

DOMINIQUE FOATA

Combinatoire des identités sur les polynômes orthogonaux

L'étude combinatoire récente des identités sur les polynômes orthogonaux est passée en revue. A titre d'illustration, on établit, par des méthodes combinatoires, une extension de la formule du noyau de Poisson pour les polynômes de Meixner.

1. Introduction

L'étude combinatoire des identités sur les fonctions spéciales a été entreprise dans les dernières années par différentes écoles, bostonienne ([27], [28], [29], [35], [36], [38]), californienne ([19], [24], [25], [26], [44]), lotharingienne ([13], [14], [16], [17], [18], [22], [39], [40], [41]), québécoise ([20], [21], [31], [33]) et viennoise ([10], [11], [30]). Comme le dit fort justement notre ami Adriano Garsia [26], "les fonctions spéciales et les identités des mathématiques classiques recèlent une information abondante. Cette information s'exprime sous forme de correspondances entre structures finies qu'il s'agit de dégager. Les identités classiques apparaissent alors comme de simples relations entre ces structures comptées suivant des statistiques appropriées. Une étude systématique est en cours et a pour but de déterrer cette information de la littérature classique. Ce riche inventaire de correspondances a permis d'établir de nouvelles identités et d'obtenir aussi des démonstrations très explicites des formules classiques."

Du foisonnement des identités sur les fonctions spéciales, il n'est cependant pas facile de dégager l'essentiel de l'accessoire. Les formules importantes ont en général été motivées par des considérations analytiques ou géométriques. Par exemple, c'est en étudiant la positivité de la série bilinéaire des polynômes d'Hermite qu'on a obtenu la formule explicite de Mehler ([2], [3]). On se doit donc de regarder en premier lieu ces

identités solidement motivées. Quant à établir de nouvelles identités par des techniques combinatoires, il faut être plus prudent, s'assurer de leur esthétique ou travailler de conserve avec l'analyste.

Les formules qui se prêtent bien à un traitement combinatoire sont naturellement les identités entre séries de polynômes, comme dans la formule de Mehler, où l'on peut utiliser avec succès les interprétations combinatoires courantes sur les séries comme la somme, le produit, la substitution, l'exponentielle. On pourra trouver dans Joyal [31] un exposé élégant de l'algèbre combinatoire des séries, ou remonter à des mémoires antérieurs comme ceux de Bender et Goldman [8] sur les préfabs, de Rota et ses disciples ([35], [36]) sur le calcul ombra, et encore de Stanley [38] ainsi que de Schützenberger et l'auteur [23].

Dans le corpus des séries de polynômes, on trouve des séries dites ordinaires et des séries exponentielles. Une belle application du traitement combinatoire des séries génératrices ordinaires a été faite par Shapiro [37] qui a obtenu une formule bilinéaire pour les polynômes de Tchebychev de chacune des deux espèces.

Pour les séries génératrices exponentielles, on a pu utiliser avec profit l'identité sur la fonction exponentielle pour établir directement la formule de Mehler [17] ou la fonction génératrice des polynômes de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ [21]. Posant $R = (1 - 2xu + u^2)^{1/2}$, cette dernière fonction génératrice s'écrit

$$\sum u^n P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = 2^{\alpha+\beta} R^{-1} (1-u+R)^{-\alpha} (1+u+R)^{-\beta} \quad (n \geq 0)$$

(cf. [5]). Lorsque $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$, on en déduit une fonction génératrice pour les polynômes ultrasphériques

$$P_n^{(\lambda)}(x) = ((2\lambda)_n / (\lambda + 1/2)_n) P_n^{(\lambda-1/2, \lambda-1/2)}(x)$$

(cf. [42], p. 81, formule (4.7.16)), différente de la fonction génératrice usuelle $\sum u^n P^{(\lambda)}(x) = R^{-\lambda}$ (cf. [42], p. 82, formule (4.7.23)). C'est Volker Strehl ([39], [40], [41]) qui a su prolonger à la fois la méthode combinatoire développée en [21] pour établir cette toute dernière identité, et la méthode de Dumont [13] pour redémontrer un vieux résultat de Tricomi [43] dans le cas général.

Les séries ordinaires et exponentielles n'épuisent pas le sujet. Lorsqu'on s'élève dans la hiérarchie hypergéométrique des polynômes orthogonaux, les séries utilisées deviennent des *séries de faculté* comme dans la formule

(1.1) ci-après, où l'on a posé

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_n = a(a+1) \dots (a+n-1), \quad (n \geq 1)$$

et

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; u) = \sum \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n}{(b_1)_n \dots (b_q)_n} \frac{u^n}{n!} \quad (n \geq 0).$$

Par série de faculté, on entend une série du type

$$\sum u^n / (n! (\gamma)_n (\delta)_n) P_n$$

où P_n est un polynôme ($n \geq 0$).

Le but de cet article est tout d'abord de donner une démonstration combinatoire de l'identité suivante sur des séries de faculté

$$\begin{aligned} & \sum (u^n/n!) (\beta)_n {}_2F_1(-n, -x; \gamma; a) {}_2F_1(-n, -y; \delta; b) \\ &= (1-u)^{-\beta} \sum \frac{(\beta)_r (-x)_r (-y)_r}{(\gamma)_r (\delta)_r r!} \left(\frac{abu}{(1-u)^2} \right)^r \times \\ & \times {}_2F_1\left(\beta+r, -x+r; \gamma+r; -\frac{au}{1-u}\right) {}_2F_1\left(\beta+r, -y+r; \delta+r; -\frac{bu}{1-u}\right) \\ & \quad (n \geq 0; r \geq 0), \quad (1.1) \end{aligned}$$

tout en faisant ressortir les lemmes combinatoires sur les permutations et injections, ensuite de faire le point sur les interprétations combinatoires des polynômes orthogonaux hypergéométriques.

Notons que l'identité (1.1) n'est en fait qu'une extension de la formule du noyau de Poisson pour les polynômes de Meixner $m_n(x; \beta, c)$ définis par

$$m_n(x; \beta, c) = (\beta)_n {}_2F_1(-n, -x; \beta; 1-c^{-1}), \quad (1.2)$$

cette formule du noyau s'écrivant

$$\begin{aligned} & \sum (u^n / (\beta)_n n!) m_n(x; \beta, c) m_n(y; \beta, c) \\ &= (1-u/c)^{x+y} (1-u)^{-x-y-\beta} {}_2F_1(-x, -y; \beta; u(c^{-1}-1)/((1-u/c)^2)) \\ & \quad (n \geq 0) \quad (1.3) \end{aligned}$$

(cf. [2], p. 15, formule (2.40W), où $m_n(x; \beta, c) = (\beta)_n M_n(x; \beta, c)$). En effet, lorsque $\beta = \gamma = \delta$ et $a = b = 1-c^{-1}$, le premier membre de (1.1)

se réduit, moyennant (1.2), au premier membre de (1.3). Quant aux deux fonctions ${}_2F_1$ du second membre, elles se réduisent, par le théorème binomial à $((1-u/c)(1-u)^{-1})^{x-r}$ et $((1-u/c)(1-u)^{-1})^{y-r}$, respectivement. On retrouve alors le second membre de (1.3).

Comme l'a noté Richard Askey [6], on peut déduire analytiquement la formule (1.1) de la formule d'Erdélyi [15] sur les polynômes de Laguerre. Il n'y a donc pas lieu de discourir sur l'originalité d'une telle formule. En revanche, la méthode combinatoire développée est nouvelle.

2. Endofonctions de Meixner

Comme dans [20], on appelle *endofonction de Meixner* sur un ensemble fini S tout couple $\varphi = ((A, B), f)$ où (A, B) est une partition ordonnée de S et f une application de S dans S dont la restriction f_A de f à la partie A est injective et la restriction f_B à B est une permutation de B . Soit $\text{cyc}(f_A)$ (resp. $\text{cyc}(f_B)$) le nombre de cycles de l'injection f_A (resp. la permutation f_B). Le *poide*s de $\varphi = ((A, B), f)$ est défini par

$$w(\gamma, -x, -a; \varphi) = \gamma^{\text{cyc}(f_A)} (-x)^{\text{cyc}(f_B)} (-a)^{|B|}, \quad (2.1)$$

où $|B|$ désigne naturellement le cardinal de B . Comme démontré dans [20], l'expression $(\gamma)_n {}_2F_1(-n, -x; \gamma; a)$, égale à $\sum \binom{n}{i} (-x)_i (\gamma+i)_{n-i} (-a)^i$, est le polynôme générateur des endofonctions de Meixner sur $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ par le poide>s w . En d'autres termes, on a

$$(\gamma)_n {}_2F_1(-n, -x; \gamma; a) = \sum w(\gamma, -x, -a; \varphi), \quad (2.2)$$

où φ varie dans l'ensemble des endofonctions de Meixner sur $[n]$. On a ainsi *interprété combinatoirement* le produit $(\gamma)_n {}_2F_1(-n, -x; \gamma; a)$, c'est-à-dire, à un changement de variables près, le polynôme de Meixner $m_n(x; \beta, c)$ (cf. (1.2)).

Par ailleurs, posons $w_\beta(\sigma) = \beta^{\text{cyc}(\sigma)}$ pour toute permutation σ d'un ensemble fini. L'identité

$$(\beta)_n = \sum w_\beta(\sigma), \quad (2.3)$$

où la sommation est sur l'ensemble des permutations σ de $[n]$, est bien connue (cf. [34], p. 71). Il résulte alors de (2.2) et (2.3) que l'on a

$$\begin{aligned} &(\beta)_n (\gamma)_n {}_2F_1(-n, -x; \gamma; a) (\delta)_n {}_2F_1(-n, -y; \delta; b) \\ &= \sum w_\beta(\sigma) w(\gamma, -x, -a; \varphi) w(\delta, -y, -b; \psi), \end{aligned} \quad (2.4)$$

où la sommation s'étend à tous les triplets (σ, φ, ψ) avec σ une permutation de $[n]$ et φ, ψ deux endofonctions de Meixner sur $[n]$. Le premier membre de (1.1) peut donc s'écrire

$$\sum (w^n / (n! (\gamma)_n (\delta)_n)) \sum w_\beta(\sigma) w(\gamma, -x, -a; \varphi) w(\delta, -y, -b; \psi). \quad (2.5)$$

D'autre part, en développant les fonctions ${}_2F_1$ et en appliquant le théorème binomial, on peut mettre le second membre de (1.1) sous la forme

$$\begin{aligned} & \sum (w^n / (n! (\gamma)_n (\delta)_n)) \sum \binom{n}{q, r, s, i, j} (\beta)_q (\beta)_r (\beta + r)_i (\beta + r)_j \times \\ & \times (2r + i + j)_s (\gamma + r + i)_{n-r-i} (\delta + r + j)_{n-r-j} (-x)_{r+i} (-y)_{r+j} \times \\ & \times (-a)^{r+i} (-b)^{r+j} \quad (q + r + s + i + j = n). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Pour établir (1.1) il suffit donc d'établir l'identité *polynomiale*

$$\begin{aligned} & \sum w_\beta(\sigma) w(\gamma, -x, -a; \varphi) w(\delta, -y; -b; \psi) \\ & = \sum \binom{n}{q, r, s, i, j} (\beta)_q (\beta)_r (\beta + r)_i (\beta + r)_j (2r + i + j)_s \times \\ & \times (\gamma + r + i)_{n-r-i} (\delta + r + j)_{n-r-j} (-x)_{r+i} (-y)_{r+j} \times \\ & \times (-a)^{r+i} (-b)^{r+j} \quad (q + r + s + i + j = n). \end{aligned} \quad (2.7)$$

3. Lemmes combinatoires

L'identité (2.7) est beaucoup moins effrayante qu'il n'y paraît, car tous les termes ont une signification combinatoire qu'on va maintenant donner. Les trois lemmes ci-après sont extraits de l'article sur la formule d'Erdélyi-Hille-Hardy pour les polynômes de Laguerre [22]. Comme dans (2.3), si h est une injection d'un ensemble fini, on pose $w_\beta(h) = \beta^{\text{exc}(h)}$.

LEMME 3.1. Si $|A| = i$, $|B| = j$ et $i + j = n$, alors

$$\sum w_\beta(h) = (\beta + j)_i, \quad (3.1)$$

la sommation étant sur toutes les injections h de A dans $A + B$.

LEMME 3.2. Soit (I, J, R) une partition ordonnée d'un ensemble telle que $|I| = i$, $|J| = j$, $|R| = r$. Alors

$$\sum w_{\beta}(\theta) = (\beta)_r (\beta + r)_i (\beta + r)_j, \quad (3.2)$$

la sommation étant étendue à l'ensemble des permutations θ de $I + J + R$ satisfaisant à $\theta(J) \cap I = \emptyset$.

Soit (I, J, R, S) une partition ordonnée d'un ensemble telle que $|I| = i$, $|J| = j$, $|R| = r$, $|S| = s$. Trois sortes de chemins dont les sommets sont pris dans $I + J + R + S$ sont maintenant introduits, les *a*-chemins, les *b*-chemins et les *ab*-chemins. Les *a*-chemins (resp. *b*-chemins) ont tous leurs sommets dans S à l'exception de l'extrémité qui est dans I (resp. J). Un *ab*-chemin a aussi tous ses sommets dans S , à l'exception d'un seul, qui appartient à R et ne se trouve pas nécessairement à l'extrémité. Dans la Figure 1, effaçons par la pensée toutes les flèches en pointillé et écartons le cycle en trait continu. Il ne reste alors que des *a*-, *b*- et *ab*-chemins.

Un graphe G dont les sommets sont les éléments de $I + J + R + S$ est dit *Erdélyien* sur (I, J, R, S) si ses parties connexes ne sont composées que de *a*-, *b*- et *ab*-chemins.

Il sera commode de noter $R'(G)$ l'ensemble des sommets de G qui sont les extrémités des *ab*-chemins. On a

$$R'(G) \subset R + S \quad \text{et} \quad |R'(G)| = |R|. \quad (3.3)$$

LEMME 3.3. Si $|I| = i$, $|J| = j$, $|R| = r$, $|S| = s$, le nombre de graphes Erdélyiens sur (I, J, R, S) est égal à $(i + j + 2r)_s$.

La démonstration de l'identité (2.7) consiste alors à associer, de façon bijective, à chaque triplet (σ, φ, ψ) de la sommation du premier membre, une partition ordonnée (Q, R, S, I, J) de $[n]$ et une suite $(\sigma', \theta, G, h, h', \xi, \xi')$ ayant les propriétés:

- (i) σ' est une permutation de Q ;
- (ii) θ est une permutation de $R + I + J$ satisfaisant à $\theta(J) \cap I = \emptyset$;
- (iii) G est un graphe Erdélyien sur (I, J, R, S) ;
- (iv) (resp. (v)) h (resp. h') est une injection de $[n] \setminus (R'(G) + I)$ (resp. $[n] \setminus (R + J)$) dans $[n]$;
- (vi) (resp. (vii)) ξ (resp. ξ') est une permutation de $R'(G) + I$ (resp. $R + J$).

De plus, l'identité suivante doit être vérifiée :

$$w_{\beta}(\sigma)w(\gamma, -a; \varphi)w(\delta, -y, -b; \psi) \\ = (-a)^{|R+I|}(-b)^{|R+J|}w_{\beta}(\sigma')w_{\beta}(\theta)w_{\gamma}(h)w_{\delta}(h')w_{-a}(\xi)w_{-y}(\xi'). \quad (3.4)$$

Compte-tenu des lemmes 3.1, 3.2 et 3.3 et de (3.3), on voit que si une telle bijection est établie, la sommation du second membre de (3.4) donne bien le second membre de (2.7). Reste donc à établir la bijection annoncée.

4. La correspondance

Partons d'un triplet (σ, φ, ψ) avec σ une permutation de $[n]$, et $\varphi = ((A, B), f)$, $\psi = ((C, D), g)$ deux endofonctions de Meixner sur $[n]$. Quand on superpose les graphes de ces trois configurations sur un ensemble de n sommets étiquetés, on a d'abord les cycles de σ — appelons-les β -cycles — puis les chemins et cycles des endofonctions $\varphi = ((A, B), f)$ et $\psi = ((C, D), g)$. Les n sommets se répartissent donc en quatre classes $A \cap C$, $A \cap D$, $B \cap C$ et $B \cap D$. D'après l'expression du poids donnée en (2.1), on peut considérer que les sommets de B (resp. D) portent la marque $-a$ (resp. $-b$). On dira qu'un sommet est a -marqué, b -marqué ou ab -marqué, suivant qu'il appartient à $B \cap C$, $A \cap D$, ou $B \cap D$. Les sommets dans $A \cap C$ sont *non marqués*.

Deux sommets distincts v et v' sont dits *liés* si les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

- (i) v est b -marqué et v' est a -marqué;
- (ii) v et v' sont dans le même β -cycle;
- (iii) les sommets appartenant à ce β -cycle et situés entre v et v' sont tous *non marqués*.

La partition ordonnée (Q, R, S, I, J) associée à (σ, φ, ψ) est ainsi définie : si les sommets d'un même β -cycle sont tous non marqués, tous ces sommets sont rangés dans la classe Q . Si un sommet est, ou bien ab -marqué, ou bien b -marqué et lié, il est mis dans R . Si un sommet est a -marqué (resp. b -marqué) et *non* lié, il va dans I (resp. J). Enfin, S se compose de tous les sommets restants. Notons que S englobe aussi les sommets a -marqués et liés.

Dans la Figure 1, on a représenté les β -cycles d'un triplet (σ, φ, ψ) avec les sommets marqués a, b ou ab . Les sommets non marqués apparaissent comme de simples points. L'appartenance de chaque sommet à un bloc de la partition (Q, R, S, I, J) est indiquée par la lettre correspondante. Les flèches en pointillé sont les arcs ayant pour origine les sommets qui sont, ou bien ab -marqués, ou bien a -marqués, ou encore b -marqués mais non liés.

Effaçons les flèches en pointillé du graphe de la Figure 1. On obtient, d'une part, une collection de cycles dont tous les sommets sont dans Q — une *permutation* σ' de Q — d'autre part, une collection de a -, b - et

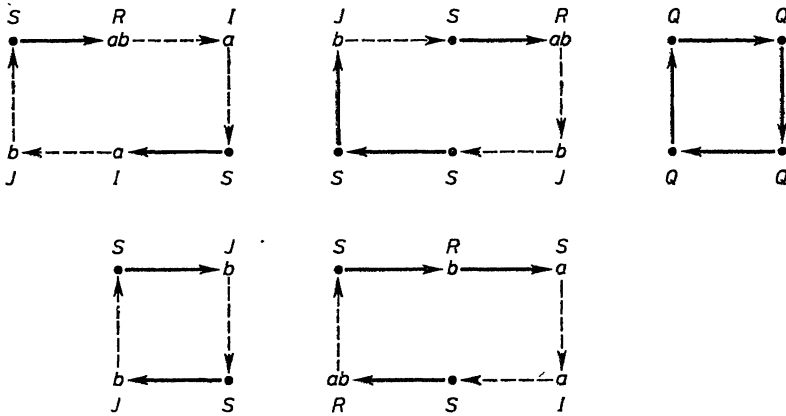


Fig. 1

ab -chemins formant un *graphe Erdélyien* G sur (I, J, R, S) . De plus, comme chaque a - (resp., b -, resp. ab -) chemin contient exactement un sommet dans I (resp. J , resp. R), les arcs en pointillé sont la représentation graphique d'une *permutation* θ de $I + J + R$. Enfin, comme il n'y a pas de flèche en pointillé issue de sommet b -marqué et lié, la permutation θ satisfait à $\theta(J) \cap I = \emptyset$. Evidemment $\text{cyc}(\sigma) = \text{cyc}(\sigma') + \text{cyc}(\theta)$, d'où

$$w_{\beta}(\sigma) = w_{\beta}(\sigma')w_{\beta}(\theta). \quad (4.3)$$

Les trois premiers éléments de la suite $(\sigma', \theta, G, h, h', \xi, \xi')$ ayant été définis, les quatre derniers sont simplement $h = f_A$, $h' = g_O$, $\xi = f_B$ et $\xi' = g_D$, c'est-à-dire, respectivement, les restrictions de f à A , de g à O ,

de f à B et de g à D . Comme on a

$$B = R'(G) + I \quad \text{et} \quad D = R + J, \quad (4.1)$$

ainsi que

$$A = [n] \setminus (R'(G) + I) \quad \text{et} \quad C = [n] \setminus (R + J), \quad (4.2)$$

les conditions (iv) et (v) de la section 3 sont bien vérifiées. De plus, d'après (2.1), (3.3), (4.1) et (4.2), il vient

$$\begin{aligned} w(\gamma, -x, -a; \varphi) &= \gamma^{\text{cyc}(f_A)}(-x)^{\text{cyc}(f_B)}(-a)^{|B|} \\ &= \gamma^{\text{cyc}(h)}(-x)^{\text{cyc}(\xi)}(-a)^{|R'(G)+I|} \\ &= w_\gamma(h)w_{-x}(\xi)(-a)^{|R+J|} \end{aligned} \quad (4.4)$$

et de même

$$w(\delta, -y, -b; \psi) = w_\delta(h')w_{-y}(\xi')(-b)^{|R+J|}. \quad (4.5)$$

Prenant en compte (4.3), (4.4) et (4.5), on obtient bien (3.4).

Réciproquement, si l'on part d'une partition ordonnée (Q, R, S, I, J) de $[n]$ et d'une suite $(\sigma', \theta, G, h, h', \xi, \xi')$ ayant les propriétés (i)–(vii) de la section 3, il est immédiat de reconstruire le triplet (σ, φ, ψ) . Les trois éléments σ', θ, G fournissent la permutation σ , et les couples (h, ξ) et (h', ξ') les endofonctions de Meixner φ et ψ , respectivement.

Ceci achève la démonstration de l'identité (1.1).

5. Conclusion

Un beau guide des polynômes orthogonaux hypergéométriques nous est proposé par Askey et Wilson [7] qui les ont classés dans un diagramme respectant leur hiérarchie hypergéométrique. Nous reproduisons une *partie* de celui-ci dans la Figure 2. Une flèche va du polynôme P au polynôme Q , si l'expression analytique de Q peut être obtenue de celle de P par une spécialisation des paramètres ou un passage à la limite approprié. Par exemple, la flèche allant du polynôme de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$ au polynôme d'Hermite $H_n(x)$ symbolise le passage à la limite

$$H_n(x) = n! \lim (2/\alpha)^{n/2} L_n^{(\alpha)}(\alpha - x(2\alpha)^{1/2}) \quad (\alpha \rightarrow +\infty) \quad (5.1)$$

(cf. [42], p. 389, [4]).

Les interprétations combinatoires des polynômes apparaissant dans ce diagramme sont connues et sont compatibles, en ce sens que toutes les formules de passage ont des démonstrations simples dans la géométrie de ces modèles. Par exemple, la formule (5.1) a une signification géométrique intéressante donnée par Strehl [41].

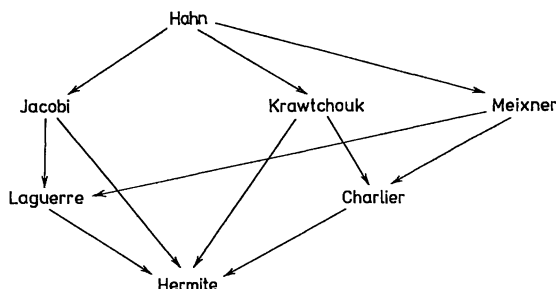


Fig. 2

D'après Karlin-McGregor [32], le polynôme de Hahn a l'expression analytique

$$Q_n(x; \alpha, \beta, N) = \sum \frac{(-n)_k (-x)_k (n + \alpha + \beta + 1)_k}{(\alpha + 1)_k (-N + 1)_k k!} \quad (0 \leq k \leq n).$$

Posant $R_n = (\alpha + 1)_n (-N + 1)_n Q_n(x; \alpha, \beta, N)$, on obtient

$$R_n = \sum \binom{n}{i} (-1)^i (\alpha + 1 + i)_{n-i} (\beta + 1 + n - i)_i (-x)_i (-N + 1 + x)_{n-i}$$

$(0 \leq i \leq n).$

Par le lemme 3.1, on peut donc immédiatement obtenir une interprétation combinatoire des polynômes R_n . Cette interprétation n'a cependant pas fourni des démonstrations vraiment nouvelles des formules concernant les polynômes de Hahn. En revanche, de l'étude combinatoire des R_n , on peut déduire la géométrie combinatoire de tous les polynômes apparaissant dans le diagramme.

Si on se reporte à [2], chap. 2, on constatera que les noyaux de Poisson ont été calculés par des méthodes combinatoires pour les polynômes de Meixner (ici-même), de Laguerre [22] et Hermite [17].

Signalons enfin que cette étude combinatoire des polynômes orthogonaux a aussi pour ambition de traiter les q -polynômes. La principale difficulté vient que souvent plusieurs polynômes peuvent prétendre au titre de q -analogues des polynômes classiques. Il y en a déjà deux familles pour les seuls q -polynômes d'Hermite, comme l'a montré Désarménien [12]. Signalons, en revanche, la belle étude des q -polynômes de Laguerre par Garsia et Remmel [26] et une démonstration très élégante du q -analogue de la formule de Pfaff-Saalschütz par Andrews et Bressoud [1]. Il semble que pour les q -polynômes il faille opérer dans l'algèbre des partitions et non plus dans celle des endofonctions. Un modèle global reste à découvrir, peut-être celui des groupes formels comme une récente étude de Cartier [9] le laisse prévoir.

Références

- [1] Andrews G. E. and Bressoud D. M., *Identities in Combinatorics III: Further Aspects of Ordered Set Sorting*, Pennsylvania State Univ., Math. 83003, 1983.
- [2] Askey R., *Orthogonal Polynomials and Special Functions*, Regional Conference Series in Appl. Math. 21, S. I. A. M., Philadelphia, 1975.
- [3] Askey R., Orthogonal polynomials and positivity, in: *Wave Propagation and Special Functions*, Studies in Appl. Math. 6 (D. Ludwig and F. W. J. Olver, Eds.), S. I. A. M., Philadelphia, 1970, pp. 64–85.
- [4] Askey R., *Math. Reviews* **80b**: 33005.
- [5] Askey R., Jacobi's generating function for Jacobi polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.* **71** (1978), pp. 243–246.
- [6] Askey R., Communication privée.
- [7] Askey R. and Wilson J., Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials, *Amer. Math. Soc. Memoirs*, Providence, R. I., 1983 (à paraître).
- [8] Bender E. A. and Goldman J. R., Enumerative uses of generating functions, *Indiana Univ. Math. J.* **20** (1971), pp. 753–765.
- [9] Cartier P., Groupes formels, représentation des groupes symétriques et congruence de Kummer, *Amer. J. Math.* (à paraître).
- [10] Cigler J., Operatormethoden für q -Identitäten II: q -Laguerre Polynome, *Mh. Math.* **91** (1981), pp. 105–117.
- [11] Cigler J., Operatormethoden für q -Identitäten III: Umbrale Inversionen und die Lagrange'sche Formel, *Arch. Math.* **35** (1980), pp. 533–543.
- [12] Désarménien J., Les q -analogues des polynômes d'Hermite, *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, Publ. IRMA Strasbourg, 1982, 191/S-05, pp. 39–56.
- [13] Dumont D., Une approche combinatoire des fonctions elliptiques de Jacobi, *Adv. in Math.* **41** (1981), pp. 1–39.
- [14] Dumont D., Étude combinatoire d'une suite de polynômes associés aux polynômes ultrasphériques, *Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.* **634–677** (1979), pp. 116–125.

- [15] Erdélyi A., Transformationen einer gewissen nach Produkten konfluenter hypergeometrischer Funktionen fortschreitenden Reihe, *Compositio Math.* **6** (1939), pp. 336–347.
- [16] Flajolet Ph., Combinatorial aspects of continued fractions, *Discrete Math.* **32** (1980), pp. 125–161.
- [17] Foata D., A combinatorial proof of the Mehler formula, *J. Comb. Theory, Ser. A* **24** (1978), pp. 367–376.
- [18] Foata D., Some Hermite polynomial identities and their combinatorics, *Adv. Appl. Math.* **2** (1981), pp. 250–259.
- [19] Foata D. and Garsia A. M., A combinatorial approach to the Mehler formulas for the Hermite polynomials, in: *Relations between Combinatorics and other parts of Mathematics*, Proc. of Symposia in Pure Math. **34**; (D. K. Ray-Chaudhuri, Ed.), Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1978, pp. 163–179.
- [20] Foata D. and Labelle J., Modèles combinatoires pour les polynômes de Meixner, *Europ. J. Comb.* (à paraître).
- [21] Foata D. and Leroux P., Polynômes de Jacobi, interprétation combinatoire et fonction génératrice, *Proc. Amer. Math. Soc.* **87** (1983), pp. 47–53.
- [22] Foata D. and Strehl V., Combinatorics of Laguerre polynomials, *Proc. Waterloo Silver Jubilee*, 1983, à paraître.
- [23] Foata D. and Schützenberger M. P., *Théorie géométrique des polynômes Eulériens*, Lecture Notes in Math., vol. **136**, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [24] Garsia A. M., A q -analogue of the Lagrange inversion formula, *Houston J. Math.* **7** (1981), pp. 205–237.
- [25] Garsia A. M. and Joni S. A., A new expression for umbral operators and power series inversion, *Proc. Amer. Math. Soc.* **64** (1977), pp. 179–185.
- [26] Garsia A. M. and Remmel J., A combinatorial interpretation of q -derangement and q -Laguerre numbers, *Europ. J. Comb.* **1** (1980), pp. 47–59.
- [27] Gessel I., A factorization for formal Laurent series and lattice path enumeration, *J. Comb. Theory, Ser. A* **28** (1980), pp. 321–337.
- [28] Gessel I., A noncommutative generalization and a q -analog of the Lagrange inversion formula, *Trans. Amer. Math. Soc.* **257** (1980), pp. 455–482.
- [29] Gessel I. and Stanton D., Strange evaluations of hypergeometric series, *SIAM J. Math. Anal.* **13** (1982), pp. 295–308.
- [30] Hofbauer J., A short proof of the Lagrange–Good formula, *Discrete Math.* **25** (1979), pp. 135–139.
- [31] Joyal A., Une théorie combinatoire des séries formelles, *Adv. in Math.* **42** (1981), pp. 1–82.
- [32] Karlin S. and McGregor J. L., The Hahn polynomials, formulas and an application, *Scripta Math.* **26** (1961), pp. 33–46.
- [33] Labelle G., Une nouvelle démonstration combinatoire des formules d'inversion de Lagrange, *Adv. in Math.* **42** (1981), pp. 217–247.
- [34] Riordan J., *An Introduction to Combinatorial Analysis*, J. Wiley, New York, 1958.
- [35] Roman S. and Rota G.-C., The umbral calculus, *Adv. in Math.* **27** (1978), pp. 95–188.
- [36] Rota G.-C., Kahaner D., and Odlyzko A., Finite operator calculus, *J. Math. Anal. Appl.* **42** (1973), pp. 685–760.
- [37] Shapiro L. W., A combinatorial proof of a Chebyshev polynomial identity, *Discrete Math.* **34** (1981), pp. 203–206.

- [38] Stanley R. P., Generating functions, in: *Studies in Combinatorics*, (G.-C. Rota, Ed.), Math. Ass. Amer. Studies in Math. **17** (1978), pp. 100–141.
- [39] Strehl V., *Kombinatorischer Beweis und Erweiterung einer Identität von Tricomi*, Jahrestagung der D. M. V., Bayreuth, 1982.
- [40] Strehl V., *Combinatorial aspects of Gegenbauer polynomials* (en préparation).
- [41] Strehl V., *Contribution to the combinatorics of some families of classical orthogonal polynomials*, unpublished manuscript, Erlangen, 1982.
- [42] Szegő G., *Orthogonal Polynomials*, 4th ed., 2nd printing, Colloquium Publ., vol. **23**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1978 (1st ed.: 1939).
- [43] Tricomi F., Sul comportamento asintotico dei polinomi di Laguerre, *Ann. Mat. Pura Appl.* **23** (1949), pp. 263–289.
- [44] Viennot G., Une interprétation combinatoire des développements en série entière des fonctions elliptiques de Jacobi, *J. Comb. Theory, Ser. A* **29** (1980), pp. 121–133.