, n_k \geq 0).$$

On pose $\Phi_1 = \Phi$ et on a en particulier :

$$L_n^{(\alpha)}(x) = ((\alpha+1)_n n!) \Phi(-n; \alpha+1; x).$$

Erdélyi [7] établit la formule :

$$(6) \quad \sum_n (u^n/n!) (h)_n \Phi(a, -n; c; x) \Phi(b-n; d; y) = (1-u)^{-h} \sum_r \frac{(h)_r}{r!} \left(\frac{xyu}{(1-u)^2} \right)^r \\ \times \frac{1}{(c)_r (d)_r} \Phi_2\left(a, h+r; c+r; x; \frac{-xu}{1-u}\right) \Phi_2\left(b, h+r; d+r; y; \frac{-yu}{1-u}\right).$$

En faisant $a = b = 0$, $c = d = h = \alpha + 1$, les fonctions Φ_2 se réduisent à des exponentielles et utilisant (5) on obtient bien la formule de Hille-Hardy (3).

La recherche d'une extension multilinéaire de (6) a été motivée par les faits suivants. D'abord, il existe une extension multilinéaire de la formule de Mehler due à Kibble [9] et Slepian [10] [voir l'identité (7) ci-dessous] et la démonstration combinatoire [11] de celle-ci utilise la même méthode que celle développée pour la formule de Mehler ordinaire [12]. Ensuite, les polynômes d'Hermite apparaissent comme cas particuliers des polynômes de Laguerre (*cf.* [5]), un résultat qui, d'après Watson [13], a permis à Hille [14] de déduire la formule de Mehler de la formule de Hille-Hardy. Il s'agissait donc de considérer une série de produits de polynômes de Laguerre qui se réduisait à la série de Kibble-Slepian lorsqu'on passe des polynômes de Laguerre aux polynômes d'Hermite. Comme on le verra dans [3] c'est le cadre combinatoire pour l'étude des polynômes de Laguerre qui impose la normalisation du premier membre de (8) et qui fournit ainsi l'extension naturelle de (6).

Dans les deux formules suivantes, $U = (u_{ij})$ est une matrice carrée d'ordre $k \geq 2$, symétrique, de diagonale nulle, et ses coefficients sont des variables. Les sommations

sont par rapport aux suites (n_{ij}) (resp. (r_{ij})) ($1 \leq i < j \leq k$) de $k(k-1)/2$ entiers positifs. De plus, pour $1 \leq i < j \leq k$ on pose $n_{ji} = n_{ij}$, $r_{ji} = r_{ij}$ et pour chaque $i = 1, 2, \dots, k$ on adopte la notation :

$$n_{i\bullet} = \sum_j n_{ij}, \quad r_{i\bullet} = \sum_j r_{ij} \quad (1 \leq j \leq k).$$

Naturellement I désigne la matrice identité, y^t est le vecteur ligne $(y, \dots, y_k)$ et y le vecteur colonne correspondant. Enfin, les y_i ($1 \leq i \leq k$) sont des variables et a_i , c_i ($1 \leq i \leq k$), h_{ij} ($1 \leq i < j \leq k$) des nombres réels ou complexes, et on pose $h_{ji} = h_{ij}$ ($1 \leq i < j \leq k$). La formule de Kibble-Slepian ([9], [10]) s'écrit :

$$(7) \quad \sum_{(n_{ij})} \prod_{i < j} (u_{ij}/2)^{n_{ij}} (1/n_{ij}!) \prod_i H_{n_{i\bullet}}(y_i) = (\det(I + U))^{-1/2} \exp\{y^t U(I + U)y\}.$$

L'extension de (3) et de (6) que nous proposons se présente comme suit :

$$(8) \quad \sum_{(n_{ij})} \prod_{i < j} (u_{ij}^{n_{ij}}/n_{ij}!) (h_{ij})_{n_{ij}} \prod_i \Phi(a_i - n_i; c_i; y_i) \\ = \prod_{i < j} (1 - u_{ij})^{-h_{ij}} \sum_{(r_{ij})} \prod_{i < j} \frac{(h_{ij})_{r_{ij}}}{r_{ij}!} \left(\frac{y_i y_j u_{ij}}{(1 - u_{ij})^2} \right)^{r_{ij}} \\ \times \prod_i \frac{1}{(c_i)_{r_{i\bullet}}} \Phi_k \left(a_i, h_{i1} + r_{i1}, \dots, h_{ik} + r_{ik}; c_i + r_{i\bullet}; y_i, \frac{-y_i u_{i1}}{1 - u_{i1}}, \dots, \frac{-y_i u_{ik}}{1 - u_{ik}} \right).$$

On notera que les fonctions Φ_k apparaissant au second membre de (8) sont bien à k variables, car la variable $-y_i u_{ii}/(1 - u_{ii})$ disparaît. Lorsque $k = 2$, on retrouve bien la formule (6) d'Erdélyi la sommation du premier membre ne se faisant que par rapport au seul indice $n = n_{1\bullet} = n_{12} = n_{21} = n_{2\bullet}$.

Les deux méthodes analytiques développées par Erdélyi [7] pour établir (6) fournissent la trame des deux démonstrations non combinatoires de (8) (voir [3]). Nous décrivons très succinctement l'une d'elles. Développant le second membre que nous appellerons Ker de (8) on obtient la sommation suivante par rapport à $(p_i), (r_{ij}), (m_{ij}), (m_{ji}), (s_{ij})$ ($i < j$) :

$$\text{Ker} = \sum_{i < j} \prod_i (-1)^{m_{ij} + m_{ji}} \frac{(h_{ij})_{r_{ij} + m_{ij}} (h_{ij})_{r_{ij} + m_{ji}} (h_{ij} + 2r_{ij} + m_{ij} + m_{ji})_{s_{ij}}}{(h_{ij})_{r_{ij}} r_{ij}! m_{ij}! m_{ji}! s_{ij}!} \\ \times u_{ij}^{r_{ij} + m_{ij} + m_{ji} + s_{ij}} \prod_i \frac{(a_i)_{p_i}}{(c_i)_{r_{i\bullet} + p_i + m_{i\bullet}}} y_i^{r_{i\bullet} + p_i + m_{i\bullet}}.$$

Pour $i < j$ posons :

$$\begin{aligned} r_{ij} + m_{ij} &= M_{ij}, & r_{ij} + m_{ji} &= M_{ji}, \\ r_{ij} + m_{ij} + m_{ji} + s_{ij} &= R_{ij} \quad \text{et} \quad M_{i\bullet} = \sum_j M_{ij} \quad (1 \leq j \leq k). \end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \text{Ker} &= \sum_{i < j} \prod u_{ij}^{R_{ij}} \prod_i \frac{(a_i)_{p_i}}{(c_i)_{M_{i\bullet} + p_i} p_i!} y_i^{M_{i\bullet} + p_i} \\ &\quad \times \prod_{i < j} \sum_{s_{ij}} \frac{(-1)^{M_{ij} + M_{ji}} (h_{ij})_{M_{ij}} (h_{ij})_{M_{ji}} (h_{ij} + M_{ij} + M_{ji})_{s_{ij}}}{\left\{ \begin{aligned} &(h_{ij})_{M_{ij} + M_{ji} - R_{ij} + s_{ij}} (M_{ij} + M_{ji} - R_{ij} + s_{ij})! \\ &\times (R_{ij} - M_{ji} - s_{ij})! (R_{ij} - M_{ij} - s_{ij})! s_{ij}! \end{aligned} \right\}} \end{aligned}$$

la première sommation étant par rapport à (p_i) , (R_{ij}) , (M_{ij}) , (M_{ji}) ($i < j$). D'après la formule de Saalschütz [15] la seconde sommation est égale à :

$$\frac{(-R_{ij})_{M_{ij}} (-R_{ij})_{M_{ji}} (h_{ij})_{R_{ij}}}{M_{ij}! M_{ji}! R_{ij}!}.$$

Enfin une application de l'identité de Chu-Vandermonde (cf. [6]) fournit immédiatement le premier membre de (8).

(*) Remise le 21 septembre 1981.

- [1] D. FOATA et M. P. SCHÜTZENBERGER, *Théorie géométrique des polynômes eulériens*, Springer, 1970.
- [2] A. M. GARSIA et J. REMMEL, *Europ. J. Combinatorics*, 1, 1980, p. 47.
- [3] D. FOATA et V. STREHL, *Combinatorics of Laguerre polynomials*, in *Enumeration and Design*, Academic Press, 1984, p. 123.
- [4] R. ASKEY, *Studies in Appl. Math.*, 6, S.I.A.M., 1970, p. 64.
- [5] E. RAINVILLE, *Special Functions*, Chelsea, 1960, chap. 11 et 12.
- [6] R. ASKEY, *Orthogonal Polynomials and Special Functions*, S.I.A.M., 1975, p. 16 et 59.
- [7] A. ERDÉLYI, *Compositio Math.*, 6, 1939, p. 336.
- [8] A. ERDÉLYI, *Higher Transcendental Functions*, 1, McGraw-Hill, 1953, chap. 6.
- [9] W. F. KIBBLE, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 41, 1945, p. 12.
- [10] D. SLEPIAN, *S.I.A.M. J. Math. Anal.*, 3, 1972, p. 606.
- [11] D. FOATA et A. M. GARSIA, *Proc. Symposia Pure Math.*, 34, Amer. Math. Soc., 1979, p. 163.
- [12] D. FOATA, *J. Combinatorial Theory Ser. A*, 24, 1978, p. 367.
- [13] G. N. WATSON, *J. London Math. Soc.*, 8, 1933, p. 194.
- [14] E. HILLE, *Proc. Nat. Acad. of Sc.*, 12, 1926, p. 264.
- [15] W. N. BAILEY, *Generalized Hypergeometric Functions*, Stechert-Hafner, 1964, p. 9.

Département de Mathématique, Université de Strasbourg,
7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg Cedex;
Informatik I, Universität Erlangen-Nürnberg, Martensstrasse 3, 8520 Erlangen, R.F.A.