

Modèles Combinatoires pour les Polynômes de Meixner

DOMINIQUE FOATA ET JACQUES LABELLE*

Nous décrivons trois modèles combinatoires pour les polynômes de Meixner $m_n(x; \beta, c)$, à savoir les endofonctions de Meixner, les permutations bicolorées et les permutations partiellement soulignées. Ce dernier modèle a été introduit par Kreweras, qui a étudié le cas particulier des polynômes $m_n(x; 1, \frac{1}{2})$.

1. INTRODUCTION

Meixner [10] a caractérisé les polynômes orthogonaux $P_n(x)$ ($n \geq 0$) qui possèdent une fonction génératrice de la forme

$$\sum P_n(x) u^n / n! = f(u) \exp[xg(u)], \quad n \geq 0.$$

Une classe importante de ces polynômes nous est justement fournie par les *polynômes dits de Meixner*, notés $m_n(x; \beta, c)$, dont la fonction génératrice est donnée par

$$\sum m_n(x; \beta, c) u^n / n! = (1 - u/c)^x (1 - u)^{-x-\beta}, \quad n \geq 0, \quad (1.1)$$

(cf. Erdélyi *et al.* [3, vol. 2, pp. 225–226 et vol. 3, pp. 273–274] ou Chihara [2, pp. 175–177]). Notons $(a)_n$ les factorielles montantes

$$(a)_0 = 1 \quad \text{et} \quad (a)_n = a(a+1) \dots (a+n-1), \quad n \geq 1,$$

et

$${}_2F_1(a_1, a_2; b; x) = \sum \frac{(a_1)_n (a_2)_n}{(b)_n n!} x^n, \quad n \geq 0.$$

la série hypergéométrique usuelle. Les polynômes de Meixner ont encore la représentation naturelle [3, 1]

$$\begin{aligned} m_n(x; \beta, c) &= (\beta)_n {}_2F_1(-n, -x; \beta; 1 - c^{-1}) \\ &= (\beta + x)_n {}_2F_1(-n, -x; 1 - \beta - n - x; c^{-1}), \end{aligned} \quad (1.2)$$

qu'on peut encore écrire

$$\begin{aligned} m_n(x; \beta, c) &= \sum \binom{n}{i, j} (-x)_i (\beta + i)_j (c^{-1} - 1)^i \\ &= \sum \binom{n}{i, j} (-x)_i (\beta + x)_j c^{-i}, \quad i + j = n. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Toutes ces formules se déduisent immédiatement les unes des autres et peuvent chacune servir de définition des polynômes $m_n(x; \beta, c)$. De (1.3) on obtient $m_n(-1; 1, \frac{1}{2}) = 2^n n!$. Un modèle combinatoire pour le polynôme $m_n(x; \beta, c)$ doit donc comporter une structure finie de cardinal $2^n n!$ et *trois statistiques* à valeurs entières, définies sur cette structure, dont les compteurs sont les variables $X = -x$, β et $Y = c^{-1} - 1$. Le polynôme de Meixner apparaît alors comme le polynôme générateur des éléments de cette structure par les trois statistiques.

Le premier modèle décrit est celui des *endofonctions de Meixner*. Il nous paraît le plus important pour les deux raisons suivantes. D'abord, il est directement relié aux autres

* Avec l'appui financier du Ministère de l'Éducation du Québec, subvention d'équipe EQ 1608.

modèles combinatoires introduits dans l'étude des polynômes de Jacobi [6] ou de Laguerre [8] en ce sens que les formules de passage comme, par exemple,

$$\lim m_n(cx/(c-1); \beta, c) = n! L_n^{(\beta-1)}(x), \quad c \rightarrow 1, \quad (1.4)$$

qui relie polynôme de Meixner et de Laguerre, ont une démonstration immédiate dans la géométrie de ces modèles. Ensuite, ce modèle permet effectivement (cf. [5]) de *démontrer* combinatoirement les formules bilinéaires du noyau de Poisson pour les polynômes de Meixner ainsi que d'autres extensions multilinéaires.

Les deux autres modèles, *permutations bicolores* et *permutations partiellement soulignées* sont décrits dans les Sections 3 et 4. C'est Kreweras [9] qui a introduit ce dernier modèle avec seulement une statistique, à savoir le nombre d'éléments saillants soulignés. Il a ainsi redécouvert les polynômes de Meixner $m_n(x; \beta, c)$ dans le cas particulier $\beta = 1$, $c = \frac{1}{2}$. En établissant, dans la section 5, les bijections entre ces trois modèles, nous montrons pourquoi le modèle linéaire de Kreweras est naturel et comment il se rattache au codage traditionnel des permutations et endofonctions.

On note $|A|$ le cardinal d'un ensemble fini A et $[n]$ l'intervalle $\{1, 2, \dots, n\}$ des entiers.

2. ENDOFONCTIONS DE MEIXNER

On appelle *endofonction de Meixner* sur un ensemble fini S tout couple $\psi = ((A, B), f)$ où

- (a) (A, B) est une partition ordonnée de S , (A ou B pouvant être vide);
- (b) f est une endofonction de S —une application de S dans S —dont la restriction $f_A: A \rightarrow S$ de f à la partie A est injective et la restriction $f_B: B \rightarrow S$ de f à B est une permutation de B .

Soit $a(\psi)$ [resp. $b(\psi)$] le nombre de cycles de f_A (resp. de f_B). Le *poids* de $\psi = ((A, B), f)$ est défini par

$$w(\beta, X, Y; \psi) = \beta^{a(\psi)} X^{b(\psi)} Y^{|B|}. \quad (2.1)$$

Il est commode d'identifier toute endofonction de Meixner $\psi = ((A, B), f)$ avec son graphe associé dont les sommets sont les éléments de S et dans lequel un arc va de v à v' si et seulement si $f(v) = v'$.

Dans la Figure 1, on a représenté un tel graphe avec $A = \{3, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16\}$, $B = \{1, 2, 4, 6, 11, 13\}$, les arcs issus des sommets de A (resp. de B) étant en trait continu (resp. pointillé). Les arcs continus forment soit des cycles isolés dont tous les sommets sont dans A —appelons-les *cycles continus*—soit des chemins dont les sommets sont dans A à l'exception de l'extrémité qui est dans B . Les arcs pointillés forment des cycles dont tous les sommets sont dans B —appelons-les *cycles pointillés*. Ainsi $a(\psi)$ [resp.

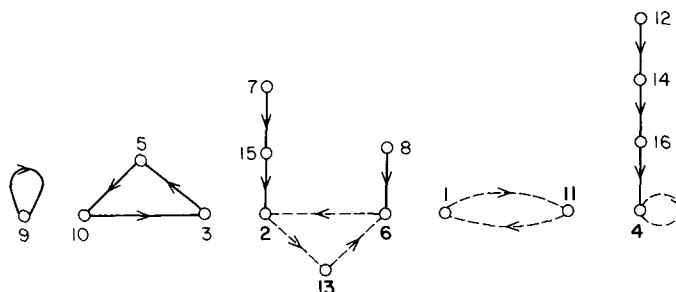


FIGURE 1.

$b(\psi)]$ est le nombre de cycles continus (resp. pointillés.) Dans l'exemple de la Figure 1, on a $a(\psi) = 2$, $b(\psi) = 3$, $|B| = 6$, de sorte que

$$w(\beta, X, Y; \psi) = \beta^2 X^3 Y^6.$$

Une endofonction de Meixner peut donc être vue comme un couple (τ, τ') où τ est une collection de cycles continus et τ' une collection, *disjointe* de la précédente, de cycles pointillés dont chaque sommet est l'extrémité d'*au plus un* chemin en trait continu. Comme β est le compteur des cycles continus, la fonction génératrice exponentielle des collections τ , par nombre de cycles, est égale à $(1-u)^{-\beta}$ (cf. [11, p. 71].)

Par ailleurs, $Yu(1-u)^{-1}$ est la fonction génératrice exponentielle des chemins non vides, chaque chemin étant affecté du poids Y . De là, $(1 - Yu(1-u)^{-1})^{-X}$ est la fonction génératrice des permutations de ces chemins munis du précédent poids, par nombre de cycles, le compteur des cycles étant cette fois X . Ces permutations de chemins ne sont rien d'autre que les collections τ' décrites plus haut. Par conséquent, le *produit*

$$(1-u)^{-\beta}(1 - Yu(1-u)^{-1})^{-X},$$

égal encore à

$$(1-u(Y+1))^{-X}(1-u)^{-\beta+X},$$

est la fonction génératrice exponentielle des endofonctions de Meixner par le poids (2.1). En d'autres termes, on a l'identité

$$\sum (u^n/n!) \sum w(\beta, X, Y; \psi) = (1-u(Y+1))^{-X}(1-u)^{-\beta+X}, \quad n \geq 0, \quad (2.2)$$

où la seconde sommation est étendue à l'ensemble des endofonctions de Meixner sur $[n]$, ensemble qu'on désignera désormais par MEIX_n .

En faisant $X = -x$, $Y = c^{-1} - 1$ dans (2.2) le second membre de (2.2) se réduit au second membre de (1.1). On a donc démontré le résultat suivant.

THÉOREME 2.1. (Première interprétation combinatoire des polynômes de Meixner). *Pour chaque $n \geq 0$ le polynôme $m_n(x; \beta, c)$ est le polynôme générateur des endofonctions de Meixner par le poids $w(\beta, -x, c^{-1} - 1; \cdot)$, soit*

$$m_n(x; \beta, c) = \sum w(\beta, -x, c^{-1} - 1; \psi), \quad \psi \in \text{MEIX}_n. \quad (2.3)$$

REMARQUE 2.2. On peut également démontrer le Théorème 2.1 en partant de la première formule (1.3). En effet, $(\beta + i)_j$ est la fonction génératrice des injections d'un ensemble A_0 de cardinal j dans $A_0 + B_0$ où B_0 est un ensemble de cardinal i , par nombre de cycles (cf. [8]). Comme $(-x)_i$ est le polynôme générateur des permutations de B_0 par nombre de cycles, le produit $(-x)_i(\beta + i)_j(c^{-1} - 1)^i$ est le polynôme générateur des endofonctions de Meixner $\psi = ((A, B), f)$ telles que $A = A_0$, $B = B_0$ par le poids $w(\beta, -x, c^{-1} - 1; \cdot)$. Enfin, le binomial $\binom{n}{i, j}$ est le nombre de partitions ordonnées (A_0, B_0) telles que $|A_0| = j$, $|B_0| = i$.

REMARQUE 2.3. Dans [8] on a défini une *endofonction de Laguerre sur $[n]$* comme étant un couple $\lambda = ((A, B), g)$ où (A, B) est une partition ordonnée de $[n]$ et g une injection de A dans $[n]$. Si $a(g)$ désigne le nombre de cycles de g , le *poids* de λ a été défini par

$$w(\beta, 1, -x; \lambda) = \beta^{a(g)}(-x)^{|B|}.$$

On a alors (cf. [8])

$$n! L_n^{(\beta-1)}(x) = \sum w(\beta, 1, -x; \lambda)$$

où la somme est étendue à l'ensemble des endofonctions de Laguerre sur $[n]$. D'après (2.3) on a

$$m_n(cx/(c-1); \beta, c) = \sum w(\beta, -cx/(c-1), c^{-1}-1; \psi), \quad (2.4)$$

et d'après (2.1)

$$w(\beta, -cx/(c-1), c^{-1}-1; \psi) = \beta^{a(\psi)} (-x)^{b(\psi)} (c^{-1}-1)^{|B|-b(\psi)}.$$

Lorsque c tend vers 1, les seules endofonctions de Meixner $\psi = ((A, B), f)$ qui donnent une contribution non nulle à la somme (2.4) satisfont $|B| = b(\psi)$. Ce sont donc des endofonctions de Laguerre. La formule (1.4) est alors évidente.

3. PERMUTATIONS BICOLORÉES

Une *permutation bicoloree* d'un ensemble fini S est définie comme étant un couple $((A, B), \sigma)$ où (A, B) est une partition ordonnée de S et σ une permutation de S . On note $a_2(\sigma)$ le nombre de cycles de σ dont *tous les sommets sont dans* A et on désigne par $b_2(\sigma)$ le nombre des autres cycles. Le *poids* d'une permutation bicoloree $((A, B), \sigma)$ est alors défini par

$$w_2(\beta, X, Y; \sigma) = \beta^{a_2(\sigma)} X^{b_2(\sigma)} Y^{|B|}. \quad (3.1)$$

Dans la Figure 2, on a représenté le graphe d'une permutation bicoloree $((A, B), \sigma)$ avec de nouveau $A = \{3, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16\}$, $B = \{1, 2, 4, 6, 11, 13\}$, les arcs issus des sommets de A (resp. de B) étant en trait continu (resp. pointillé). On a également conservé la même disposition des sommets que dans la Figure 1 pour une raison qui est probablement déjà claire au lecteur! Pour cet exemple, on trouve

$$w_2(\beta, X, Y; \sigma) = \beta^2 X^3 Y^6.$$

On désigne par PB_n l'ensemble des permutations bicolorees de $[n]$.

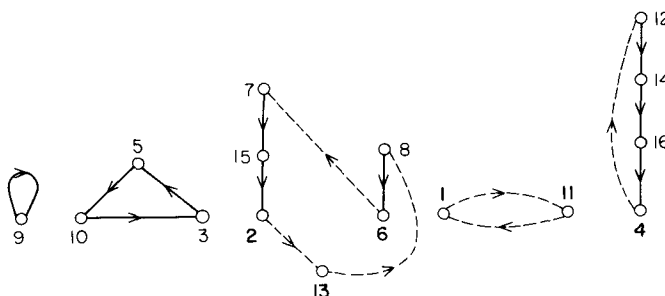


FIGURE 2.

4. PERMUTATIONS PARTIELLEMENT SOULIGNÉES

Suivant Kreweras [9] on appelle *permutation partiellement soulignée* de l'ensemble $[n]$, un couple $((A, B), \theta)$ où (A, B) est une partition ordonnée de $[n]$ et θ un réarrangement du mot $12 \cdots n$. Une permutation partiellement soulignée $((A, B), \theta)$ peut se représenter par le mot θ dans lequel les lettres appartenant à B sont *en gras* et celles appartenant

à A en romain ordinaire. Par exemple, le mot

$$\theta = 9, 10, 5, 3, \mathbf{4}, 16, 14, 12, \mathbf{11}, \mathbf{1}, \mathbf{13}, \mathbf{2}, 15, 7, \mathbf{6}, 8 \quad (4.1)$$

est une permutation partiellement soulignée avec $A = \{3, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16\}$ et $B = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{6}, \mathbf{11}, \mathbf{13}\}$. L'ordre total induit par (A, B) sur $[n]$ est défini comme étant l'ordre usuel entre deux éléments de A , ou entre deux éléments de B et $v < v'$ si v est dans A et v' dans B . On dit qu'une lettre v_i du mot $\theta = v_1 v_2 \cdots v_n$ est un terme *saillant*, si, par rapport à l'ordre induit par (A, B) , la lettre v_i est plus grande que chacune des lettres v_j située à sa gauche ($1 \leq j \leq i-1$). En particulier, si v_i est un terme saillant et appartient à B (lettre en gras), les termes saillants à la droite de v_i sont aussi en gras. On note $a_3(\theta)$ (resp. $b_3(\theta)$) le nombre de termes saillants appartenant à A (resp. à B). Le poids d'une permutation partiellement soulignée est alors défini par

$$w_3(\beta, X, Y; \theta) = \beta^{a_3(\theta)} X^{b_3(\theta)} Y^{|B|}. \quad (4.2)$$

Dans le précédent exemple, les termes saillants sont: 9, 10, **4**, **11**, **13**, de sorte que

$$w_3(\beta, X, Y; \theta) = \beta^2 X^3 Y^6.$$

On note enfin PPS_n l'ensemble des permutations partiellement soulignées de $[n]$.

5. LES BIJECTIONS

Nous nous proposons d'établir le théorème suivant.

THÉOREME 5.1. (Seconde et troisième interprétation combinatoire des polynômes de Meixner). *Pour chaque $n \geq 0$ le polynôme $m_n(x; \beta, c)$ est le polynôme générateur de l'une quelconque des deux structures suivantes:*

- (a) les permutations bicolores de $[n]$ par $w_2(\beta, -x, c^{-1} - 1; \cdot)$;
- (b) les permutations partiellement soulignées de $[n]$ par $w_3(\beta, -x, c^{-1} - 1; \cdot)$.

En d'autres termes on a

$$\begin{aligned} m_n(x; \beta, c) &= \sum w_2(\beta, -x, c^{-1} - 1; \sigma), & \sigma &\in \text{PB}_n, \\ &= \sum w_3(\beta, -x; c^{-1} - 1; \theta), & \theta &\in \text{PPS}_n. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Pour démontrer le théorème, on construit une bijection $\rho_{12}: \psi \mapsto \sigma$ de MEIX_n sur PB_n et une bijection $\rho_{23}: \sigma \mapsto \theta$ de PB_n sur PPS_n telles que

$$w(\beta, X, Y; \psi) = w_2(\beta, X, Y; \sigma) = w_3(\beta, X, Y; \theta). \quad (5.2)$$

La construction de la bijection ρ_{12} est évidente à la lumière des graphes dessinés en Figures 1 et 2. On passe du graphe de la Figure 1 à celui de la Figure 2 de la façon suivante: si un sommet v de B est le but d'un arc continu (cf. Section 2 pour les définitions d'arcs continus et pointillés), on efface l'arc *pointillé* ayant v pour but—soit v' son origine—et on le remplace par un arc pointillé allant de v' à l'origine de l'unique chemin continu ayant v pour but. Le fait essentiel est que cette transformation *préserve les cycles*

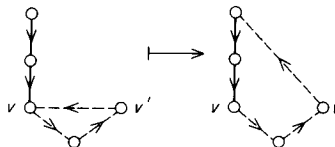


FIGURE 3.

continus et envoie chaque cycle pointillé de ψ sur un cycle de σ ayant au moins un arc pointillé. Avec les notations des Sections 2 et 3, on a donc

$$a(\psi) = a_2(\sigma) \quad \text{et} \quad b(\psi) = b_2(\sigma). \quad (5.3)$$

Par ailleurs, la transformation envoie bien MEIX_n sur PB_n et est évidemment *réversible*. A l'aide de (5.3) et compte tenu des définitions (2.1) et (3.1), on a établi première équation de (5.2).

Le bijection $\rho_{23}: \sigma \mapsto \theta$ n'est autre que la *transformation fondamentale pour les permutations* décrite dans [4, pp. 92–98; 3, pp. 13–15]. Nous rappelons la construction de cette transformation à l'aide de l'exemple de la Figure 2. D'abord on écrit la permutation *inverse* de σ comme produit de cycles disjoints:

$$(9) (3, 10, 5) (7, 6, 8, \mathbf{13}, 2, 15) (\mathbf{1}, \mathbf{11}) (12, 4, 16, 14).$$

Ensuite, on place le *plus grand élément*—ici pour l'ordre induit par (A, B) —dans chaque cycle *au début*, et on réarrange le produit de ces cycles suivant l'ordre *croissant* de ces plus grands éléments. On obtient

$$(9) (10, 5, 3) (4, 16, 14, 12) (\mathbf{11}, \mathbf{1}) (\mathbf{13}, 2, 15, 7, \mathbf{6}, 8).$$

Enfin on supprime les parenthèses:

$$\theta = 9, 10, 5, 3, 4, 16, 14, 12, \mathbf{11}, \mathbf{1}, \mathbf{13}, 2, 15, 7, \mathbf{6}, 8.$$

C'est une des propriétés connues de la transformation fondamentale de faire correspondre nombre de cycles de σ et nombre de termes saillants de l'image $\theta = \rho_{23}(\sigma)$. Par conséquent,

$$a_2(\sigma) = a_3(\theta) \quad \text{et} \quad b_2(\sigma) = b_3(\theta),$$

ce qui établit la seconde équation de (5.2) au vu des définitions (3.1) et (4.2).

On notera que ρ_{12} envoie l'endofonction de la Figure 1 sur la permutation de la Figure 2 et que l'image de cette dernière par ρ_{23} est la permutation partiellement soulignée (4.1).

REMARQUE 5.2. Kreweras [9] avait calculé le polynôme générateur des permutations partiellement soulignées par nombre de termes saillants gras, autrement dit le polynôme

$$\sum (-x)^{b_3(\theta)}, \quad \theta \in \text{PPS}_n. \quad (5.4)$$

De (4.2) on déduit $(-x)^{b_3(\theta)} = w_3(1, -x, 1; \theta)$, et par conséquent le polynôme (5.4) est égal au polynôme de Meixner $m_n(x; 1, \frac{1}{2})$.

RÉFÉRENCES

1. R. Askey and J. Wilson, Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials, *Memoir, Amer. Math. Soc., Providence*, à paraître.
2. Th. S. Chihara, *An introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.
3. A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, ['Bateman Manuscript Project'], McGraw-Hill, New York, 1953.
4. D. Foata, *La Série Génératrice Exponentielle dans les Problèmes d'Énumération*, Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1974.
5. D. Foata, Combinatoire des identités sur les polynômes orthogonaux, *Proc. International Congress of Mathematicians*, [Warsaw, 16–24 August 1983], à paraître.
6. D. Foata et P. Leroux, Polynômes de Jacobi, interprétation combinatoire et fonction génératrice, *Proc. Amer. Math. Soc.* **87** (1983), 47–53.
7. D. Foata et M. P. Schützenberger, *Théorie Géométrique des Polynômes Eulériens*, *Lecture Notes in Math.* **136**, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
8. D. Foata et V. Strehl, Combinatorics of the Laguerre polynomials, *Proc. Waterloo Silver Jubilee Conference* [June–July 1982], à paraître.

9. G. Kreweras, Permutations partiellement soulignées et polynômes géométriques, *Europ. J. Combinatorics* **2** (1981), 155–163.
10. J. Meixner, Orthogonale Polynomsysteme mit einer besonderen Gestalt der erzeugenden Funktion, *J. London Math. Soc.* **9** (1934), 6–13.
11. J. Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, J. Wiley, New York, 1958.

Received 7 October 1982

DOMINIQUE FOATA ET JACQUES LABELLE

Département de Mathématique, Université de Strasbourg, 7 Rue René Descartes, F 67084 Strasbourg, France

et

*Département de Mathématiques, Université du Québec à Montréal, Case Postale 8888, Succursale 'A', Montréal,
Québec, Canada H3C 3P8*