

COMBINATOIRE. — Une démonstration combinatoire de l'identité de Pfaff-Saalschütz. Note (*) de Dominique Foata, présentée par Marcel-Paul Schützenberger.

L'identité de Pfaff-Saalschütz, qui donne la valeur en 1 d'une série hypergéométrique ${}_3F_2$ est établie par des techniques combinatoires.

COMBINATORICS. — A Combinatorial Proof of Pfaff-Saalschütz's Identity.

Pfaff-Saalschütz's identity that yields the value at $x = 1$ of a hypergeometric series ${}_3F_2$ is derived by means of combinatorial methods.

Notons $(a)_n$ les factorielles montantes :

$$(a)_0 = 1 \quad \text{et} \quad (a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1) \quad (n \geq 1)$$

et

$${}_3F_2 \left[\begin{matrix} a_1, a_2, a_3 \\ b_1, b_2 \end{matrix}; x \right] = \sum \frac{(a_1)_n (a_2)_n (a_3)_n}{(b_1)_n (b_2)_n n!} x^n \quad (n \geq 0),$$

la série hypergéométrique avec trois paramètres au numérateur et deux au dénominateur. L'identité suivante, dans laquelle n est un entier positif :

$$(1) \quad {}_3F_2 \left[\begin{matrix} a, b, -n \\ c, 1 + a + b - c - n \end{matrix}; 1 \right] = \frac{(c-a)_n (c-b)_n}{(c)_n (c-a-b)_n},$$

est traditionnellement appelée formule de Saalschütz (*cf.* par exemple [3]). Elle reste l'outil fondamental dans de nombreuses démonstrations sur les séries hypergéométriques, en particulier pour évaluer les noyaux de Poisson ([1], [5], [12]). Comme, par ailleurs, ces évaluations peuvent être obtenues par des méthodes combinatoires ([6], [7], [8]), il est naturel d'utiliser ces dernières techniques pour établir l'identité (1) elle-même. Ceci est l'objet de la présente Note.

On doit à Askey [2] d'avoir signalé que cette identité se trouve déjà démontrée dans un mémoire de Pfaff [10], antérieur de 93 ans à l'article de Saalschütz [11] auquel on se réfère habituellement. Récemment, Gessel et Stanton [9] ont obtenu une démonstration très courte de cette formule en interprétant de façon convenable le coefficient constant d'une série de Laurent. Enfin, George Andrews m'a fait remarquer que les formules (6) et (6') dans [4], établies de façon combinatoire, ne sont en fait que les deux formes de l'identité de Pfaff-Saalschütz pour n pair et impair, les autres paramètres étant supposés entiers.

La démonstration combinatoire de (1) proposée ici est intrinsèque en ce sens que, d'une part, les paramètres a, b, c sont de simples variables et, d'autre part, une fois la formule présentée sous forme polynomiale [*cf.* (3) ci-dessous], on évalue directement une fonction génératrice de structures finies – ici des bipermutations – de deux façons différentes, obtenant ainsi les deux membres de l'identité.

Chassons les dénominateurs dans (1) et posons $d = c - a - b$. On est conduit à l'identité polynomiale :

$$(2) \quad \sum \binom{n}{k} (a)_k (b)_k (a+b+d+k)_{n-k} (d)_{n-k} = (d+b)_n (d+a)_n,$$

qui peut se récrire en décomposant le facteur $(a+b+d+k)_{n-k}$ comme

$$(3) \quad \sum \binom{n}{i, j, k} (a)_k (b)_{k+j} (a+d)_i (d+i)_j (d)_i = (d+b)_n (d+a)_n \quad (i+j+k=n).$$

Une *bipermutation* de l'ensemble $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ est définie comme étant un triplet (D, B, σ) , où (D, B) est une partition ordonnée de $[n]$ et σ une permutation de $[n]$

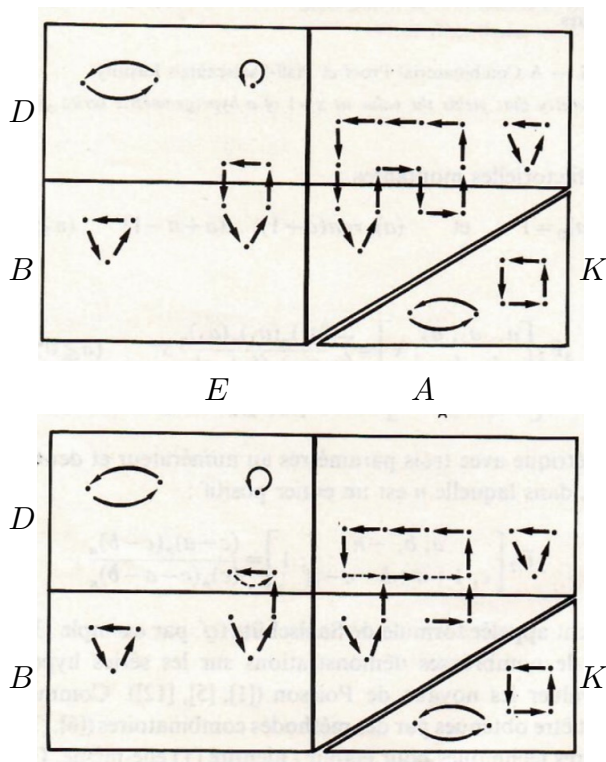


Figure : transformation $\tau' \mapsto (f, \theta)$

avec la propriété que les restrictions σ_D et σ_B de σ à D et B sont elles-mêmes des permutations de D et B , respectivement. Si $\nu(\sigma_D)$ et $\nu(\sigma_B)$ désignent le nombre de cycles (ou d'orbites) de σ_D et σ_B , respectivement, le poids de la bipermutation (D, B, σ) est défini par :

$$w(d, b; \sigma) = d^{\nu(\sigma_D)} b^{\nu(\sigma_B)}.$$

On a évidemment :

$$(4) \quad \sum w(d, b; \sigma) = (d + b)_n,$$

la sommation étant étendue à toutes les bipermutations de $[n]$. D'où :

$$(5) \quad \sum w(d, b; \sigma) w(d, a; \tau) = (d + b)_n (d + a)_n,$$

la sommation étant, cette fois, sur tous les couples (σ, τ) de bipermutations de $[n]$. Le problème consiste donc à décomposer le premier membre de (5) et faire ainsi apparaître le premier membre de (3).

Soient donc (D, B, σ) et (E, A, τ) deux bipermutations de $[n]$. On désigne par K la réunion de toutes les orbites de τ qui sont entièrement contenues dans $B \cap A$. Dans la partie supérieure de la figure, on a représenté en deux tranches horizontales (resp. verticales) une partition (D, B) [resp. (E, A)], ainsi que le graphe d'une bipermutation (E, A, τ) . L'ensemble K apparaît dans le coin inférieur droit. La restriction de τ à K est elle-même une permutation de K notée τ_K . Soit τ' la restriction de τ à $E + (A - K)$. Le triplet $(E, A - K, \tau')$ est alors une bipermutation de $E + (A - K)$ et chaque orbite de τ' intersectant $B \cap A - K$ a aussi une intersection non vide avec D (voir la partie supérieure de la figure). De plus :

$$(6) \quad w(d, a; \tau) = a^{\nu(\sigma_K)} w(d, a; \tau').$$

Soit (I_0, J_0, K_0) une partition ordonnée de $[n]$ telle que $|I_0| = i$, $|J_0| = j$, $|K_0| = k$. Pour établir (3) il suffit donc de démontrer que le polynôme générateur $\sum' w(d, b; \sigma) w(d, a; \tau)$ des couples de bipermutations $((D, B, \sigma), (E, A, \tau))$ tels que $D = I_0$, $B - K = J_0$, $K = K_0$, est précisément égal à :

$$(7) \quad (a)_k (b)_{k+j} (a + d)_i (d + i)_j (d)_i.$$

D'abord :

$$(8) \quad \begin{aligned} \sum' w(d, b; \sigma) w(d, a; \tau) &= \sum w(d, b; \sigma) \sum a^{\nu(\sigma_K)} \sum w(d, a; \tau') \\ &= (b)_{k+j} (d)_i (a)_k \sum w(d; a; \tau'). \end{aligned}$$

La partie cruciale est l'évaluation de la dernière somme. Dans la figure, le passage de la partie supérieure à la partie inférieure est clair : chaque fois qu'une flèche a son origine, disons v , dans D et son but dans $B - K$, elle est supprimée et remplacée par une flèche (en pointillé) de même origine dont le but est le premier itéré de v qui soit de nouveau dans D . Le fait important est que cette transformation *préserve le nombre de cycles* et qu'elle est réversible. On obtient ainsi le graphe d'une *injection* f de $B - K$ dans $D + (B - K)$ dont les seuls cycles sont dans $B \cap E$ et celui d'une *bipermutation*

$(D \cap E, D \cap A, \theta)$ de D . Réciproquement, à une telle paire (f, θ) correspond une et une seule bipermutation $(E, A - K, \tau')$. En notant $\nu(f)$ le nombre de cycles de f , on a :

$$(9) \quad w(d, a; \tau') = d^{\nu(f)} w(d, a; \theta).$$

D'après [8] la fonction génératrice des injections de $B - K$, de cardinal j , dans l'ensemble $D + (B - K)$, de cardinal $i + j$, par nombre de cycles, est égale à :

$$(10) \quad \sum d^{\nu(f)} = (d + i)_j,$$

et d'après (4)

$$(11) \quad \sum w(d, a; \theta) = (d + a)_i.$$

En reportant (9), (10) et (11) dans (8), on obtient bien l'expression (7).

(*) Remise le 19 septembre 1983.

[1] R. ASKEY, *Studies in Appl. Math.*, 6, S.I.A.M., 1970, p. 64.

[2] R. ASKEY, *MRC Technical Report*, 1532, Madison, Wisconsin, 1975.

[3] W. N. BAILEY, *Generalized hypergeometric series*, Cambridge Univ. Press, 1935, p. 9.

[4] P. CARTIER et D. FOATA, *Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements*, Springer, 1969, p. 63.

[5] A. ERDÉLYI, *Compositio Math.*, 6, 1939, p. 336.

[6] D. FOATA et A. M. GARSIA, *Proc. Symposia Pure Math.*, 34, Amer. Math. Soc., 1979, p. 163.

[7] D. FOATA et P. LEROUX, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 87, 1983, p. 47.

[8] D. FOATA et V. STREHL, *Combinatorics of Laguerre polynomials* [Proc. Waterloo Silver Jubilee (à paraître), 1982].

[9] I. GESSEL et D. STANTON, *Short proofs of Saalschütz's and Dixon's theorems* (à paraître).

[10] J. F. PFAFF, *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 11, 1797, p. 38.

[11] L. SAALSCHÜTZ, *Z. für Math. u. Phys.*, 35, 1890, p. 186.

[12] G. N. WATSON, *J. London Math. Soc.*, 8, 1933, p. 189.

Département de Mathématique, Université de Strasbourg,
7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg Cedex.