

LA MATHÉMATIQUE COMBINATOIRE

Dominique FOATA(*)

Université de Strasbourg

Il incombe à tout scientifique engagé dans des travaux de recherche de devoir faire des rapports à des non-spécialistes (ne serait-ce que pour solliciter des fonds de recherche!), de placer son sujet, de dire quelles sont ses motivations et ses espoirs. Le but du présent article est de discuter de certains aspects de la recherche en Combinatoire, de voir comment cette discipline s'insère entre les domaines d'application (statistique, informatique) et le courant principal de la mathématique.

1. INTRODUCTION

Si l'on consulte la classification des *Mathematical Reviews* à la section 05 "Combinatorics, Graph Theory"), on constatera que cette section est elle-même divisée en trois sous-sections :

05 A "Classical combinatorial problems"

05 B "Designs and configurations"

05 C "Graph theory."

Il y a donc des problèmes combinatoires classiques... On verra dans un instant ce qu'il faut entendre par là aujourd'hui. La rubrique 05 B porte un titre bien explicite. Les "designs" sont tous les modèles tirés des géométries finies : plans projectifs finis, carrés latins, blocs incomplets équilibrés... On les a beaucoup étudiés. Certains résultats ont défrayé la chronique, comme la fausseté de la vieille conjecture d'Euler sur les carrés latins orthogonaux démontrée par Bose et son école ou la non-existence de certaines familles de plans objectifs établie par Bruck et Ryser, ou encore l'étude asymptotique des blocs équilibrés par Wilson. Le livre de Hall [1], pourtant déjà ancien, donne une excellente idée de la problématique sous-jacente.

Quant à la théorie des graphes, il n'y a aucune difficulté à situer le sujet. La théorie a eu son développement propre, inspiré de la topologie combinatoire (*cf.* par exemple, le problème des quatre couleurs) et de certaines applications (*cf.* par exemple, les réseaux de transport, le problème du voyageur de commerce).

(*) Professeur visiteur à l'Université du Québec à Montréal, automne 1981.

La présente reproduction a été T_EX-recomposée en mars 2023 à partir d'une copie gracieusement fournie par Gilbert Labelle.

Si l'on examine maintenant les rubriques de la section 05 A ("Classical combinatorial problems") de *Mathematical Reviews*, on peut lire les expressions suivantes (traduites en français ci-après) : "problème de choix," "systèmes de représentants," "factorielles," "coefficients binomiaux," "fonctions génératrices." Cette description semble bien vieillotte et les rédacteurs de *Mathematical Reviews* seraient bien inspirés de la rafraîchir quelque peu. Si on la conserve un instant, on se rend compte qu'il n'y a aucune structure, aucun modèle dans cette liste, contrairement à ce qui passait dans les domaines 05 B et 05 C. On y fait du calcul (cf. "factorielles, coefficients binomiaux, fonctions génératrices," ... , mais du calcul de quoi ? sur quoi ? On observe déjà à ce niveau une différence fondamentale entre, d'une part, les disciplines 05 B et 05 C et d'autre part, le domaine 05 A. Leur seul point commun est l'*étude de structures discrètes*. Tandis que les deux premières disciplines ont leurs structures propres, la troisième doit emprunter ses sujets aux autres branches des mathématiques et aux applications. Elle les analyse ensuite selon sa propre méthodologie, puisant dans les fortes traditions du calcul et s'inspirant aussi de certains domaines d'application. Après avoir commenté la renaissance du calcul au paragraphe suivant, nous indiquons comment certaines sciences appliquées ont contribué à cette renaissance. Enfin nous donnons une vue d'ensemble sur les problèmes classiques d'aujourd'hui.

2. LE RENOUVEAU DU CALCUL

La liste des rubriques donnée plus haut de la sous-section 05 A de *Mathematical Reviews* décrit partiellement ce qu'on appelait *algèbre classique* au début de ce siècle, par rapport à *algèbre moderne*. Celle-ci s'est développée avec l'étude et la recherche systématique des structures dites fondamentales. L'aspect calculatoire de l'algèbre si florissant au début du siècle s'est soudain arrêté dans les années vingt, disons après la publication de l'ouvrage monumental de MacMahon [2] sur l'analyse combinatoire. Or, on assiste depuis quelques années à un renouveau du calcul, à une recherche de l'explicite dans beaucoup de domaines des mathématiques. Ce renouveau et cette recherche s'exercent à la fois de l'intérieur pour une meilleure compréhension des structures étudiées, mais aussi sous la pression de disciplines appliquées, comme la statistique et l'informatique. Il a donc fallu reprendre les vieux travaux d'algèbre classique du début du siècle. A titre d'exemple, notons que deux représentants de cette discipline ont eu leurs oeuvres complètes éditées et publiées récemment (Young [3] et MacMahon [4]). Depuis une vingtaine d'années on assiste donc à une renaissance de cette algèbre classique, mais cette renaissance a été fortement conditionnée par les applications statistiques et informatiques, d'une part, et par tous les courants majeurs des mathématiques, d'autre part.

3. STATISTIQUE ET INFORMATIQUE

La statistique a été développée par des praticiens qui faisaient des calculs à la main. Ils ont, de ce fait, mis au point des techniques extrêmement raffinées et sont à l'origine de la découverte d'identités remarquables sur les fonctions génératrices (*cf.* par exemple, l'ouvrage de David et Barton [5]). Les statisticiens calculant des distributions de variables aléatoires ont obtenu beaucoup de formules explicites en particulier, dans l'étude des statistiques d'ordre. Ces calculs faisaient ou non partie du corpus des identités fondamentales sur les fonctions spéciales. Si oui, on avait alors une interprétation originale de formules de l'analyse classique. Le problème réciproque s'imposait de lui-même. Pourquoi d'autres formules fondamentales de l'analyse classique ne s'interpréteraient-elles pas de la même façon? Y a-t-il un modèle statistique sous-jacent à toutes les identités classiques? C'est une des questions-clés qui fascine et guide maint spécialiste contemporain de Combinatoire. Ce point sera repris plus loin.

L'informatique quant à elle, ne s'est développée que depuis quinze ans. Songeons que le mot lui-même a été construit de toutes pièces, à partir des mots "information" et "automatique" à la fin des années soixante. Les premiers théoriciens de l'informatique ont dû manipuler des structures, discrètes par nature même, et faire des comptages. Ils se sont naturellement tournés vers les ouvrages de "problèmes combinatoires classiques." Dans les trois volumes parus de Knuth [6] on peut constater que les premier et troisième volumes sont consacrés, pour moitié, à des exposés de Combinatoire (comptages fondamentaux, manipulation de fonctions génératrices, réarrangements). L'informatique est un gros demandeur de techniques des mathématiques discrètes. Tout le tri informatique, par exemple, n'est qu'une étude statistique du groupe symétrique. Cet aspect particulier sera également repris plus loin.

4. LA COMBINATOIRE CLASSIQUE

Donnons maintenant une liste partielle (et forcément partielle!) des problèmes combinatoires classiques étudiés à l'heure actuelle. Nous ne parlerons que des thèmes suivants :

- (a) les problèmes combinatoires de l'algèbre commutative;
- (b) la théorie combinatoire des invariants;
- (c) l'étude combinatoire des fonctions spéciales;
- (a) l'étude statistique du groupe symétrique;
- (e) la théorie des q -séries;
- (f) la mise au point d'outils algébriques.

(a) Les problèmes combinatoires de l'Algèbre Commutative ont été développés par Stanley : ([7], [8]) et son école du M.I.T. L'étude des anneaux de Cohen-Macaulay a fait apparaître des problèmes sur des structures discrètes. On dispose désormais d'une théorie très séduisante des ensembles partiellement ordonnés dits de Cohen-Macaulay, qui apporte un éclairage nouveau sur le problème de la structure des idéaux d'un anneau (*cf.* [9], [10], [11]).

(b) La théorie des invariants a été reconsidérée par G.-C. Rota [12] et son école. De nouveaux objets ont été mis en évidence, notamment les bidéterminants, qui pourraient permettre une meilleure compréhension des algorithmes liés à la représentation du groupe symétrique.

(c) L'étude combinatoire des fonctions spéciales a été abordée notamment par l'école lotharingienne ([13], [14], [15]). Comme indiqué plus haut, cette problématique est directement inspirée de la Statistique : toute identité ne serait que le comptage par deux voies différentes d'une même suite de structures qu'il s'agit de mettre en évidence. L'intérêt de cette recherche est tout d'abord de trouver des démonstrations combinatoires, donc élémentaires, de ces identités, souvent prouvées par des techniques analytiques élaborées, ensuite de trouver les extensions naturelles suggérées par le modèle combinatoire. L'étape ultérieure échappe alors à la combinatoire : si l'extension trouvée est suffisamment belle ou naturelle, elle doit fournir un nouvel outil à l'analyste.

(d) L'étude statistique du groupe symétrique. Par statistique sur le groupe symétrique, il faut entendre toute fonction définie sur ce groupe, dépendant explicitement de l'ordre total de $\{1, 2, \dots, n\}$ sur lequel le groupe agit. Par exemple, si $a = a(1)a(2)\dots a(n)$ est une permutation de la suite $12\dots n$, le nombre d'entiers i compris entre 1 et $(n-1)$ pour lesquels $a(i)$ est plus grand que $a(i+1)$, est une statistique sur le groupe symétrique appelé le nombre de descentes. Le nombre d'inversions, classiquement utilisé, en est une autre [16]. Plusieurs distributions univariées ou multivariées de ces statistiques ont été calculées et font apparaître des fonctions classiques de l'analyse. Les résultats obtenus sont utilisés dans le tri informatique, où l'on mesure ainsi le degré de dérangement d'une suite à trier. D'autre part, par définition même, toutes les statistiques d'ordre sont des statistiques sur le groupe symétrique. Enfin, d'un point de vue théorique, cette étude fournit des techniques combinatoires nouvelles pour la théorie des q -séries. A ce groupe de recherche se rattachent toutes les études sur les tableaux de Young [17] qui jouent un rôle essentiel dans la représentation du groupe symétrique.

(e) La théorie des q -séries est un vaste champ d'étude incluant les fonctions thêta, les fonctions hypergéométriques basiques de Heine, les q -polynômes orthogonaux. L'étude statistique du groupe symétrique décrit plus haut fait apparaître des q -séries classiques. A la suite des travaux de Selberg [18], Macdonald [19] a donné plusieurs conjectures sur les identités entre q -séries. Ces conjectures sont de nature combinatoire en ce sens qu'il s'agit de démontrer que le terme constant d'une série de Laurent est donné par un polynôme explicite en une variable. Si l'on dispose déjà de techniques combinatoires pour le maniement des q -séries, notamment pour l'étude des congruences et des divisibilités (*cf.* par exemple ([20], [21], [22]) il reste beaucoup à inventer avant d'aborder l'examen de ces conjectures. Il faudrait déjà interpréter convenablement les q -polynômes de Laguerre et d'Hermite, qui sont pourtant les polynômes les plus simples dans la hiérarchie des fonctions hypergéométriques basiques. Plusieurs auteurs ([23], [24]) ont aussi construit des modèles pour manipuler ces q -séries, et pourtant le seul point de vue combinatoire ne semble pas seul suffire. Il faut dominer plusieurs sujets pour venir à bout de certaines conjectures classiques, comme Andrews [25] a si bien su l'illustrer.

(f) La mise au point d'outils algébriques a été rendue nécessaire pour le traitement des problèmes décrits plus hauts. On citera la très célèbre inversion de Möbius ([26], [27]), le composé partitionnel ([28],[29]), la théorie des espèces de structures ([30], [31]) développée par l'école québécoise, une combinatoire pour les fractions continues [32], une algèbre du calcul basique [33],... Ici apparaissent les premières structures propres au sujet, qui devraient amener à la fois un enrichissement théorique et une plus grande audience de cette discipline.

5. CONCLUSION

La liste des problèmes donnée au paragraphe précédent est très provisoire. D'autres questions vont surgir. Appelons Combinatoire Classique cette méthode qui consiste à découvrir la structure discrète sous-jacente à un problème de calcul d'analyse ou de calcul algébrique. Pendant longtemps cette Combinatoire va devoir se nourrir des autres branches des mathématiques. Sa théorisation ne se fera que plus tard. Pour le moment, ses adeptes se doivent d'accumuler les matériaux, regarder les problèmes classiques des mathématiques d'un œil nouveau et rester attentifs aux préoccupations des praticiens. Chemin faisant, les spécialistes de cette Combinatoire écrivent, peut-être sans le savoir, le cours de "Calculus" du vingt-et-unième siècle.

RÉFÉRENCES

1. M. Hall Jr., *Combinatorial Theory*, Blaisdell, Waltham, Mass., 1967.
2. P.A. MacMahon, *Combinatory Analysis*, vol. 1 et 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1915. (Réimprimé par Chelsea, New York, 1955).
3. A. Young, *Collected papers* (G. de B. Robinson, ed.), University Toronto Press, Toronto, 1979.
4. P.A. MacMahon, *Collected papers*, vol. 1, *Combinatorics* (G.E. Andrews, ed.), M.I.T. Press, Cambridge, 1978.
5. F.N. David et D.E. Barton, *Combinatorial Chance*, Griffin, London, 1962.
6. D.E. Knuth, *The Art. of Computer Programming*, vol. 1 et 3, Addison-Wesley, Don Mills, Ontario, 1968-1972.
7. R.P. Stanley, Magic labelings of graphs, symmetric magic squares, systems of parameters and Cohen-Macaulay rings, *Duke Math. J.*, 43 (1976), 511-531.
8. R.P. Stanley, The upper bound conjecture and Cohen-Macaulay rings, *Studies in Appl. Math.*, 54 (1975), 135-142.
9. K. Baclawski, Cohen-Macaulay ordered sets, *J. Algebra*, 63 (1980), 226-258.
10. K. Baclawski et A. Garsia, Combinatorial decompositions of a class of rings, *Advances in Math.*, 39 (1981), 155-184.
11. A. Garsia, Combinatorial methods in the theory of Cohen-Macaulay rings, *Advances in Math.*, 38 (1980), 229-266.
12. J. Désarménien, J. Kung et G.-G. Rota, Invariant theory, Young bitableaux, and combinatorics, *Advances in Math.*, 27. (1978), 63-92.
13. D. Foata, A combinatorial proof of the Mehler formula, *J. of Combinatorial Theory, ser. A*, 24 (1978), 367-376.
14. D. Dumont, Une approche combinatoire des fonctions elliptiques de Jacobi, *Advances in Math.*, 41 (1981), 1-39.
15. A.M. Garsia et J. Remmel, A combinatorial interpretation of q -derangements and q -Laguerre numbers, *Europ. J. Combinatorics*, 1 (1980), 47-59.
16. I.M. Gessel, *Generating functions and enumeration of sequences*, Ph.D. thesis, Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., 111 p., 1977.

17. M.-P. Schützenberger, La correspondance de Robinson, *Combinatoire et représentation du groupe symétrique* (Actes Table Ronde C.N.R.S., Strasbourg, 1976), Lecture Notes in Math. no. 579, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
18. A. Selberg, Bemerkninger om et Multipelt Integral, *Norsk. Mat. Tidsskr.*, 26 (1944), 71-78.
19. I.G. Macdonald, Some conjectures for root systems, *SIAM J. Math. Anal.* (à paraître).
20. G.E. Andrews et I. Gessel, Divisibility properties of the q -tangent numbers, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 68 (1978), 380-381.
21. D. Foata, Further divisibility properties of the q -tangent numbers, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 81 (1981) 143-148.
22. J. Désarménien, Les q -congruences de Kummer pour les q -polynômes d'Euler, *European J. Combinatorics* (à paraître).
23. M. Roman et G.-C. Rota, The umbral calculus, *Advances in Math.*, 27 (1978), 95-188.
24. J. Cigier, Operatormethoden für q -Identitäten, *Monatshefte*, 88 (1979), 87-105.
25. G.E. Andrews, Partitions, q -series, and the Lusztig-Macdonald-Wall conjectures, *Invent. Math.*, 41 (1977), pp. 91-102.
26. G.-C. Rota, On the foundations of Combinatorial Theory I. Theory of Möbius functions, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, 2 (1964), 340-368.
27. M. Content, F. Lemay et P. Leroux, Catégories de et fonctorialités : un cadre général pour l'inversion de Möbius, *J. Combinatorial Theory, Ser. A*, 28 (1980), 169-190.
28. D. Foata et M.P. Schützenberger, *Théorie géométrique des polynômes Eulériens*, Lecture Notes in Math. no. 138, Springer-Verlag, Berlin 1970.
29. D. Foata, *La série génératrice exponentielle dans les problèmes d'énumération*, Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1974.
30. A. Joyal, Une théorie combinatoire des séries formelles, *Advances in Math.* (à paraître).
31. G. Labelle, Une nouvelle démonstration combinatoire des formules d'inversion de Lagrange, *Advances in Math.* (à paraître).
32. Ph. Flajolet, Combinatorial aspects of continued fractions, *Discrete Math.*, 32 (1980), 125-161.
33. G. Viennot, *Algèbres de Lie libres et monoïdes libres*, Lecture Notes in Math. no. 691, Springer-Verlag, Berlin, 1978.